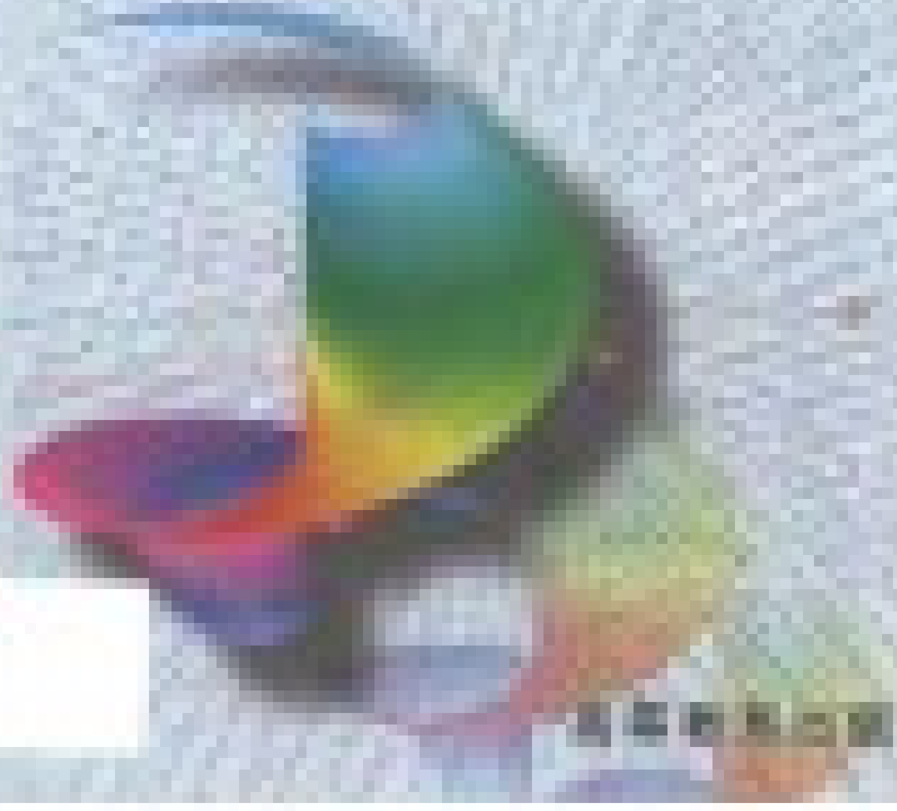
微分几何与微分流形



554

高等学校教学用书

微分几何与微分流形

DIFFERENTIAL GEOMETRY AND DIFFERENTIAL MANIFOLDS

纪永强　编著

高等教育出版社

内容提要

本书共分五章,第一、二章研究了古典微分几何的基本内容——空间曲线及曲面在一点邻近的性质及一些整体性质.第三章讨论了五种重要的空间所研究的主要内容及其相互关系.第四章讨论了多元函数及映射的可微性,最后给出了代数与微分流形的概念和例子.

本书可作为综合大学和高等师范院校的微分几何课程的教材,也可供其它学习微分几何课程的广大读者作为教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微分几何与微分流形/纪永强编著.—北京:高等教育出版社,2000

ISBN 7-04-008769-3

Ⅰ.微... Ⅱ.纪... Ⅲ.①微分几何-高等学校-教材②微分-流形-高等学校-教材 Ⅳ.018

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 26409 号

微分几何与微分流形

纪永强 编著

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　话	010-64054588	传　真	010-64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
排　版	高等教育出版社照排中心		
印　刷	北京华文印刷厂		
开　本	850×1168 1/32	版　次	2000 年 9 月第 1 版
印　张	8.625	印　次	2000 年 9 月第 1 次印刷
字　数	210 000	定　价	9.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

前　言

微分几何与微分流形是大学数学系的主要基础课程之一，学好这门课对于学习近代微分几何有很大的帮助，它已渗透到数学的各个领域，并对其它学科产生了重要的影响.

本书从内上和方法上具有改革性和创造性.我们使用了近代微分几何的活动标架法以及整体和局部相结合的方法讨论了古典微分几何的主要内容——曲线论和曲面论.

为了学习近代微分几何、黎曼几何，本书讨论了向量空间、欧氏空间、赋范向量空间、度量(距离)空间及拓扑空间这五种空间所研究的主要内容及其相互的内在关系，即对高等代数、数学分析、泛函分析及点积拓扑等有关内容的总结和补充.这些都是学习近代微分几何的基础.最后给出了代数与微分流形的概念及大量具体例子.

本书论证严谨，同时力求简明.叙述上深入浅出，条理清晰，尤其讲清了各种量的内在联系及几何特征.本书每节都选择了典型的例题，并注重了一题多解.实践证明，采用本教材的研讨方法，既便于教又易于学.

对于本书的出版，宁夏大学的副校长毛军教授和校长助理王燕昌教授给予了很大的支持和帮助，本人表示衷心的感谢.

由于作者水平有限，书中缺点和错误在所难免，诚恳地希望广大读者批评指正.

纪永强

1999 年 7 月于宁夏大学数学系

目　　录

第一章　曲　线　论

为了方便起见，我们用 $\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{R}^2$ 表示平面，$\mathbf{R}^3$ 表示空间，符号 $\triangleq$ 表示记作，$\underline{\triangle}$ 表示定义为，$\Leftrightarrow$ 表示充要条件．为了排版方便，我们用黑体字母 $\boldsymbol{r}$ 表示矢量，在书写中用 $\vec{r}$ 表示矢量．文中使用雅可比矩阵的概念．

§1.1　平面曲线的参数方程

1　平面曲线 *C* 的参数方程的三种等价形式

设 $M(x,y)$ 是 C 上任一点的坐标，则

$$C:\quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{1.1.1}$$

是平面曲线 C 的参数方程的坐标形式，即动点 M 的坐标可以写成一元函数．它等价于

$$\begin{aligned} C:\quad \text{径矢}\ \overrightarrow{OM} &\triangleq \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} \\ &\triangleq \{x(t),\ y(t)\} \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

其中 $a \leqslant t \leqslant b$，它是曲线 C 的参数方程的矢量形式，也是一元矢量函数．它还等价于下面的映射形式：

$$\begin{aligned} &F:\quad [a,b] \to \mathbf{R}^2 \\ &F(t) = (\ x(t),\ y(t)\ ) \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

区间 $[a,b]$ 在 F 下的象 $F([a,b]) \triangleq C$ 就是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的曲线，有时称 F 为平面曲线．

定义 1.1.1　若映射 $F:(a,b) \to F[(a,b)] \subseteq \mathbf{R}^2$

$$F(t) = (\ x(t),\ y(t)\ )$$

是一一对应的连续映射，则称 C 为平面简单曲线，其中定义域是

开区间,分量函数 $x(t)$和 $y(t)$是一元连续函数.

简单曲线的图象是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的不自交的连续曲线.

规定:参数 t 增加的方向为曲线 C 的正方向.

注 从上面的参数方程中消去参数 t,便得平面曲线 C 的一般方程 $F(x,y)=0$ 或 $y=f(x)$.

2 平面曲线的参数方程不唯一

在平面曲线 C 的参数方程(1.1.1)中,作单调变换:

$$t=g(u)$$

其中 $g'(u)>0$ 或 $g'(u)<0$,$a=g(c)$,$b=g(d)$,则(1.1.1)为

$$C:\quad \begin{cases} x=x(g(u))\triangleq x(u) \\ y=y(g(u))\triangleq y(u) \end{cases} \tag{1.1.4}$$

其中 $c\leqslant u\leqslant d$,(1.1.1)和(1.1.4)都是平面曲线 C 的参数方程,即同一曲线有两种参数方程,所以参数方程不唯一.

注 在参数变换 $t=g(u)$中,若 $g'(u)>0$,则(1.1.1)与(1.1.4)的正方向相同;若 $g'(u)<0$,则(1.1.1)改变了正向.

注 一般取单调函数 $g(u)$为一次函数:$t=g(u)=ku+b$.

3 平面曲线的一般方程与参数方程的互化

(1) 由一元函数给出的平面曲线的一般方程的显式方程

$$C:\quad y=f(x)\qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

它等价于下面的参数方程

$$C:\quad \begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases}\qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

$$\Leftrightarrow\qquad C:\quad \boldsymbol{r}(t)=\{t,\ f(t)\} \tag{1.1.5}$$

其中 $a\leqslant t\leqslant b$.

(2) 抛物线 C: $y^2=2px$

$$\Leftrightarrow\qquad C:\quad \boldsymbol{r}(t)=\left\{\frac{1}{2p}t^2,\ t\right\}\qquad t\in\mathbf{R}$$

或

$$C:\quad \boldsymbol{r}(u)=\{2pu^2,\ 2pu\},\qquad u\in\mathbf{R}$$

(3) 圆 C: $x^2+y^2=a^2$

$$\Leftrightarrow \quad C:\ \begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases} \tag{1.1.6}$$

其中 $0\leqslant t<2\pi$,圆(1.1.6)的起点为$(a,0)$,逆时针方向为正方向.
对于同一方程组(1.1.6),若将定义域 $0\leqslant t<2\pi$ 换为 $-\pi\leqslant t<\pi$ 或 $-\frac{3}{2}\pi<t\leqslant\frac{\pi}{2}$,则圆 C 的起点分别为$(-a,0)$或$(0,a)$,方向还是逆时针为正.

对于定义在 $-\frac{3}{2}\pi<t\leqslant\frac{\pi}{2}$ 上的圆,若令 $t=\frac{\pi}{2}-u$,则得圆 C 的另一参数方程

$$C:\ \begin{cases} x=a\sin u \\ y=a\cos u \end{cases} \tag{1.1.7}$$

其中 $0\leqslant u<2\pi$,起点为$(0,a)$,则顺时针方向为正方向.
在(1.1.6)中,若令 $t=2\theta$,则圆 C 的参数方程又可写为

$$C:\ \begin{cases} x=a\cos 2\theta \\ y=a\sin 2\theta \end{cases} \tag{1.1.8}$$

其中 $0\leqslant\theta<\pi$,由三角函数的万能公式,(1.1.8)还等价于

$$C:\ \begin{cases} x=\dfrac{a(1-\lambda^2)}{1+\lambda^2} \\ y=\dfrac{2a\lambda}{1+\lambda^2} \end{cases}$$

其中 参数 $\lambda\triangleq\tan\theta$ 是过 $A(-a,0)$点的直线 AM 的斜率,M 是圆上的动点,此方程组是过 $A(-a,0)$点的直线束:$y=\lambda(x+a)$ 与圆:$x^2+y^2=a^2$ 的交点坐标,$A(-a,0)$点是 $\lambda\to+\infty$的极限情形.

圆 C 的参数方程(1.1.6)常用,它的参数方程的矢量形式是

$$C:\ \boldsymbol{r}(t)=\{a\cos t,\ a\sin t\}$$

其中 $0\leqslant t<2\pi$.

注 在(1.1.6)中,若定义域缩小,则(1.1.6)表示圆弧;若定

义域扩大,它还表示同一个圆;若定义域为$(0,2\pi)$,则它是简单曲线(开圆).

(4) 椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$$\Leftrightarrow \qquad C:\quad \boldsymbol{r}(t)=\{a\cos t,\ b\sin t\} \tag{1.1.9}$$

其中 $0\leqslant t<2\pi$. 同圆的参数方程相同,有多种形式.

(5) 双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

因为 $\sec^2 t-\tan^2 t=1$, $\csc^2 t-\cot^2 t=1$, $\mathrm{ch}^2 t-\mathrm{sh}^2 t=1$. 所以该双曲线可有以下三种常用的参数方程

$$C:\quad \boldsymbol{r}(t)=\{a\sec t,\ b\tan t\} \tag{1.1.10}$$

其中 $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi\right)$.

$$\Leftrightarrow \qquad C:\quad \boldsymbol{r}(t)=\{a\csc t,\ b\cot t\}$$

其中 $t\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$.

$$\Leftrightarrow \qquad C:\quad \boldsymbol{r}(t)=\{a\,\mathrm{ch}\, t,\ b\,\mathrm{sh}\, t\}$$

其中 $t\in\mathbf{R}$, $\mathrm{ch}\, t=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})$, $\mathrm{sh}\, t=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})$是双曲余弦和双曲正弦.

(6) 极坐标曲线 C: $\rho=\rho(\theta)$, $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$

$$\Leftrightarrow \quad C:\quad \boldsymbol{r}(t)=\{\rho(\theta)\cos\theta,\ \rho(\theta)\sin\theta\} \tag{1.1.11}$$

其中 $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$.

(7) 圆锥曲线:动点 M 到定点 F 之距与动点 M 到定直线 l 之距的比是定数 e,设焦点 F 到准线 l 之距为 p,我们知,圆锥曲线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta} \quad \text{或} \quad \rho=\frac{-ep}{1+e\cos\theta} \tag{1.1.12}$$

此方程可写成(1.1.11)形式的参数方程. 它也可以与直角坐标方程互化,从而得另一种形式的参数方程:

(i) 当 $e=1$ 时,得抛物线 C 的极坐标方程与直角坐标方

程及参数方程的互化，即

$$C:\quad \rho=\frac{p}{1-\cos\theta}\quad \text{或}\quad \rho=\frac{-p}{1+\cos\theta}$$

$$\Leftrightarrow\quad C:\quad y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad C:\quad \boldsymbol{r}(t)=\left\{-\frac{p}{2}+2pt^2,\ 2pt\right\}\tag{1.1.13}$$

其中 $t\in\mathbf{R}$，顶点的极坐标与直角坐标分别为$(\frac{p}{2},\pi)$和$(-\frac{p}{2},0)$，准线 l 的极坐标方程与直角坐标方程分别为

$$\rho\cos\theta+p=0;\quad x=-p$$

焦点 F 的极坐标与直角坐标都是$(0,0)$.

（ⅱ） 当 $e<1$ 时，令 $e=\frac{c}{a}$，$b^2=a^2-c^2$，又 $p=\frac{b^2}{c}$，我们得以左焦点 F_1 为极点的椭圆 C 的极坐标方程与直角坐标方程及参数方程的互化，即

$$C:\quad \rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}\quad \text{或}\quad \rho=\frac{-ep}{1+e\cos\theta}$$

$$\Leftrightarrow\quad C:\quad \frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\Leftrightarrow\quad C:\quad \boldsymbol{r}(t)=\{c+a\cos t,\quad b\sin t\}\tag{1.1.14}$$

其中 $0\leqslant t<2\pi$，各顶点、焦点、中心的极坐标及准线的极坐标方程分别为 $A_1(a-c,\pi)$，$A_2(a+c,0)$，$B_{1,2}(a,\mp\arccos\frac{a-ep}{ae})$，$F_1(0,0)$，$F_2(2c,0)$，$O(c,0)$，$\rho\cos\theta+p=0$，$\rho\cos\theta-p-2c=0$.
它们的直角坐标及方程分别为 $A_1(-(a-c),0)$，$A_2(a+c,0)$，$B_1(c,-b)$，$B_2(c,b)$，$F_1(0,0)$，$F_2(2c,0)$，$O(c,0)$；$x=-p$，$x=p+2c$.

（ⅲ） 当 $e>1$ 时，令 $e=\frac{c}{a}$，$b^2=c^2-a^2$，又 $p=\frac{b^2}{c}$，我们得以右焦点 F_2 为极点的双曲线 C 的极坐标方程与直角坐标方程及

参数方程的互化,即

$$C:\ \rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}(\text{右支}),\quad \rho=\frac{-ep}{1+e\cos\theta}(\text{左支})$$

$$\Leftrightarrow\quad C:\ \frac{(x+c)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\Leftrightarrow\quad C:\ \boldsymbol{r}(t)=\{-c+a\sec t,\ b\tan t\}\tag{1.1.15}$$

其中 $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$,顶点、焦点、中心、准线的极坐标或方程分别为 $A_1(c+a,\pi),A_2(c-a,\pi),F_1(2c,\pi),F_2(0,0)$, $O(c,\pi)$;$\rho\cos\theta+p+\frac{2a^2}{c}=0$, $\rho\cos\theta+p=0$. 它们的直角坐标及方程分别为 $A_1(-(c+a),0),A_2(-(c-a),0),F_1(-2c,0)$, $F_2(0,0),O(-c,0)$;$x=-p-\frac{2a^2}{c},x=-p$.

§1.2 空间曲线的参数方程及曲线的性质

我们知空间曲线 C 可以看成是两个曲面的交线,所以 C 的一般方程是方程组

$$C:\ \begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}$$

为了研究曲线在一点邻近的性质,我们使用曲线的参数方程较为方便.

1 空间曲线 C 的参数方程的三种等价形式

方程组

$$C:\ \begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}\quad(a\leqslant t\leqslant b)\tag{1.2.1}$$

是空间曲线 C 的参数方程的坐标形式,其中 $M(x,y,z)$是 C 上任一点. 它等价于

$$C: \quad \overrightarrow{OM} \triangleq \boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\} \tag{1.2.2}$$

其中 $a \leqslant t \leqslant b$,它是空间曲线 C 的参数方程的矢量形式,它是一元矢量函数.它还等价于下面的映射形式:

$$F: \quad [a,b] \to \mathbf{R}^3$$

$$F(t) = (\ x(t),\ y(t),\ z(t)\ ) \tag{1.2.3}$$

$F[a,b] \triangleq C$ 就是空间 $\mathbf{R}^3$ 中的曲线,有时称 F 为空间曲线.区间 $[a,b]$中的点 t_0 在 F 下的象$M(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \triangleq M(t_0)$ 是曲线 C 上的点,为了方便起见,称 t_0 为曲线 C 上的点,或者写为 $M(\boldsymbol{r}(t_0))$.

注 从(1.2.1)消去参数 t,便得空间曲线 C 的一般方程.

定义 1.2.1 若映射 $F: \ (a,b) \to F[(a,b)] \subseteq \mathbf{R}^3$

$$F(t) = (\ x(t),\ y(t),\ z(t)\ )$$

是一一对应的连续映射,则称 C 为空间简单曲线.

空间简单曲线定义在开区间(a,b)上,它的图象是 $\mathbf{R}^3$ 中不自交的连续曲线.

规定: 参数 t 增加的方向为曲线C 的正向.

注 参数方程不唯一:设

$$C: \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{1.2.4}$$

是以 t 为参数的空间曲线C 的矢量形式的方程,作单调变换

$$t = g(u), \qquad g'(u) > 0$$

且 $a = g(c), b = g(d)$,则 C 的新方程为

$$C: \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(g(u)) \triangleq \boldsymbol{r}(u) \tag{1.2.5}$$

其中 $c \leqslant u \leqslant d$.(1.2.4)和(1.2.5)都是同一曲线 C 的两种不同的参数方程,并且有相同的正向.

2 连续曲线

我们知,($\mathbf{R}^3$, +,数乘)是 3 维向量空间,两个向量的和等于对应分量相加,数乘向量等于数乘以每一个分量.

设

$$\boldsymbol{a}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k} \triangleq \{x_1,\ y_1,\ z_1\}$$

$$\boldsymbol{a}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k} \triangleq \{x_2, y_2, z_2\}$$

是 $\mathbf{R}^3$ 中的两个向量(矢量),$\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_2$ 的内积:

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) &\triangleq \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 \triangleq x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\ &= |\boldsymbol{a}_1| |\boldsymbol{a}_2| \cos\angle(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

$\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_2$ 的距离:

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) &\triangleq \sqrt{g(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2)} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

从而我们得一元矢量函数

$$\boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$$

的长度为

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{r}(t)| &= \sqrt{g(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}(t))} = d(\boldsymbol{r}(t), 0) \\ &= \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

定义 1.2.2 给定空间曲线

$$C: \quad \boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\} \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

设 $t_0 \in [a, b]$,若对任意给定的正数 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,当

$$d(t, t_0) = |t - t_0| < \delta \quad \text{时,有}$$

$$d(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}(t_0)) = |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)| < \varepsilon$$

则称曲线 C 在 t_0(或 $\boldsymbol{r}(t_0)$)点连续.若 C 在$[a, b]$上每一点连续,则称 C 为连续曲线.

由于

$$\begin{aligned} &|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)| \\ &= \sqrt{[x(t) - x(t_0)]^2 + [y(t) - y(t_0)]^2 + [z(t) - z(t_0)]^2} \end{aligned}$$

显然有

定理 1.2.3 空间曲线

$$C: \quad \boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\} \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

在 t_0 点连续的充要条件是三个一元分量函数 $x(t), y(t), z(t)$ 在 t_0 点连续.

曲线在 t_0 点连续写成极限形式是

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0)$$

即

$$\begin{aligned}&\lim_{t \to t_0}\{x(t), y(t), z(t)\} = \{x(t_0), y(t_0), z(t_0)\}\\ &= \{\lim_{t \to t_0} x(t), \lim_{t \to t_0} y(t), \lim_{t \to t_0} z(t)\}\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

由定义易得：若 $\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t), \lambda(t), \boldsymbol{r}(t)$ 都在 t_0 点连续，则 $\boldsymbol{r}_1(t) \pm \boldsymbol{r}_2(t), \lambda(t)\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}_1(t) \cdot \boldsymbol{r}_2(t), \boldsymbol{r}_1(t) \times \boldsymbol{r}_2(t)$ 仍在 t_0 点连续.

3 可微曲线

定义 1.2.4 给定空间曲线

$$C: \quad \boldsymbol{r}(t) = \{x(t),\ y(t),\ z(t)\} \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

曲线 C 在 t 点的导数定义为下面差商的极限：

$$\boldsymbol{r}'(t) \triangleq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)] \tag{1.2.10}$$

曲线 C 在 t 点可导，也称 C 在 t 点可微. $\boldsymbol{r}'(t)$ 是曲线 C 在 t 点的切矢量.

今后总假设曲线 C 有一阶的连续导数.

由于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta t}[\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)]\\ &= \left\{\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}\right\}\end{aligned}$$

显然有

定理 1.2.5 曲线 C: $\boldsymbol{r}(t) = \{x(t),\ y(t),\ z(t)\}$ 在 t 点可微的充要条件是 三个一元分量函数 $x(t), y(t), z(t)$ 在 t 点可微，并且有求导公式

$$\boldsymbol{r}'(t) = \{x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\} \tag{1.2.11}$$

易证下面的求导公式成立：

(ⅰ) $[\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)]'=\lambda'(t)\boldsymbol{r}(t)+\lambda(t)\boldsymbol{r}'(t)$

特别

$$[\lambda\,\boldsymbol{r}(t)]'=\lambda\,\boldsymbol{r}'(t)$$

(ⅱ) $[\boldsymbol{r}_1(t)\pm\boldsymbol{r}_2(t)]'=\boldsymbol{r}_1{}'(t)\pm\boldsymbol{r}_2{}'(t)$

(ⅲ) $[\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)]'=\boldsymbol{r}_1{}'(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)+\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}'_2(t)$

特别

$$[\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}(t)]'=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}'(t)$$

(ⅳ) $[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)]'=\boldsymbol{r}_1{}'(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)+\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2{}'(t)$

特别

$$[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}(t)]'=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}'(t)$$

(ⅴ) $(\boldsymbol{r}_1(t),\boldsymbol{r}_2(t),\boldsymbol{r}_3(t))'$

$$=(\boldsymbol{r}_1{}',\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)+(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2{}',\boldsymbol{r}_3)+(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3{}')$$

定理 1.2.6　设曲线 C：　$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$在 t 点可微，数量函数 $t=\varphi(u)$在 u 点可微，则复合函数

$$C:\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\varphi(u))\triangleq\boldsymbol{r}(u)$$

在 u 点可微，并且有求导公式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}=\boldsymbol{r}'(t)\varphi'(u) \tag{1.2.12}$$

证明　因为 $\varphi(u)$在 u 点可微，所以它在 u 点连续，从而当 $\Delta u\to0$时，有 $\Delta t=\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)\to0$.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(\varphi(u))}{\mathrm{d}u}=\lim_{\Delta u\to0}\frac{\mathbf{1}}{\Delta u}[\boldsymbol{r}(\varphi(u+\Delta u))-\boldsymbol{r}(\varphi(u))]$$

$$=\lim_{\Delta u\to0}\left[\frac{\boldsymbol{r}(\varphi(u+\Delta u))-\boldsymbol{r}(\varphi(u))}{\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)}\cdot\frac{\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)}{\Delta u}\right]$$

$$=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta u\to0}\frac{\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)}{\Delta u}$$

$$=\boldsymbol{r}'(t)\varphi'(u)$$ □

定义 1.2.7　给定空间曲线

$$C: \quad \boldsymbol{r}(t)=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\} \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

若 $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{0}$,则称 t_0 为 C 的正常点;若对任 $t \in [a,b]$,有 $\boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{0}$,则称 C 为正常曲线.

今后研究的曲线总是指正常曲线.

4 **可积曲线**

定义 1.2.8 给定空间曲线

$$C: \quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\} \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

若有另一条空间曲线 C_1: $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1(t)$,使

$$\boldsymbol{r}_1{}'(t)=\boldsymbol{r}(t)$$

则称 C_1 是 C 的一条积分曲线,$\boldsymbol{r}_1(t)$是 $\boldsymbol{r}(t)$的一个原函数,记作 $\int \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t$,$C$ 的所有积分曲线的径矢为

$$\int \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{c}$$

并且有定积分公式

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{r}_1(b)-\boldsymbol{r}_1(a) \tag{1.2.13}$$

由求导公式及定义 1.2.8,显然有

$$\int \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\left\{\int x(t)\mathrm{d}t,\int y(t)\mathrm{d}t,\int z(t)\mathrm{d}t\right\} \tag{1.2.14}$$

易证下面的积分公式成立:

(i) $\int \lambda\,\boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\lambda\int \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t$.

(ii) $\int [\boldsymbol{r}_1(t) \pm \boldsymbol{r}_2(t)]\mathrm{d}t=\int \boldsymbol{r}_1(t)\mathrm{d}t \pm \int \boldsymbol{r}_2(t)\mathrm{d}t$.

(iii) $\int [\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}(t)]\mathrm{d}t=\boldsymbol{a}\cdot\int \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t$.

(iv) $\int [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}(t)]\mathrm{d}t=\boldsymbol{a}\times\int \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t$.

只须验证右边的导数等于左边的被积函数便可.