

面向21世纪本科生教材

高等数学

教程

下册

宋开泰 黄象鼎 主编

武汉大学出版社

教育部高等学校数学基础课程教学指导委员会推荐教材

高等数学

教程

李心博 王书臣 王书臣

下册



清华大学出版社

面向 21 世纪本科生教材

高等数学教程

下 册

主编	宋开泰	黄象鼎
编者	宋开泰	黄象鼎
	朱方生	祁世桂
	杜乃林	

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教程·下册/宋开泰,黄象鼎主编. —武汉:武汉大学出版社,1999.4

面向 21 世纪本科生教材

ISBN 7-307-02718-6

I. 高… I. ①宋… ②黄… III. 高等数学—高等学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 01483 号

责任编辑:顾素萍 责任校对:杜 强 版式设计:支 笛

出版:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件: wdp4@whu.edu.cn 网址: www.wdp.whu.edu.cn)

发行:新华书店湖北发行所

印刷:湖北民政印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:24.25 字数:626 千字

版次:1999 年 4 月第 1 版 2001 年 9 月第 2 次印刷

ISBN 7-307-02718-6/O·201 定价:30.00 元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换。

前 言

教学内容的改革是教学改革的重点与难点,也是牵涉到方方面面的系统工程,任务十分艰巨。在原国家教委的关心与支持下,我们参加了“面向 21 世纪理科非数学类专业高等数学教学内容与课程体系的改革研究”项目组的工作。本套教材(共分上、下两册)是我们近几年来的主要工作成果。

鉴于形势的要求、历史的经验及目前的实际情况,我们认为,对待高等数学教学内容的改革,既要积极,又要稳妥。要掌握好改革的“程度”,并非易事。编写这套教材也只是一种尝试,姑且说是抛砖引玉吧。

本套教材是为综合性大学、师范大学及工科院校非数学类专业本科生所编。内容主要包括线性代数、一元微积分、解析几何、多元微积分、无穷级数(包括傅氏级数)以及常微分方程等。这些都是高等数学中的传统内容。究竟如何处理,才能提高学生的数学素质?我们的基本想法是:“一重视,三加强”。“一重视”是指重视基础理论。我们也看到,现代科学与技术的巨大发展的重要原因之一是数学的现代发展。毫无疑问,随着科学技术的进一步发展,所需的数学知识将越来越多、越来越深,可见,打好数学的基础是非常重要的。鉴于此,本套教材对实数的基本理论、连续函数闭区间上的性质、函数的可积性等方面的定理都给予了证明,并且以二元闭区域套定理的证明为例介绍实数的基本定理如何推广到二元乃至多元函数中去,并有意识地要读者学会与掌握“ ϵ - δ ”的语言与方法,为今后进一步学习打下良好基础。“三加强”是指:

1. 加强分析与代数、几何之间的联系。比如用代数中二次型

理论证明二元函数的极值存在判定定理,此证法既简明又便于推广到多元的情形。又比如将线性代数中化“Jordan 标准形”的方法应用到求解常微分方程组以及常微分方程定性理论中,使前后内容彼此呼应。为加强代数、几何的内容,我们介绍了微分几何的初步知识,应用向量分析的方法,简要介绍了空间曲线、空间曲面的基本内容,如弗雷耐活动标架,曲面的第一、第二基本形式等,在处理上体现了代数、分析、几何三者之间的有机结合。

2. 加强实际应用,特别注意与科学计算的联系。本课程的性质本来就与物理、几何存在广泛而深刻的联系。重要概念的引入几乎均与物理、几何等现象、概念有关,我们仍注意到这些特点;此外,为突出应用,我们介绍了解线性方程组的主元消去法,解非线性方程的迭代法,数据拟合的最小二乘法及解常微分方程初值问题的数值方法等;在常微分方法中,通过实例介绍如何从实际问题建立数学模型并求其解这一全过程,从而使读者对应用数学手段分析问题、解决问题有初步的认识。

3. 加强与现代分析数学的联系。本书作为数学基础课,它与后续课程乃至现代分析有着密切的联系。在讲述某些基本内容时,我们适度加以引申,这不仅加深了对原有内容的理解,而且使读者的视野更开阔。为弥补古典分析的缺点(比如二重积分中面积元 $dx dy$, 它们应表示微分 dx 与 dy 的乘积,但作变数替换 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 时, $dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$, 右边又显然不是微分 dx 与 dy 的乘积,如何解释?)我们增加了 $\mathbf{R}^n$ (特别是 $\mathbf{R}^3$) 中的(外)微分形式与外微分一节,并用微分形式的积分,完美地统一了牛顿-莱布尼兹公式、格林公式、高斯公式与斯托克斯公式。

此外,近代分析的某些重要概念,如凸性、紧性、不动点原理、按正交函数系展开等等,也切合时机地给予了介绍与引申。鉴于常微分方程中能够用初等积分表示解的方程太少,而定性理论的应用已深入到许多自然科学乃至社会科学领域,所以我们简略介绍了常微分方程的定性理论。与传统的教学内容相比较,本教材新增加了部分内容,有些作为正文,有些则打上“*”号,或者作为附录,

灵活性较大,便于在教学过程中酌情取舍。

本套教材内容原则上是当前教改中常说的数学第一平台的内容,至于第二平台的内容,我们将随后推出《近代数学概论》,以便进一步提高非数学类本科生的数学素质。

本套教材第 1,2,3,14,19,20,21,22 章由宋开泰编写;第 9,10,11,16,17,18 章由黄象鼎编写;第 12,13,15 章由祁世桂编写;第 23,24,25 章由朱方生编写;第 4,5,6,7,8 章由高宏编写;第 26,27 章由杜乃林编写。分工协作,互相审阅,最后由宋开泰订稿。编写过程中,我们参阅了国内外部分院校的有关教材,吸取了其中的经验。限于编者水平,错漏之处在所难免,诚望读者指正。

本教材从立项、编写到出版,一直得到武汉大学院系有关领导及武汉大学出版社的关心与支持,在此表示衷心的感谢。

编 者

1998.5

目 录

第 15 章 空间解析几何与向量代数	1
§ 15.1 空间直角坐标系	1
15.1.1 空间直角坐标系的概念	1
15.1.2 空间点的直角坐标	2
15.1.3 两点间的距离	3
15.1.4 线段的定比分点	4
§ 15.2 向量代数	6
15.2.1 向量概念	6
15.2.2 向量的加减法	7
15.2.3 向量与数的乘法	9
§ 15.3 向量的坐标	10
15.3.1 向量在轴上的投影	10
15.3.2 分向量与向量的坐标	12
15.3.3 向量的模与方向余弦	14
§ 15.4 向量的数量积、向量积、混合积	16
15.4.1 两向量的数量积	16
15.4.2 两向量的向量积	19
15.4.3 向量的混合积	23
§ 15.5 空间的直线与平面	26
15.5.1 平面的方程	27
15.5.2 两平面的相互关系	31
15.5.3 点到平面的距离	32
15.5.4 空间的直线方程	33

15.5.5	平面与直线间的关系、平面束	39
§ 15.6	几种常见的二次曲面	43
15.6.1	柱面、投影柱面	44
15.6.2	球面	47
15.6.3	锥面	48
15.6.4	旋转曲面	50
15.6.5	椭球面	51
15.6.6	双曲面	53
15.6.7	抛物面	55
§ 15.7	坐标轴的变换	59
15.7.1	坐标轴的平移	59
15.7.2	坐标轴的旋转	60
§ 15.8	曲面方程与曲线方程	63
15.8.1	曲面的一般方程与参数方程	63
15.8.2	曲线的一般方程与参数方程	65
15.8.3	曲线在坐标面上的投影	66
15.8.4	曲线的一般方程与参数方程的互化	67
第 16 章	多元函数微分学	71
§ 16.1	多元函数	71
16.1.1	平面点集	71
16.1.2	$\mathbf{R}^2$ 的几个基本定理	77
16.1.3	多元函数的基本概念	79
§ 16.2	多元函数的极限与连续性	83
16.2.1	多元函数的极限	83
16.2.2	多元函数的连续性	90
16.2.3	有界闭区域上连续函数的性质	93
§ 16.3	偏导数与全微分	95
16.3.1	偏导数及高阶偏导数的概念和计算	96
16.3.2	全微分	102
16.3.3	方向导数	113

§ 16.4	复合函数微分法	119
16.4.1	链锁法则	119
16.4.2	一阶全微分形式的不变性	127
16.4.3	高阶全微分	128
§ 16.5	隐函数存在定理与隐函数微分法	131
16.5.1	一个方程、一个自变量情形	132
16.5.2	一个方程、 $n(n \geq 2)$ 个自变量的情形	135
16.5.3	方程组的情形	137
16.5.4	变量代换	145
§ 16.6	多元函数微分学在几何中的应用	149
16.6.1	空间曲线的切线与法平面	149
16.6.2	曲面的切平面与法线	154
§ 16.7	多元函数极值	159
16.7.1	二元函数泰勒公式	159
16.7.2	多元函数极值的必要条件与充分条件	164
16.7.3	最小二乘法	170
16.7.4	条件极值、拉格朗日乘数法	173
第 17 章	重积分	179
§ 17.1	二重积分	179
17.1.1	二重积分的概念与性质	179
17.1.2	二重积分的计算	183
§ 17.2	三重积分	204
17.2.1	三重积分的概念	204
17.2.2	三重积分的计算	206
17.2.3	n 重积分	218
§ 17.3	重积分的应用	224
17.3.1	几何上的应用	224
17.3.2	物理中的应用	229
第 18 章	曲线积分与曲面积分	236
§ 18.1	曲线积分	236

18.1.1	第一型曲线积分的概念、性质及计算	236
18.1.2	第二型曲线积分的概念、性质及计算	243
18.1.3	两类曲线积分之间的联系	249
§ 18.2	格林公式、平面曲线积分与路径无关的条件	255
18.2.1	格林公式	255
18.2.2	平面曲线积分与路径无关的条件	262
§ 18.3	由面积分	267
18.3.1	第一型曲面积分的概念、性质及计算	268
18.3.2	第二型曲面积分的概念、性质及计算	271
§ 18.4	高斯公式、斯托克斯公式	281
18.4.1	高斯公式	281
18.4.2	斯托克斯公式	287
18.4.3	空间曲线积分与路径无关的条件	291
* § 18.5	微分形式简介	294
18.5.1	外积	294
18.5.2	外微分	300
18.5.3	牛顿-莱布尼兹公式的一般化	304
第 19 章	向量分析、场论与微分几何初步	309
§ 19.1	向量值函数的分析性质	309
19.1.1	向量值函数的极限与连续	309
19.1.2	向量值函数的导数与积分	311
§ 19.2	数量场与向量场	316
19.2.1	数量场的等值面与梯度	317
19.2.2	算符 ∇ 的介绍	320
19.2.3	向量场的向量线	321
19.2.4	向量场的通量与散度	322
19.2.5	向量场的环量与旋度	327
19.2.6	保守场等几个重要的向量场	333
19.2.7	在正交曲线坐标系中 $\nabla\Phi, \nabla \cdot F, \nabla \times F$ 的表达式	336
* § 19.3	空间曲线的基本知识	341

19.3.1	预备知识	341
19.3.2	曲线的弧长与活动标架	343
19.3.3	曲线的曲率、挠率与弗雷耐公式	352
* § 19.4	空间曲面的基本知识	360
19.4.1	曲面的表示、参数变换、切平面	360
19.4.2	曲面的第一基本形式	365
19.4.3	曲面的法曲率、曲面的第二基本形式	369
第 20 章	无穷级数	376
§ 20.1	数项级数	376
20.1.1	基本概念	376
20.1.2	收敛级数的性质	379
20.1.3	哥西收敛准则	382
20.1.4	正项级数的收敛判别法	384
20.1.5	任意项级数的收敛判别法	392
20.1.6	绝对收敛与条件收敛	398
§ 20.2	函数项级数	408
20.2.1	函数项级数的一致收敛	409
20.2.2	一致收敛级数的分析性质	418
§ 20.3	幂级数	424
20.3.1	幂级数的收敛半径	425
20.3.2	收敛半径的求法	428
20.3.3	幂级数的分析性质	431
§ 20.4	泰勒级数	436
20.4.1	泰勒级数的概念及性质	437
20.4.2	初等函数的泰勒展开式	440
20.4.3	幂级数的某些应用	447
第 21 章	含参变量的积分	452
§ 21.1	含参变量的常义积分	453
21.1.1	积分限固定的情形	453
21.1.2	积分限变动的情形	458

§ 21.2 含参变量的广义积分	160
21.2.1 一致收敛的概念	460
21.2.2 一致收敛的判别法	462
21.2.3 一致收敛的含参变量的广义积分的性质	465
21.2.4 Γ -函数与 B -函数(欧拉积分)	470
21.2.5 几个重要的例子	476
第 22 章 傅立叶级数	480
§ 22.1 傅立叶级数	480
22.1.1 三角函数系的正交性	481
22.1.2 以 T 为周期的函数的傅立叶级数	483
22.1.3 傅立叶级数的收敛性	486
22.1.4 奇、偶函数的傅立叶级数	493
22.1.5 有限区间上的函数的傅立叶级数	495
22.1.6 将函数展为正弦级数与余弦级数	500
§ 22.2 复数形式的傅立叶级数	507
22.2.1 复数形式的傅氏级数	507
22.2.2 频谱分析	511
§ 22.3 平均平方误差	516
22.3.1 平均平方误差	516
22.3.2 帕斯瓦尔(Parseval)等式	520
第 23 章 一阶常微分方程	528
§ 23.1 微分方程的基本概念	528
23.1.1 微分方程	528
23.1.2 微分方程的解	530
§ 23.2 一阶微分方程	533
23.2.1 可分离变量的一阶方程	533
23.2.2 可化为变量分离方程的一阶方程	535
§ 23.3 一阶线性微分方程	539
23.3.1 一阶线性微分方程的概念	539
23.3.2 伯努利(Bernoulli)方程	542

§ 23.4	全微分方程	543
23.4.1	全微分方程的基本概念	543
23.4.2	积分因子法	545
§ 23.5	一阶微分方程解的存在惟一性定理	548
23.5.1	存在惟一性定理	549
23.5.2	逐次逼近法与误差估计	555
§ 23.6	一阶隐微分方程	557
23.6.1	可就 y 或 x 解出的方程	557
23.6.2	不显含 y 或 x 的方程	560
23.6.3	奇解	562
§ 23.7	一阶微分方程应用举例	565
第 24 章	高阶常微分方程	569
§ 24.1	几类特殊的高阶方程	570
24.1.1	类型 $y^{(n)} = f(x)$	570
24.1.2	类型 $F(x, y^{(n)}) = 0$	571
24.1.3	类型 $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$	571
24.1.4	类型 $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$	572
§ 24.2	n 阶线性常微分方程	574
24.2.1	基本概念	574
24.2.2	n 阶齐次线性方程解的结构	576
24.2.3	n 阶非齐次线性方程的通解	582
24.2.4	降阶法和常数变易法	583
§ 24.3	高阶常系数线性微分方程	587
24.3.1	二阶常系数齐次线性方程	588
24.3.2	二阶常系数非齐次线性方程	591
24.3.3	n 阶常系数线性方程	596
24.3.4	欧拉方程	601
§ 24.4	应用举例	604
§ 24.5	微分方程的幂级数解法	613
24.5.1	概述	613

24.5.2	常点的情形	616
24.5.3	正则奇点的情形	618
第 25 章	常微分方程组	623
§ 25.1	标准方程组	623
25.1.1	标准方程组的概念	623
25.1.2	标准方程组的向量形式与存在惟一性定理	625
25.1.3	首次积分	627
§ 25.2	线性微分方程组的一般理论	633
25.2.1	齐次线性微分方程组解的结构	635
25.2.2	基本解矩阵	639
25.2.3	非齐次线性方程组解的结构	640
§ 25.3	常系数线性微分方程组	644
25.3.1	常系数齐次线性方程组的求解	644
25.3.2	常系数非齐次线性方程组的求解	655
附录 1	常系数非齐次线性微分方程的算子解法	657
1.1	常系数非齐次线性微分方程	657
1.2	常系数非齐次线性微分方程组	665
附录 2	常微分方程的数值解法	668
2.1	欧拉方法与单步方法的基本概念	668
2.2	龙格-库塔(Runge-Kutta)方法	671
第 26 章	一阶偏微分方程	677
§ 26.1	偏微分方程的基本概念	677
26.1.1	概念和记号	677
26.1.2	与常微分方程的比较	678
§ 26.2	一阶线性及拟线性偏微分方程	680
26.2.1	特征线	680
26.2.2	哥西问题	683
26.2.3	线性及拟线性偏微分方程的通解	686

§ 26.3 法夫(Pfaff)方程	689
第 27 章 定性理论基础简介	698
§ 27.1 自治系统、相空间与轨线	698
§ 27.2 二维自治系统的平衡点	700
27.2.1 线性系统的初等奇点	701
27.2.2 非线性系统的初等奇点	707
§ 27.3 二维自治系统的极限环	708
§ 27.4 自治系统平衡点的稳定性	713
27.4.1 稳定性定义	714
27.4.2 据线性近似系统判断稳定性	715
27.4.3 李雅普诺夫(Liapunov)直接法	718
习题答案	721
参考书目	757

第 15 章 空间解析几何与向量代数

空间解析几何是用代数的方法研究空间几何图形的科学,其基本思想是:首先建立坐标系,用有序实数组表示点的位置,然后用代数方程表示几何图形.由于向量理论对于研究几何提供了一个十分有利的工具,因此在本章 § 15.1 节介绍了空间直角坐标系以后,紧接着介绍向量的概念、向量的坐标、向量代数运算及其基本性质,这些知识称为**向量代数**,本章 § 15.2~§ 15.4 给予介绍.

§ 15.1 空间直角坐标系

15.1.1 空间直角坐标系

在空间中任选取一定点 O , 过点 O 引三条互相垂直的直线 Ox, Oy, Oz , 并在各直线上取定正向, 再取定长度单位, 这样就确定了一个空间直角坐标系 $Oxyz$ (图 15-1).

点 O 称为坐标原点, Ox 轴、 Oy 轴、 Oz 轴分别称为**横轴**、**纵轴**和**竖轴**, 统称为**坐标轴**, 通过每两个坐标轴的平面, 分别称为 xy 平面、 yz 平面和 zx 平面. 三个坐标面把整个空间分成了 8 个部分, 每一个部分称为一个**卦限**

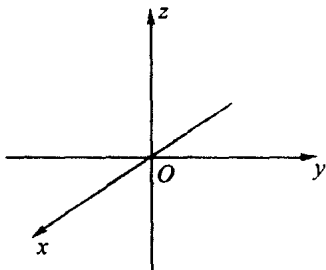


图 15-1