科学版

大学数学习题精解系列

数学分析习题精解

（单变量部分）

吴良森　毛羽辉
宋国栋　魏木生　编著

- 课程学习与考研复习的理想读物
- 内容涉及单变量微积分和级数
- 通过典型例题教授解题技巧
- 习题中收录了研究生入学试题

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学习题精解系列

数学分析习题精解

（单变量部分）

吴良森　毛羽辉
宋国栋　魏木生　编著

上海市重点项目建设基金资助

科学出版社

2002

内 容 简 介

本书主要通过典型例题陈述数学分析中典型解题方法和技巧，内容涉及单变量微积分和级数．全书按章、节编排，每节包括内容精析、典型例题和习题三部分，书后附有习题解答与提示．

本书适合理工科大学、师范院校数学系学生学习和参考．

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题精解．单变量部分/吴良森等编著．－北京：科学出版社，2002

(大学数学习题精解系列)

ISBN 7-03-009789-0

Ⅰ．数…　Ⅱ．吴…　Ⅲ．数学分析-解题　Ⅳ．O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 064163 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100717

http //www sciencep com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

2002年2月第　一　版　　开本 B5(720×1000)

2002年2月第一次印刷　　印张 26 1/4

印数：1—5 000　　字数：520 000

定价：29.00 元

前　　言

在数学分析课程中，习题演算占有重要地位，综合性大学和师范院校数学系一般专门设立数学分析习题课以提高学生计算和证明的能力.

本书内容涉及单变量微积分和级数，按章、节排列，每节包括内容精析、典型例题、习题三部分. 内容精析介绍与该节相关理论的基本命题和重要结论，以及教学中的经验和体会，有助于读者理解基本理论；典型例题通过一系列例题，由浅入深地介绍数学分析的典型解题方法，同时在解题过程中叙述解题的思路和技巧；习题与该节内容相配，使读者通过练习达到举一反三、熟练应用所学内容的目的. 最后附有习题解答与提示，有些难题给出较详细的解答，供读者参考，希望读者坚持先做后看的原则，这样收效较大.

本书主要是通过典型例题陈述数学分析中典型解题方法和技巧. 选题是以中等以上难度的题目为主；内容的章节安排与一般教科书不全相同，其中设有一些专题，对某些重要内容进行较为深入、细致的讨论；除了微积分本身丰富的应用之外，结合生活实际适当选入了一些应用实例.

例题和习题中选入一部分理工科大学、师范院校研究生入学试题，希望对投考研究生的读者有一定的参考价值.

最后附上二套测试题，内容具有研究生入学试题的相当水平，通过这些试题，读者可以检验自己掌握有关内容的程度.

例题和习题中带 * 号的题目是具有较高难度的，认真钻研这些题目，读者会在分析技巧方面得到不少收益.

本书第一、二、三、四、五章由宋国栋编写，第六、七章由魏木生编写，第八、九章由毛羽辉编写，第十、十一、十二、十三章由吴良森编写. 全书由吴良森统一整理.

由于编者经验和水平所限，难免出现错误缺点，恳请批评指正.

编　者

2001 年 10 月

目　　录

第一章　不等式·函数概念

§1.1　不等式

一、内容精析

不等式的重要性可简述如下：在数学分析课程中，许多定理和公式的证明常要运用不等式来解决；反之，通过数学分析中某些定理和公式（如拉格朗日(Lagrange)中值公式等），又可导出新的不等式；一些重要的不等式是从事数学研究的基本工具；最后，许多不等式的证明本身也各具有典型的分析技巧，富有启发性.

作为本书的开端，我们在这一节中将主要给出如下的不等式：

1°　绝对值不等式　设 a,b 为任意实数，则有

$$\begin{aligned}||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|,\\ ||a|-|b||\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|.\end{aligned}\tag{A}$$

另外，不等式 $|x|<h\ (h>0)$ 等价于不等式

$$-h<x<h.$$

不等式(A)的证明见诸于各种数学分析教程，这里从略.

2°　伯努利(Bernoulli)不等式　设 $h>-1, n\in\mathbf{N}^+, n\geqslant2$，则有

$$(1+h)^n\geqslant1+nh,\tag{B}$$

其中等号当且仅当 $h=0$ 时成立.

3°　柯西(Cauchy)不等式　设 $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$ 为两组实数，则有

$$\Big(\sum_{i=1}^n x_iy_i\Big)^2\leqslant\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big).\tag{C}$$

4°　算术平均值-几何平均值不等式(简称平均值不等式)　设 $x_1,\cdots,x_n$ 为 n 个非负实数，则有

$$(x_1\cdots x_n)^{\frac1n}\leqslant\frac1n(x_1+\cdots+x_n),\tag{G}$$

其中等号当且仅当所有 x_i 都相等时成立.

注　由于当某个 $x_i=0$ 时，不等式(G)显然成立，故可假设 $x_1,\cdots,x_n$ 皆

为正数;在以下的赫尔德(Hölder)不等式中也是如此.

5°　赫尔德不等式　设$\{x_i\}_1^n$,$\{y_i\}_1^n$为两组非负实数,又实数p,q满足

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

则当$p>1$时有

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{\frac{1}{q}},\tag{H}$$

当$p<1$时上述不等式反向.

二、典型例题

例 1　设实数a,b满足$|a|<1,|b|<1$.证明不等式

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1.\tag{1}$$

证　不等式(1)等价于

$$-1<\frac{a+b}{1+ab}<1,$$

即同时成立

$$1-\frac{a+b}{1+ab}>0\text{ 与 }1+\frac{a+b}{1+ab}>0.$$

由条件$|a|<1,|b|<1$,易见$1+ab>0$,故上述两不等式分别等价于

$$1+ab-a-b>0\text{ 与 }1+ab+a+b>0,$$

即$(1-a)(1-b)>0$与$(1+a)(1+b)>0$,而这两式显然成立.　□

例 2　证明伯努利不等式(B).

证　当$h=0$时显然等号成立.现设$h\neq0$,对$n\geqslant2$,当$h>0$时有

$$(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n>1+nh;$$

当$-1<h<0$时有

$$\begin{aligned}(1+h)^n-1&=(1+h-1)[1+(1+h)+(1+h)^2+\cdots+(1+h)^{n-1}]\\&=h[1+(1+h)+(1+h)^2+\cdots+(1+h)^{n-1}]\\&>nh\end{aligned}$$

(注意上式方括号中的表达式$<n$,且$h<0$).　□

例 3 证明柯西不等式(C).

我们对此重要不等式给出两种证明方法.

证一 不妨设 $x_1,\cdots,x_n$ 不全为 0. 考虑关于 λ 的二次三项式

$$0\leqslant \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i-y_i)^2=\lambda^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\lambda\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2,$$

上式右边关于任何实数 λ 为非负,故其判别式$\leqslant 0$,即有

$$\left(2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2-4\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\leqslant 0\Rightarrow(\mathrm{C}).$$

证二 由等式

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}\right)^2=1=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}}\right)^2$$

得到

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}\right)^2+\left(\frac{y_i}{\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}}\right)^2\right]=2.$$

由不等式 $x^2+y^2\geqslant 2|xy|$ 可见,上述和式方括号中每两项之和不小于

$$\frac{2|x_iy_i|}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)}}\Rightarrow\frac{2\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)}}\leqslant 2\Rightarrow(\mathrm{C}).\qquad\square$$

注 可以证明:柯西不等式(C)中等号成立的充要条件是数组 $\{x_i\}_1^n$ 与 $\{y_i\}_1^n$ 对应成比例,即存在不全为 0 的数 λ 与 μ,使得

$$\lambda x_i+\mu y_i=0,\quad i=1,\cdots,n.$$

例 4 证明平均值不等式(G).

证 易知对任何非负实数 x_1,x_2 有

$$(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+x_2),$$

其中等号当且仅当 $x_1=x_2$ 时成立. 由此推出,对 4 个非负实数 x_1,x_2,x_3,x_4 有

$$\begin{aligned}(x_1x_2x_3x_4)^{\frac{1}{4}}&=[(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}(x_3x_4)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\left(\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4).$$

按此方法继续下去,可推出不等式(G)对一切 $n = 2^k(k = 0,1,2,\cdots)$都成立.为证其对一切正整数 n 都成立,我们采用所谓的**反向归纳法**,即证明:若(G)对某个 $n(\geqslant 2)$成立,则它对 $n-1$ 也成立.

设给定非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$,令

$$x_n = \frac{1}{n-1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}),$$

则有

$$\begin{aligned}&(x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}} \\ \leqslant\ & \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right),\end{aligned}$$

整理后得

$$(x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leqslant \frac{1}{n-1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}),$$

即不等式(G)对 $n-1$ 成立,从而对一切 $n \in \boldsymbol{N}^+$ 都成立.关于等号成立的充要条件也能归纳地得到.　□

例 5　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个正数,满足

$$x_1 x_2 \cdots x_n = 1.$$

证明

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant n,$$

其中等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ 时成立.

证　当 $n = 1$ 时,命题是平凡的;当 $n = 2$ 时也易证其成立.现设此命题关于 $n(\geqslant 3)$成立,又设 $n+1$ 个正数 $x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}$ 满足

$$x_1 \cdots x_n x_{n+1} = 1.$$

若所有 $x_i = 1$,则结论已得.故不妨设 $x_1 > 1, x_2 < 1$,则有

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0,$$

即

$$x_1 x_2 + 1 < x_1 + x_2,$$

从而得

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n+1}>1+x_1x_2+x_3+\cdots+x_{n+1}.$$

对 n 个正数 $x_1x_2,x_3,\cdots,x_n,x_{n+1}$ 应用归纳假设，得上式右边 $>1+n$，故有

$$x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}\geqslant n+1,$$

即命题对 $n+1$ 也成立(同时得到了关于等号成立的充要条件). □

注 利用本例的结论，可给出平均值不等式(G)的另一种证明(习题 8).

例 6 设 a,b 为正数，实数 p,q 满足

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

证明不等式

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{a}{p}+\frac{b}{q},\quad p>1,\tag{2}$$

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\geqslant\frac{a}{p}+\frac{b}{q},\quad p<1,\tag{3}$$

以上两不等式中的等号当且仅当 $a=b$ 时成立.

证 为证明不等式(2)和(3)，我们需要以下的不等式：对 $x>0$ 有

$$x^{\alpha}-\alpha x+\alpha-1\geqslant 0\quad(\alpha>1\text{ 或 }\alpha<0),\tag{4}$$

$$x^{\alpha}-\alpha x+\alpha-1\leqslant 0\quad(0<\alpha<1),\tag{5}$$

其中等号当且仅当 $x=1$ 时成立. 不等式(4)和(5)的证明见第七章§7.4.

在不等式(4)与(5)中令 $\alpha=\frac{1}{p}$，$1-\alpha=\frac{1}{q}$，并以 $\frac{a}{b}$ 代替 x，即可导出所要证的不等式(2)与(3)，其推导细节留给读者. □

例 7 证明赫尔德不等式(H).

证 在不等式(2)中分别令

$$a_i=\frac{x_i^p}{A},\quad b_i=\frac{y_i^q}{B},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

其中

$$A=\sum_{i=1}^{n}x_i^p,\quad B=\sum_{i=1}^{n}y_i^q,$$

则当 $p>1$ 时有

$$\frac{x_iy_i}{A^{\frac{1}{p}}\cdot B^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{x_i^p}{pA}+\frac{y_i^q}{qB},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

从而得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i &\leqslant A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p}{A} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q}{B} \right) \\ &= A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^q \Big)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

类似地证明当 $p<1$ 时的反向不等式. □

例 8(加权平均值不等式) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个正数, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ 的正数,则有

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \tag{W}$$

其中等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立.

注 当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$ 时,不等式(W)即为平均值不等式(G).

证 当 $n=1$ 时,不等式(W)是平凡的. 当 $n=2$ 时,给定正数 x_1, x_2 及 α $(0<\alpha<1)$. 以 $x=\dfrac{x_1}{x_2}$ 代入(5)式得

$$\left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{\alpha} - \alpha \frac{x_1}{x_2} + \alpha - 1 \leqslant 0,$$

整理后得

$$x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \leqslant \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2,$$

其中等号当且仅当 $\dfrac{x_1}{x_2} = 1$ 即 $x_1 = x_2$ 时成立. 这就对 $n=2$ 证明了不等式(W).

设不等式(W)关于正整数 k 成立($k \geqslant 2$).

现设有 $k+1$ 个正整数 $x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}$,又正数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k+1}$ 满足

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1.$$

令

$$y_i = x_i, \quad \beta_i = \alpha_i, \quad i = 1,2,\cdots,k-1,$$

$$y_k = x_k^{\alpha_k/\beta_k} \cdot x_{k+1}^{\alpha_{k+1}/\beta_k}, \quad \beta_k = \alpha_k + \alpha_{k+1},$$

则 $y_i > 0, \beta_i > 0$ 且 $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1$. 故由归纳假设得

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k+1} x_i^{\alpha_i} &= \prod_{i=1}^{k} y_i^{\beta_i} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \beta_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i + (\alpha_k + \alpha_{k+1}) x_k^{\alpha_k/\beta_k} \cdot x_{k+1}^{\alpha_{k+1}/\beta_k} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i,\end{aligned}$$

即不等式(W)关于 $k+1$ 也成立,且易见其等号当且仅当所有 x_i 都相等时成立. □

三、习题

1. 设 $a<c<b$. 证明 $|c| \leqslant \max\{|a|, |b|\}$.

2. 证明:对任何实数 a, b 成立不等式

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

3. 证明:对任何实数 a, b 成立不等式

1) $\frac{1}{2}(|a|+|b|) \leqslant \max\{|a|, |b|\} \leqslant \frac{1}{2}(|a+b|+|a-b|)$;

2) $\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} \geqslant \frac{1}{2}$.

4. 设 $x \geqslant 0, n \in \mathbf{N}^+$,证明不等式

$$x^n - nx + n - 1 \geqslant 0,$$

并讨论等号成立的充要条件.

注 此不等式是不等式(4)当 $\alpha = n$ 时的特殊情形,可容易地用初等方法来证明.

5. 设 α, β 满足 $|\beta|<1$ 及 $\frac{\beta}{1-|\beta|} \leqslant \alpha$. 证明

$$\beta \leqslant \frac{\alpha}{1+|\alpha|}.$$

6. 设 $a_i > -1$, $i = 1, 2, \cdots, n$,且所有 a_i 同号,证明不等式

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

7. 设 $a>0, a+b>0, n \in \mathbf{N}^+ (n \geqslant 2)$. 证明不等式

$$(a+b)^n \geqslant a^n + na^{n-1}b,$$

其中等号当且仅当 $b=0$ 时成立.

8. 利用例 5 中的结论给出平均值不等式(G)的另一种证明.

9. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为不全相等的实数. 证明

$$n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)^2>0.$$

注　此不等式在求解最小二乘法问题中是有用的.

10. 设 $n\in\boldsymbol{N}^+$，证明以下不等式:

1) $n!\leqslant\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$;　　2) $n!<\left(\dfrac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n$;

3) $\sqrt[n]{n!}>\dfrac{n}{3}$;　　4) $\sqrt[n]{n}<1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

11. 设 $n\in\boldsymbol{N}^+$，$\alpha\in\boldsymbol{R}$，证明不等式

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}k^\alpha\Big)^n\geqslant n^n(n!)^\alpha.$$

12. 证明**几何平均值-调和平均值不等式**

$$\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n},$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为正数.

13. 证明不等式:

1) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$,　$n=1,2,\cdots$;

2) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n$,　$n=2,3,\cdots$.

14. 证明不等式

$$\frac{1}{4n}<\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^2<\frac{1}{2n},\quad n\geqslant2.$$

*15. 证明**闵可夫斯基(Minkowski)不等式**:设 $\{x_i\}_1^n$，$\{y_i\}_1^n$ 为两组非负实数，则当 $p>1$时有

$$\Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\Big]^{\frac{1}{p}}\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\Big)^{\frac{1}{p}},\tag{M}$$

当 $p<1$ 时不等式(M)反向.

§1.2　函数概念

一、内容精析

1°　关于函数概念，在中学课程中已初步熟悉函数的两个要素——对应法则 f 和定义域 D，通常将函数记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

函数 f 的值域记为

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

于是,函数 f 是点集 D 到 $f(D)$ 的**单值对应**,也称为 D 到 $f(D)$ 的**映射**.

2° 对于函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性等特性应有进一步的认识,并能按相应的定义(或定义的否定说法)来判断所论及的函数是否具有某种特性.

3° 应熟悉各类基本初等函数的主要性质,掌握初等函数的概念.同时,还应熟悉一些重要的非初等函数,如

符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$,

取整函数 $y=[x]$,

狄利克雷(Dirichlet)函数 $D(x)$,

黎曼(Riemann)函数 $R(x)$.

初等函数与上述重要的非初等函数是函数研究中的基本素材.

4° 函数概念是从数量关系上反映客观事物运动变化的规律.因此,为了运用数学理论解决实际问题,应对于该问题建立数学模型,表示出有关变量之间的函数关系.这也是函数研究中的一个重要方面.

二、典型例题

例 1 讨论分别符合以下要求的函数是否存在:

1) 定义域为 $\{0,1\}$,值域为 $\{1,2,3\}$;

2) 定义域为 $\{1,2,3\}$,值域为 $\{0,1\}$;

3) 定义域为 $\boldsymbol{R}$,值域为 $\{0\}$;

4) 定义域为 $[0,1]$,值域为 $[0,2]$.

解 1) 根据函数的定义,在定义域中的每一个数,都惟一地对应值域中的一个数.现定义域只含两个数,而"值域"由 3 个数组成,因此,对于无论何种对应法则,"值域"中至少有一个数没有原像.所以,这样的函数不存在.

2) 存在.例如可取对应法则 f 为

$$f(1) = 0, \quad f(2) = f(3) = 1.$$

3) 对应法则 f 为常量函数 $f(x)=0$, $x\in \boldsymbol{R}$.

4) 尽管值域 $[0,2]$ 中的数比定义域 $[0,1]$ 中的数"多",但我们可取对应法则 f 使定义域 $[0,1]$"伸长"为 $[0,2]$.例如,可令 $f(x)=2x, x\in[0,1]$. □

注 1 若函数的定义域为有限集,则其值域必为有限集,且值域的元素个数不超过定义域的元素个数;若定义域为无限集,则值域可以是无限集,也可以是有限集,甚至值域可以包含定义域(如本例 4)).

注 2 确定在同一定义域、同一值域上的函数,有时是惟一的,如本例 3);

但一般不是惟一的,如本例 2)和 4).

例 2　设 f 与 g 为具有相同定义域 D 的初等函数.试问以下函数是初等函数吗?

1) $F(x)=|f(x)-g(x)|, x\in D$;

2) $G(x)=\max\{f(x), g(x)\}, x\in D$.

分析　初等函数是由基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合而得到的函数.本例中已知 f 与 g 是这样的函数,因此,若能将 F 和 G 分别表示为 f 与 g 的有限次四则运算和有限次复合的形式,则它们就是初等函数.

解　1) $F(x)=\{[f(x)-g(x)]^2\}^{\frac{1}{2}}\Rightarrow F$ 是初等函数.

2) 利用如下的一个简单结论:

$$\max\{a, b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$$

可知 $G(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]\Rightarrow G$ 是初等函数.　□

注 1　在同样的条件下,类似地可证

$$H(x)=\min\{f(x), g(x)\}$$

为初等函数.

注 2　由于初等函数在其定义区间内都是连续的(见第五章),故若某函数在定义区间内不连续,则它就不是初等函数.由此可知,符号函数 $\operatorname{sgn}x$,取整函数 $y=[x]$,狄利克雷函数 $D(x)$和黎曼函数 $R(x)$都不是初等函数.

例 3　根据国家财政部的规定,个人月薪的“应纳税所得额”是指每月薪金收入额减去 1000 元之后的余额,应纳所得税额按逐级累进的税率来计算,详见下表:

级数	月应纳税所得额 s(元)	税率(%)
1	$s\leqslant 500$	5
2	$500<s\leqslant 2000$	10
3	$2000<s\leqslant 5000$	15
4	$5000<s\leqslant 20000$	20
5	$20000<s\leqslant 40000$	25
6	$40000<s\leqslant 60000$	30
7	$60000<s\leqslant 80000$	35
8	$80000<s\leqslant 100000$	40
9	$s>100000$	45

设某单位职工月薪收入 x(元)的范围为 $600\leqslant x\leqslant 21000$. 求月薪的应纳所得税款 T 与 x 之间的函数关系.

分析 按规定,月薪为 1000 元及以下者,不必纳税;月薪 x 在 1000 至 1500 之间者,应纳税款为

$$T = 0.05(x-1000);$$

月薪 x 在 1500 至 3000 之间者,其中 1000 元的部分不纳税,1000 至 1500 元之间的部分应纳税款为 $0.05(1500-1000)=25$,超过 1500 的部分,应纳税款为 $0.1(x-1500)$,故此时有

$$T = 0.1(x-1500)+25;$$

以此类推,即可得到 T 与 x 之间的函数关系.

解

$$T=\begin{cases} 0, & 600\leqslant x\leqslant 1000 \\ 0.05(x-1000), & 1000< x\leqslant 1500 \\ 0.1(x-1500)+25, & 1500< x\leqslant 3000 \\ 0.15(x-3000)+175, & 3000< x\leqslant 6000 \\ 0.2(x-6000)+625, & 6000< x\leqslant 21000. \end{cases}$$ □

注 本例中得到的函数称为**分段函数**. 这类函数无论在理论研究还是实际应用上,都起到重要的作用. 以后在讨论函数的连续性与可导性时,对分段函数的"分段"关节点,都应特别考虑.

例 4 写出分别满足下列要求的函数的一个表达式:

1) 定义域为 $\boldsymbol{R}$,值域为 $\{-1,0,1\}$ 的递减奇函数;

2) 定义在闭区间 $[0,1]$ 上的无上界函数;

3) 定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的非常数周期函数,但它无最小正周期;

4) 定义在 $[0,1]$ 上的函数,它有反函数,但它在 $[0,1]$ 的任一子区间上都不是单调函数.

分析 1) 由奇函数的定义应有 $f(0)=0$,f 还应取另外两个值 -1 和 1,结合递减性,可令

$$f(x)=1,\quad x<0 \text{ 及 } f(x)=-1,\quad x>0.$$

2) 容易考虑到 $(0,1]$ 上的无上界函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,然后再规定 f 在点 $x=0$ 处的值即可.

4) 容易验证定义在 $[0,1]$ 上的狄利克雷函数