实用量子力学

下册

〔德〕S. 福里格 著

宋孝同 高琴 梁仙翠 译

高等教育出版社

实用量子力学

下　册

〔德〕S. 福里格　著
宋孝同　高琴　梁仙翠　译

高等教育出版社
1983

内 容 简 介

本书根据福里格 (S. Flügge) 所著«Practical Quantum Mechanics» 1974 年英文本译出. 原书分两卷(合订为一册)出版. 中译本分上、下两册出版. 上册即原书第一卷, 内容包括两部分: I. 一般概念, II. 无自旋的单体问题, 共128 个问题. 下册即原书第二卷, 包括五部分: III. 具有自旋的粒子, IV. 多体问题, V. 非定态问题, VI. 相对论狄拉克方程, VII. 辐射理论, 共 91 个问题. 全部问题都作了详细解答.

本书上册问题 1—66, 94—128 为宋孝同译, 67—93 为高琴译. 下册 III、IV 两部分为梁仙翠译, V 为高琴译, VI、VII 及数学附录为宋孝同译.

本书可供我国高等学校物理专业高年级学生、研究生以及其他有关专业的教师和科研工作者参考.

S. Flügge

Practical Quantum Mechanics

Springer-Verlag 1974

实 用 量 子 力 学

下 册

〔德〕S.福里格 著

宋孝同 高琴 梁仙翠 译

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
山东新华印刷厂潍坊厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10 字数 239,000
1983 年 1 月第 1 版 1984 年 4 月第 1 次印刷
印数 00,001—8,500

书号 13010·0847 定价 1.55 元

第II卷 目　　录

III. 有自旋的粒子

A. 单体问题 ……1

129. 泡利矩阵的建立 ……1
130. 泡利矩阵的本征态 ……3
131. 自旋代数 ……6
132. 旋量变换性质 ……8
133. 有心力场中的自旋电子 ……10
134. 自旋态的四极矩 ……14
135. 磁矩的期待值 ……16
136. 精细结构 ……19
137. 自旋1/2粒子的平面波 ……21
138. 自由电子的自旋共振 ……24

B. 两体和三体问题 ……26

139. 两粒子的自旋函数 ……26
140. 核子之间与自旋有关的有心力 ……29
141. 自旋算符的幂 ……31
142. 两个自旋粒子的角动量本征函数 ……31
143. 张量力算符 ……35
144. 具有张量相互作用的氘核 ……37
145. 氘核的电四极矩和磁偶极矩 ……40
146. 三粒子的自旋函数 ……44
147. 中子为氢分子所散射 ……48

IV. 多 体 问 题

A. 少数粒子 ……52

148. 在圆上的两个相斥的粒子 ……52
149. 三原子的线型分子 ……56
150. 质心运动 ……61

151. 维里定理 ……64
152. 斯莱特(Slater)行列式 ……65
153. 用斯莱特行列式表示相互作用中的交换项 ……68
154. 原子基态中的两个电子 ……69
155. 氦原子的激发态 ……72
156. 氦原子的 S 激发态 ……76
157. 锂基态 ……81
158. 对锂基态的交换能修正 ……83
159. 电介质的极化率 ……87
160. 氖的抗磁磁化率 ……89
161. 范德瓦耳斯引力 ……91
162. 激发简并度 ……93
163. 中性氢分子 ……96
164. 全同粒子的散射 ……102
165. 反常质子-质子散射 ……106
166. 非弹性散射 ……110

B. 大量的粒子：量子统计 ……115

167. 金属中的电子气 ……115
168. 金属的顺磁磁化率 ……118
169. 未经象力修正的场致发射 ……120
170. 经象力修正的场致发射 ……123
171. 白矮星 ……128
172. 托马斯-费密近似法 ……132
173. 中性原子的阿马耳迪(Amaldi)修正 ……137
174. 托马斯-费密原子的能量 ……139
175. 用于托马斯-费密原子的维里定理 ……143
176. 托马斯-费密场的梯兹(Tietz)近似法 ……144
177. 托马斯-费密场的变分近似法 ……146
178. K 电子的屏蔽 ……147

V. 非定态问题

179. 与时间无关微扰的二能级系统 ……152
180. 二能级系统的周期微扰 ……154

181. 狄拉克的微扰方法 ……………………………………157
182. 周期微扰：共振 ……………………………………159
183. 散射的黄金规则 ……………………………………161
184. 在动量空间中的玻恩散射 ……………………………164
185. 原子的库仑激发 ……………………………………167
186. 光电效应 ……………………………………………170
187. 光的色散. 振子强度 ………………………………174
188. 在磁共振装置中自旋取向的翻转 ……………………177

VI. 相对论性狄拉克方程

189. 狄拉克方程的叠代 …………………………………181
190. 正能量的平面狄拉克波 ……………………………183
191. 旋量的变换性质 ……………………………………187
192. 洛伦兹协变量 ………………………………………188
193. 宇称变换 ……………………………………………192
194. 电荷共轭 ……………………………………………194
195. 混合螺旋性态 ………………………………………196
196. 自旋期待值 …………………………………………197
197. 狄拉克波旋量的代数性质 …………………………199
198. 流的代数表示式 ……………………………………201
199. 传导流和极化流 ……………………………………204
200. 将狄拉克方程分成一对二分量方程 ………………206
201. 有心力场的狄拉克理论 ……………………………209
202. 狄拉克理论中的开普勒问题 ………………………214
203. 氢原子的精细结构 …………………………………218
204. 正动能的径向开普勒解 ……………………………224
205. 平面狄拉克波的角动量展开 ………………………228
206. 在有心力势上的散射 ………………………………231
207. 连续势阶 ……………………………………………235
208. 在势跃变处平面波的斜入射 ………………………242
209. 在势跃变处的反射强度 ……………………………246

VII. 辐 射 理 论

210. 薛定谔场的量子化 …………………………………250

211. 散射的玻恩近似 ……252
212. 经典辐射场的量子化 ……254
213. 光子的发射几率 ……257
214. 辐射的角分布 ……259
215. 跃迁几率 ……262
216. 偶极辐射的选择定则 ……263
217. 赖曼谱线的强度 ……266
218. 康普顿效应 ……268
219. 韧致辐射 ……272

数 学 附 录

坐标系……279
Γ 函数……281
贝塞耳函数……283
勒让德函数……286
球谐函数……290
超几何级数……294
合流级数……298
一些由积分定义的函数……299
索引(I, II 两卷)……302

III. 有自旋的粒子

A. 单 体 问 题

问题129 泡利矩阵的建立

自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子具有三个基本性质:

1. 它具有和空间坐标无关的内禀矢量的性质;

2. 这矢量是一个和轨道角动量相加在一起的角动量(=自旋);

3. 如果测量自旋的一个分量, 那末, 所得结果只能是它的两个本征值 $+\frac{1}{2}\hbar$ 和 $-\frac{1}{2}\hbar$ 中的一个.

用两分量的波函数和相应的自旋算符的 2×2 矩阵能将上述性质描述出来. 试建立这些矩阵.

解 令 $\boldsymbol{S}=\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ 为自旋矢量算符, 于是按照性质 2, 它的三个分量服从角动量算符的对易关系:

$$S_xS_y-S_yS_x=\hbar iS_z \quad (\text{等等, 循环}) \tag{129.1a}$$

或用无量纲算符 σ_i 表示:

$$\sigma_x\sigma_y-\sigma_y\sigma_x=2i\sigma_z \quad (\text{等等, 循环}). \tag{129.1b}$$

按照性质 3, 每一个 σ_i 只有本征值 +1 和 −1, 因此, 用二维希耳伯空间的 2×2 矩阵来表示这些算符应该是可能的. 在同一希耳伯坐标系中, 它们不能全部是对角的, 因为它们是不对易的. 如果在选择希耳伯坐标系时使

$$\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{129.2}$$

是对角的，坐标方向的单位矢量是

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad 和\quad \beta=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{129.3}$$

则得

$$\sigma_z\alpha=\alpha;\quad \sigma_z\beta=-\beta. \tag{129.4}$$

如粒子处于希耳伯矢量 $\alpha(\beta)$ 的状态，它的自旋指向正(负) z 方向.

σ_x 和 σ_y 的一般形式是

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix};\qquad \sigma_y=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}. \tag{129.5}$$

现在来求它们的矩阵元. 我们先利用对于 σ_x 和 σ_y 为一次的两个对易子(129.1b)，即

$$\sigma_x\sigma_z-\sigma_z\sigma_x=-2i\sigma_y\quad 或\quad \begin{pmatrix}0 & -2a_{12}\\ 2a_{21} & 0\end{pmatrix}=-2i\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$$

和

$$\sigma_y\sigma_z-\sigma_z\sigma_y=+2i\sigma_x\quad 或\quad \begin{pmatrix}0 & -2b_{12}\\ 2b_{21} & 0\end{pmatrix}=+2i\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

求得

$$a_{11}=a_{22}=b_{11}=b_{22}=0;\quad b_{12}=-ia_{12};\quad b_{21}=+ia_{21}, \tag{129.6}$$

于是还剩下两个矩阵元 a_{12} 和 a_{21} 有待确定. 利用第三个对易关系

$$\sigma_x\sigma_y-\sigma_y\sigma_x=2i\sigma_z$$

或

$$\begin{pmatrix}2ia_{12}a_{21} & 0\\ 0 & -2ia_{12}a_{21}\end{pmatrix}=2i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

就可得到它们之间的关系式为

$$a_{12}a_{21}=1. \tag{129.7}$$

方程式(129.6)和(129.7)中还留下一个复数(譬如 a_{12})未确定. 我们任意地选定这参数为

$$a_{12}=1, \tag{129.8}$$

于是得到三个泡利矩阵的表示式:

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix};\quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{129.9}$$

在用方程(129.3)的 σ_z 本征矢量来表示时，可以用下面的等效关系来代替(129.9)，即

$$\begin{aligned}&\sigma_x\alpha=\beta;\quad \sigma_y\alpha=i\beta;\quad \sigma_z\alpha=\alpha\\ &\sigma_x\beta=\alpha;\quad \sigma_y\beta=-i\alpha;\quad \sigma_z\beta=-\beta\end{aligned} \tag{129.10}$$

问题 130　泡利矩阵的本征态

试确定算符 σ_x 和 σ_y 的本征矢量，并证明 $|a_{12}|^2=1$ 是必要条件. 两个“移位算符”

$$\sigma_+=\sigma_x+i\sigma_y;\quad \sigma_-=\sigma_x-i\sigma_y \tag{130.1}$$

和自旋矢量算符的绝对平方

$$\boldsymbol{\sigma}^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2 \tag{130.2}$$

的性质是什么?

解　用 a 代替 a_{12}，由上题得

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & a\\ 1/a & 0\end{pmatrix};\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -ia\\ i/a & 0\end{pmatrix} \tag{130.3}$$

从而

$$\sigma_+=\begin{pmatrix}0 & 2a\\ 0 & 0\end{pmatrix};\quad \sigma_-=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2/a & 0\end{pmatrix} \tag{130.4}$$

令

$$\psi=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=u\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=u\alpha+v\beta \tag{130.5}$$

为二分量波函数，于是

$$\sigma_x\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}av\\u/a\end{pmatrix};\quad \sigma_y\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-iav\\iu/a\end{pmatrix};$$
$$\sigma_+\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2av\\0\end{pmatrix};\quad \sigma_-\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2u/a\end{pmatrix}. \tag{130.6}$$

σ_x 的本征矢量满足以 λ 为本征值的方程 $\sigma_x\psi=\lambda\psi$, 用分量表示时就是

$$av=\lambda u \quad 和 \quad u/a=\lambda v,$$

只有当 $\lambda=\pm1$ 时，这些关系式才能同时成立．这样就得到本征解

$$当\ \lambda_1=+1\ 时,\quad \psi_1=u\begin{pmatrix}1\\1/a\end{pmatrix}=u\left(\alpha+\frac{1}{a}\beta\right);$$
$$当\ \lambda_2=-1\ 时,\quad \psi_2=u\begin{pmatrix}1\\-1/a\end{pmatrix}=u\left(\alpha-\frac{1}{a}\beta\right). \tag{130.7}$$

自旋方向向上(就是在 $+z$ 方向)和向下的几率正比于希耳伯矢量 α 和 β 前面的因子的绝对值平方，即 $1:1/|a|^2$. 因为没有理由说某一指向的几率要比另一个大，于是得

$$|a|^2=1. \tag{130.8}$$

对于 σ_y 可作同样的考虑.

从现在起，我们明确地选定 $a=1$. 于是得到三个泡利矩阵 σ_i (每一个有本征值 $\lambda_1=+1$ 和 $\lambda_2=-1$)和它们的本征矢量:

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};\quad \psi_1=2^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\quad \psi_2=2^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}; \tag{130.9a}$$

$$\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix};\quad \psi_1=2^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix};\quad \psi_2=2^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}; \tag{130.9b}$$

$$\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix};\quad \psi_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\quad \psi_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{130.9c}$$

三个泡利矩阵是具有实本征值的厄密算符，$\sigma_i^\dagger=\sigma_i$. 下面两个算符

$$\sigma_+=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\quad 和\quad \sigma_-=\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix} \tag{130.10}$$

不是厄密的，$\sigma_+^\dagger=\sigma_-$ 和 $\sigma_-^\dagger=\sigma_+$. 它们不具有本征值或本征矢量，因为它们都是不能对角化的. 对这一点证明于下.

最一般的二维幺正矩阵可用实参数 θ、ξ、η 表示(除去无关的相因子)为

$$U=\begin{pmatrix}\cos\vartheta; & \sin\vartheta\, e^{i\xi}\\ -\sin\vartheta e^{i\eta}; & \cos\vartheta\, e^{i(\xi+\eta)}\end{pmatrix}.$$

于是 σ_+ 的幺正变换为

$$U^\dagger\sigma_+U=2e^{i\eta}\begin{pmatrix}-\sin\vartheta\cos\vartheta; & \cos^2\vartheta\, e^{i\xi}\\ -\sin^2\vartheta\, e^{-i\xi}; & \sin\vartheta\cos\vartheta\end{pmatrix},$$

对于实参数的任何选择，都不能使上式成为对角的，因为对于同一辐角 ϑ, $\sin\vartheta$ 和 $\cos\vartheta$ 不会同时为零.

如将算符 σ_+ 和 σ_- 作用于希耳伯矢量 α 和 β, 则得到

$$\begin{aligned}&\sigma_+\alpha=0;\quad \sigma_-\alpha=2\beta;\quad \sigma_+\sigma_-\alpha=4\alpha;\quad \sigma_-\sigma_+\alpha=0;\\&\sigma_+\beta=2\alpha;\quad \sigma_-\beta=0;\quad \sigma_+\sigma_-\beta=0;\quad \sigma_-\sigma_+\beta=4\beta.\end{aligned} \tag{130.11}$$

如把它们去和 σ_z 对易，它们自己就会重新产生:

$$\sigma_+\sigma_z-\sigma_z\sigma_+=-2\sigma_+;\qquad \sigma_-\sigma_z-\sigma_z\sigma_-=+2\sigma_-. \tag{130.12}$$

以角动量归一化的算符 σ_+ 和 σ_- 表示的

$$S_+=\frac{\hbar}{2}\sigma_+\quad 和\quad S_-=\frac{\hbar}{2}\sigma_- \tag{130.13}$$

与相类似的算符 L_+ 和 L_-(第 56 题)具有同样的性质，就是能使 z 分量移位 1(单位：$\hbar$):

$$\begin{aligned}&S_+\alpha=0;\qquad S_-\alpha=\hbar\beta;\\&S_+\beta=\hbar\alpha;\qquad S_-\beta=0.\end{aligned}$$

S_+ 使自旋分量为 $-\frac{1}{2}\hbar$ 的 β 态改变为 $+\frac{1}{2}\hbar$ 的 α 态，而 S_- 正好倒过来. $S_+\alpha$ 和 $S_-\beta$ 都必须等于零，因为按照移位规则，它们应当

给出 $+\frac{3}{2}\hbar$ 和 $-\frac{3}{2}\hbar$ 的态，这些自旋态在我们所采用的希耳伯空间是不存在的.

最后我们来考察自旋算符的绝对平方

$$\boldsymbol{\sigma}^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2=\frac{1}{2}(\sigma_+\sigma_-+\sigma_-\sigma_+)+\sigma_z^2. \qquad (130.14)$$

容易看出，所有三个 σ_i^2 都是单位矩阵，因此

$$\boldsymbol{\sigma}^2=3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

是对角的，不论我们选取怎样的希耳伯矢量，它的唯一值是 3，或者直截了当地说它等于 3. 运用(130.11)中 $\sigma_+\sigma_-$ 和 $\sigma_-\sigma_+$ 的关系式，从(130.14)的第二形式也可得到同样的结果.

由方程(130.14)得出 $\boldsymbol{S}^2=\frac{3}{4}\hbar^2$，或者以 S 代表描述自旋的量子数，那么得出的结果是 $\hbar^2S(S+1)$，其中 $S=\frac{1}{2}$. 这就是具有"自旋 $\frac{1}{2}$"的态的含义.

问题 131 自 旋 代 数

试证明三个泡利矩阵和单位矩阵一起组成了一个代数的完全基.

解 如果 1、σ_x、σ_y、σ_z 组成一个完全基，那么，把具有下列形式(其中 a_i 是复数系数)

$$N=a_0+a_1\sigma_x+a_2\sigma_y+a_3\sigma_z \qquad (131.1)$$

的任何两个数相加或相乘都不能产生超出此代数之外的数. 显然，这规则对加法是成立的. 但对两数相乘是否正确仍须加以证明. 为此，我们先建立泡利矩阵的乘法表.

令 i、k、l 代表三个下标 x、y，z 的任意循环排列，则 σ_i 满足对易关系

$$\sigma_i\sigma_k-\sigma_k\sigma_i=2i\sigma_l \tag{131.2}$$

和归一化关系

$$\sigma_i^2=1. \tag{131.3}$$

此外，容易验证泡利矩阵服从反对易规则

$$\sigma_i\sigma_k+\sigma_k\sigma_i=0 \quad (i\neq k). \tag{131.4}$$

将(131.2)和(131.4)相加和相减，就得到下列乘积：

$$\sigma_i\sigma_k=i\sigma_l; \quad \sigma_k\sigma_i=-i\sigma_l. \tag{131.5}$$

所以，任何两个基元的乘积，除相差一个复数因子外，仍回到另一基元。

乘 法 表

第一因子	第二因子			
	1	σ_x	σ_y	σ_z
1	1	σ_x	σ_y	σ_z
σ_x	σ_x	1	$i\sigma_z$	$-i\sigma_y$
σ_y	σ_y	$-i\sigma_z$	1	$i\sigma_x$
σ_z	σ_z	$i\sigma_y$	$-i\sigma_x$	1

必须指出，所有三个泡利矩阵的乘积因此而简单地成为

$$\sigma_x\sigma_y\sigma_z=i. \tag{131.6}$$

对于不具有本征值的 σ_+ 和 σ_-，现在可以加以讨论. 从乘法表得到

$$\sigma_\pm^2=(\sigma_x\pm i\sigma_y)^2=\sigma_x^2-\sigma_y^2\pm i(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_x)=0.$$

这是一个有趣的结果，它表明在泡利代数中不为零的数的平方可以等于零. 顺便说一说，事实上不论是 σ_+ 还是 σ_- 都不存在任何倒数.

适合关系式

$$N=N^2 \tag{131.7}$$

的数 N 称为幂等数. 这种数属于我们的代数，

$$\frac{1}{2}(1+\sigma_i) \quad 和 \quad \frac{1}{2}(1-\sigma_i) \quad (i=x,\ y,\ z) \tag{131.8}$$

就是这样的数. 用矩阵表示时,

$$P_+=\frac{1}{2}(1+\sigma_z)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$P_-=\frac{1}{2}(1-\sigma_z)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

将它们作用于希耳伯基矢 α 和 β, 得到

$$P_+\alpha=\alpha; \quad P_-\alpha=0;$$

$$P_+\beta=0; \quad P_-\beta=\beta.$$

因此,将这些算符作用在含有不同自旋取向的态矢量上,它们将抑制其中的 β 或 α, 即

$$P_+(u\alpha+v\beta)=u\alpha; \quad P_-(u\alpha+v\beta)=v\beta,$$

这里留下的是态矢量在二维希耳伯空间的一个基矢方向上的投影. 所以称它们为投影算符.

注 泡利代数实质上和四元数代数相同, 在四元数代数中用 $i\sigma_k$ 代替 σ_k 作为基元.

问题 132 旋量变换性质

怎样才能证明单粒子态的自旋

$$\boldsymbol{s}=\int d^3x\psi^+\boldsymbol{\sigma}\psi \tag{132.1}$$

是一个矢量?应注意: σ_i 在空间转动下不随坐标变换,而 $\boldsymbol{s}$ 的变换性质完全根据波函数而定.

解 根据空间转动群性质,我们只要考察无穷小转动

$$x_i'=x_i+\sum_k{}'\varepsilon_{ik}x_k; \quad \varepsilon_{ki}=-\varepsilon_{ik} \tag{132.2}$$

就足够了,其中

$$\varepsilon_{12}=\alpha_3;\quad \varepsilon_{23}=\alpha_1;\quad \varepsilon_{31}=\alpha_2 \tag{132.3}$$

是围绕三个轴转动的无穷小角. 如果 $\boldsymbol{s}$ 是矢量，它必须服从同一变换规则

$$s_i'=s_i+\sum_k{}' \varepsilon_{ik}s_k \tag{132.4}$$

要做到这一点，只需将波函数作如下的变换:

$$\psi'=(1+\xi)\psi;\quad \psi'^{\dagger}=\psi^{\dagger}(1+\xi^{\dagger}) \tag{132.5}$$

其中 ξ 是无穷小量. 现在我们来确定这变换.

首先，$\psi^{\dagger}\psi$ 是一个标量，故

$$\psi'^{\dagger}\psi'=\psi^{\dagger}(1+\xi^{\dagger})(1+\xi)\psi=\psi^{\dagger}\psi$$

或

$$\xi^{\dagger}=-\xi \tag{132.6}$$

将(132.4)和(132.5)代入(132.1)，得

$$s_i'=\int d^3x\psi^{\dagger}(1-\xi)\sigma_i(1+\xi)\psi=s_i+\int d^3x\psi^{\dagger}(\sigma_i\xi-\xi\sigma_i)\psi$$

将这表式与(132.4)比较，得出决定算符 ξ 的方程为:

$$\sigma_i\xi-\xi\sigma_i=\sum_k{}' \varepsilon_{ik}\sigma_k\quad (i,\ k=1,\ 2,\ 3) \tag{132.7}$$

容易证明，这些方程有明确的解

$$\xi=\frac{i}{2}(\varepsilon_{12}\sigma_3+\varepsilon_{23}\sigma_1+\varepsilon_{31}\sigma_2) \tag{132.8}$$

因为将它代入(132.7)的左边，利用对易规则就可得到与右边相一致的结果，例如，对 $i=1$，

$$\frac{i}{2}[\sigma_1,\ \varepsilon_{12}\sigma_3+\varepsilon_{23}\sigma_1+\varepsilon_{31}\sigma_2]$$

$$=\frac{i}{2}\{-\varepsilon_{12}\cdot 2i\sigma_2+\varepsilon_{31}\cdot 2i\sigma_3\}=\varepsilon_{12}\sigma_2+\varepsilon_{13}\sigma_3$$

对 $i=2$ 或 3，可得到类似的结果.

用(132.3)转动角记号表示，算符(132.8)可以写成更简洁形式

$$\xi = \frac{i}{2}\sum_k \alpha_k \sigma_k. \tag{132.9}$$

将它作用于两分量波函数

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u\alpha + v\beta \tag{132.10}$$

得出变换后的波函数

$$\psi' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = u'\alpha + v'\beta, \tag{132.10'}$$

其中

$$\begin{aligned} u' &= \left(1 + \frac{i}{2}\alpha_3\right) u + \frac{i}{2}(\alpha_1 - i\alpha_2) v; \\ v' &= \frac{i}{2}(\alpha_1 + i\alpha_2) u + \left(1 - \frac{i}{2}\alpha_3\right) v. \end{aligned} \tag{132.11}$$

具有这种变换性质的两分量函数称为旋量.

问题 133 有心力场中的自旋电子

试确定与自旋无关的有心力场中自旋电子的波函数. 这波函数必须是两个算符

$$\boldsymbol{J}^2 = (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{S})^2 \quad 和 \quad J_z = L_z + S_z \tag{133.1}$$

的本征函数,其中 $\boldsymbol{L}$ 是轨道角动量, $\boldsymbol{S}$ 是电子的自旋.

解 先考察角动量的 z 分量. 因为

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}; \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

故可写

$$J_z = \hbar \begin{pmatrix} -i\dfrac{\partial}{\partial\varphi} + \dfrac{1}{2}; & 0 \\ 0; & -i\dfrac{\partial}{\partial\varphi} - \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{133.2}$$

这算符的本征函数具有如下形式