强度理论及其应用

徐积善

水利电力出版社

强度理论及其应用

徐 积 善

水利电力出版社

内 容 提 要

本书着重论述力学强度理论及其应用。全书分为七章：第一、二、三章系统地介绍了应力状态及应变状态的基础理论知识；第四章扼要地叙述力学强度理论及其应用；第五、六、七章混凝土的变形、强度、强度理论的应用。

本书可供高等院校有关专业师生及工程技术人员、科研人员参考使用。

强度理论及其应用
徐积善
*
水利电力出版社出版
（北京三里河路6号）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
房山南召印刷厂印刷
*
850×1168毫米 32开本 10.375印张 273千字
1984年3月第一版 1984年3月北京第一次印刷
印数 0001—8310册 定价 1.30元
书号 15143·5352

前　言

本书包括三部分，第一部分（一至三章）扼要介绍应力与应变状态和强度分析研究密切相关的基本理论；第二部分（四至六章）为本书的重点，比较全面、系统地论述各种强度理论、计算方法和本构方程；第三部分（第七章）简要地介绍有关强度理论在混凝土和钢筋混凝土结构中的应用概况。

从四、五、六三章可以看出，本学科发展是迅速的，有关的文献浩繁，并各有千秋。但是，作为一门理论，尚嫌不够系统和完善，仍需要做大量的理论研究和试验分析工作。关于强度理论的应用，各国都在加强这一领域的研究分析工作，并把研究成果，逐步地、慎重地反映到规范和工程设计中。本书编写的目的，是愿与同行们共同研究，深望我国在强度理论的研究和应用方面能取得更多的成绩，尽早为我国社会主义建设服务。

本书承清华大学王传志、华北水电学院研究生部符之孝同志审查。大连工学院孙焕纯同志在编审过程中也提出了不少宝贵意见。特此致谢。

本书可作为高等院校教学参考书和研究生教材，也可供大学生、工程技术人员及科研工作者参考使用。限于作者的能力和水平，书中错误和不当之处，望读者多加批评指正。

徐积善　于北京

一九八一年五月

目　录

绪　论

远在古代，一些建筑工作者曾致力于制定建筑物的计算理论。但这些理论多半是从臆想得来的，而且又只能通过行会者的传授去模仿一些法则和标准。当时人们尽管意识到结构的设计与建造有两个功能：即在结构或建筑物建造和使用的安全性；结构和建筑物的实用性。然而并没有从理论上加以概括。这两个功能（特别是安全性）与经济密切联系在一起，一直是建筑工作者致力于研究和解决的主要任务。安全性与强度（稳定或承载能力）有关，强度又与内力、应力有关；实用性与刚度和抗裂性有关。

建筑物或结构的计算理论发展到现在，已经进入一个新的时期：既考虑到材料的力学指标（强度）的随机变异，又考虑到外界荷载的随机变异；既考虑到结构的内力（包括内力重分配），又考虑到截面的应力分布（包括弹塑性应力分布及蠕变影响）；既考虑到动荷的疲劳荷载、冲击荷载；又考虑到结构的重要性、破坏状态（延性—塑性，脆性）、制造工艺、工作条件，同时还考虑到其它一些难于统计的，但也影响结构强度、稳定和刚度的因素。然后用统计数学工具，分析结构的强度变异，从而确定出安全度和安全系数。

由此可见，强度（或承载力）是建筑物和结构设计计算的一个重要和主要方面。

强度这个概念，在应力概念确定之前，没有材料强度的概念，只有结构强度的提法，而结构强度是泛指结构的承载能力（破坏的危险状态），其中包括失稳的临界荷载、极限荷载（屈服荷载或破坏荷载）。

在应力概念确定之后，强度系对材料而言的。一种材料的强度就是它抵抗由外力产生的某种应力（或应变）的能力，即材料

的一种破坏或破裂的极限状态。材料强度也可称为力学强度，因为它是以力学指标为根据的。从此，结构强度就指结构在外力作用下，结构物体内部所产生的某几种应力（或应变）与组成结构的材料所能抵抗几种应力（或应变）的能力之间的关系。

结构强度破坏，广义地讲包括结构不能继续工作而必须加以更换或加固处理的各种情况，这些都属于强度计算范畴。由于强度破坏的物理现象的复杂性，各种破坏情况的计算方法便各有特点。因此，强度的概念在计算过程中被归结为确定应力的计算本身，并不保证结构的稳定性和具有足够的刚度。于是材料力学和工程结构中就把强度计算、稳定计算和刚度计算〔钢筋混凝土结构则分为承载能力（强度与稳定）计算、刚度计算和抗裂性计算〕区分开来。

强度标准和准则，是为了保证建筑物或结构在正常使用过程中，避免产生强度破坏、断裂（或失稳），这其中就包含着安全储备或者说强度储备在内。

强度理论是研究结构或材料在受力过程中产生的物理现象和引起结构或材料破坏、断裂的原因—某种或某几种应力（或应变）超过组成结构物的材料所能抵抗能力，从而为建立相应地应力（或应变）的不等式关系—强度标准、强度准则，提供理论计算方法和依据。

著名物理学家、工程师里奥纳多·达·芬奇（1452～1519年）曾进行了材料及柱与其它结构的强度试验，提出了有关材料强度的一些见解。十六世纪数学家兼力学家伽俐略（1564～1642年）曾进行过梁的弯曲试验，并提出了有关梁的强度与见解。尽管他的论证在数量上是不精确的，但原则上是正确的。他较全面地研究、试验并分析了梁的破坏强度，因而很多人认为他是“强度科学”的创立者，是第一个试图取得力和所作用物体的强度之间的关系的人。劳勃脱、虎克在1660年建立了弹性物理定律。马立奥特于1680年才将这个定律用在梁的弯曲强度上。直到1773年，材料强度理论，梁的弯曲理论，挡土墙上的土压力理论及拱

的计算理论，在库伦的主要著作中才得到全面的应用。虽然其中所建立的物体的力和物体强度间的关系，非常接近我们现在所用的形式，但当时没有建立“应力”这个极为重要的概念，这个概念直到十九世纪1822年柯西在创立了弹性理论的过程中，分析“物体内一点的应力状态”时，才较为全面的得到阐述。十九世纪中叶，弹性理论才开始用来解决工程上的问题。二十世纪各种新型结构的发展，促使了弹性理论的发展。至此，才把物体所受的力与物体内的弹性应力、应变与强度关系互相联系起来。

弹性理论对越来越多的工程已不完全适用，因为工程的设计必须考虑超弹性阶段的塑性变形阶段。从人们用金属的时候起，就熟悉它的塑性性质，但系统地研究金属的塑性和建立其数学理论，只是在广泛地发展了冶金科学和工业化的金属加工以后，才感到它的必要性。因为承认材料有塑性，或者说考虑超过材料屈服点的强度，就可以提高结构和构件的强度极限。

采用塑性设计是有依据的，因为实际上有很多安全使用的结构或构件，否定了“不产生永久变形”为前提的弹性设计这一观点。如经过剪床、冲床或模压加工的部件，都产生永久变形，但这并没有引起不良影响。盛液态的容器及船，经常由于运输及在使用过程中，被碰的高洼不平，但结构并没坏，也没漏。实际工程中，按弹性设计的构件，确实也有很多是在塑性区内工作的。因此迫使人们不得不研究超过弹性极限而在材料强度极限以内的塑性强度，来作为塑性设计的基础。这对确定结构与构件的真实承载能力（强度）有现实意义，能节约大量建筑材料。塑性分析能利用延性。非均匀的应力分布，可以有利于应力重分配。目前在金属结构和钢筋混凝土结构中都应用了塑性分析。

在1868～1875年间，列维（M.Levy）、特利斯盖（H.Tresca）、森维南（Saint-venant）首先探索并建立了塑性变形的有关理论，此后足有四十年时间没有什么进展，直至1909年卡曼（T.Karman）、赫尔（A.Hoar）和1913年密塞斯(R.Mises)重新对这门科学又进行了研究。

由于数学工具和试验手段在不断发展，结构内力应力分析及材料强度与应力分析都得到了进一步研究，但距离建立一套较完整的理论，尚有相当的差距，特别是在混凝土和钢筋混凝土方面。

总之，这门科学的内容是十分丰富的，它既包括材料本身的强度理论，又包括结构的强度理论。本书主要介绍一些有关材料方面的内容，提供一些线索和研究方法。今后拟在此基础上进一步作些修改和补充工作，介绍有关构件与结构方面的强度理论。

第一章　应 力 状 态

为了学习以下各章，顾及到内容的连惯性，简要地介绍有关主要内容。

第一节　一 点 的 应 力

如图（1-1a）所示，一弹性体AB在外力p_1、p_2、p_3……作用下，必然要改变本身的形状而变为$A'B'$。假想割去B'部分，则在截面上就暴露出B'对A'的内力作用，以保持互相的平衡。

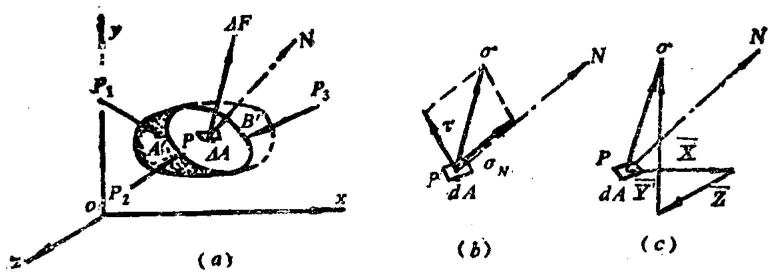


图 1-1

令p为截面上的任一点，PN为垂直于该截面的外 法线 。ΔA为该截面上的一微面，其上作用一个内力ΔF，当ΔA无限缩小时，得p点的外力作用应力或内力强度为：

$$\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta A}$$

通常用$\sigma=\lim\limits_{\Delta A\to 0}\dfrac{\Delta F}{\Delta A}$表示。可将$\sigma$分解为沿外法线方向的法向应力$\sigma_N$和在微面上的剪应力$\tau$（图1-1$b$），或将$\sigma$分解 为与坐

标轴方向一致的应力分量$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$（图1-1c）。不论怎样分解，都要知道P点的坐标位置和外法线的方向。

由弹性力学得知，任一点P的应力状态可由9个应力分量（体力在外）来表示。各点的应力状态是不一致的，一般讲这9个应力分量都是该点坐标的函数，如：

$\sigma_x=f_1(x, y, z), \sigma_y=f_2(x, y, z), \sigma_z=f_3(x, y, z)$

$\tau_{xy}=f_4(x, y, z), \tau_{yz}=f_5(x, y, z), \tau_{zx}=f_6(x, y, z)$.

$\tau_{xz}=f_7(x, y, z), \tau_{yx}=f_8(x, y, z), \tau_{zy}=f_9(x, y, z)$

由P点附近，取出一个各边为δx、δy、δz的正面体（图1-2）。设P点坐标为x，y，z，法向应力$\sigma_x=f_1(x, y, z)$，则q点的应力只有一个坐标不同，略去高次项后，可为：

$$[\sigma_x]_q=f_1(x+\delta x, y, z)=f_1(x, y, z)+\delta x\frac{\partial f_1}{\partial x}$$

$$+\frac{\delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}+\cdots\cdots=[\sigma_x]_p+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\delta x$$

微面$pabc$及$qdef$的总外力为$[\sigma_x]_p\delta y\delta z$及$\left\{[\sigma_x]_p+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\times\delta x\right\}\delta y\delta z$。所取微块(图1-2)各面上还有剪应力$\tau_{xy}$、$\tau_{xz}$…及体积力(重力与电子力等)，并用三个分量$x$、$y$、$z$代表，其合力分别为$X\delta x\delta y\delta z$，$Y\delta x\delta y\delta z$，$Z\delta x\delta y\delta z$等，作用在微块重心上。共21个力作用在微块上（图1-3），而且是平衡的，即$\Sigma F_x=0$，$\Sigma F_y=0$，$\Sigma F_z=0$，$\Sigma M_x=0$，$\Sigma M_y=0$，$\Sigma M_z=0$。由$\Sigma M=0$可证明$\tau_{xy}=\tau_{yx}$、$\tau_{xz}=\tau_{zx}$、$\tau_{yz}=\tau_{zy}$的剪应力互等定律。最后得三个基本偏微分方程式（包括9个应力分量）：

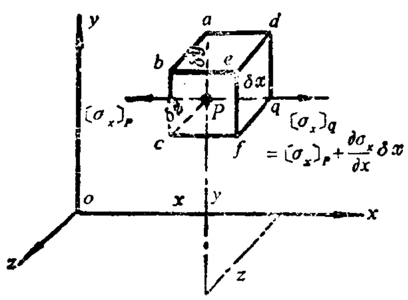


图 1-2

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0\\
\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y=0\\
\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}1)
$$

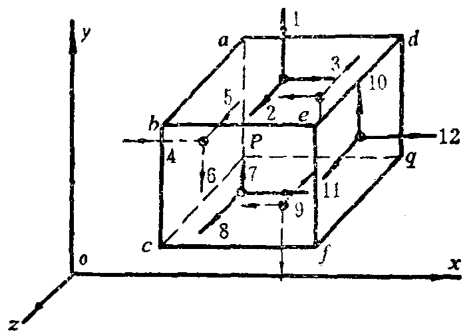


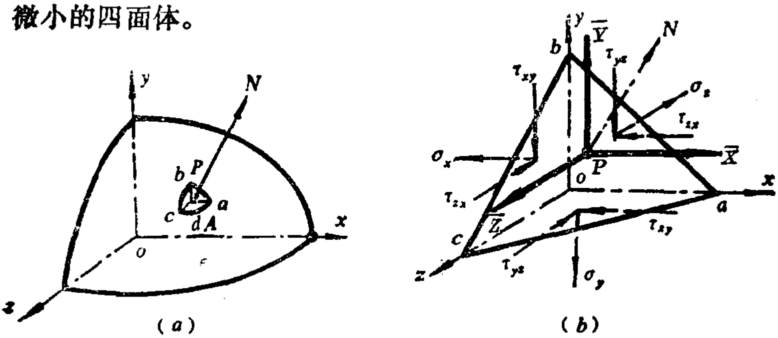
图 1-3

1—$\left([\sigma_y]_p+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\delta y\right)\delta x\delta z$, 2—$\left([\tau_{yz}]_p+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\delta y\right)\delta x\delta z$, 3—$\left([\tau_{yx}]_p+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\delta y\right)\delta x\delta z$, 4—$[\sigma_x]_p\delta y\delta z$, 5—$[\tau_{xz}]_p\delta y\delta z$, 6—$[\tau_{xy}]_p\delta y\delta z$, 7—$\left([\tau_{zy}]_p+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\delta z\right)\delta x\delta y$, 8—$\left([\sigma_z]_p+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\times\delta z\right)\delta x\delta y$, 9—$\left([\tau_{zx}]_p+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\delta z\right)\delta x\delta y$, 10—$\left([\tau_{xy}]_p+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\delta x\right)\delta y\delta z$; 11—$\left([\tau_{xz}]_p+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\delta x\right)\delta y\delta z$, 12—$\left([\sigma_x]_p+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\delta x\right)\delta y\delta z$

	x	y	z
x 分量	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}
y 分量	τ_{yx}	σ_y	τ_{yz}
z 分量	τ_{zx}	τ_{zy}	σ_z

上式给出六个函数f_1，f_2，f_3，f_4，f_5，f_6之间的必要关系。也就是说，六种应力如果满足以上三个关系，就能保证弹性体内各个微小正六面体处于平衡。9个应力分量见上表。

过一点所作的微小六面体上有9个应力分量，给出9个分量后，即可求出过该点任意微面上的应力。对于弹性体的任意边界面一般不能分割出平行于全部坐标轴的微六面体——（图1-4a）及（图1-4b）为其放大部分，只能分割出有三个平行于坐标面的微小的四面体。



（a）　　　　（b）

图 1-4

四面体$oabc$的三面仍要承受内部的各种应力，因此，为了研究整个物体的平衡，必须考虑这些四面体的平衡条件。令平面abc的外法线为PN，并令这法线的方向余弦为$\cos(N, x)=l$，$\cos(N,y)=m$，$\cos(N,z)=n$，设$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$是外加全荷载强度S（或全应力）的三个分量。

设$\triangle abc$的面积为dA，则：

面积　$\triangle aob=ndA$

面积　$\triangle boc=ldA$

面积　$\triangle coa=mdA$

由四面体平衡条件$\Sigma F_x=0$得：

$$\overline{X}dA-\sigma_x(dA)l-\tau_{xy}(dA)m-\tau_{zx}(dA)n+X\frac{1}{6}\delta x\delta y\delta z=0$$

其中由体积力产生的最后一项是三级微量，可忽略不计，因

此连同$\Sigma F_y=0$，$\Sigma F_z=0$可得以下简化式：

$$\left.\begin{aligned}\overline{X}&=\sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{zx}n\\\overline{Y}&=\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{yz}n\\\bar{Z}&=\tau_{zx}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}2)$$

如果六个应力函数能满足（1-1）及（1-2）式，就能保证物体的平衡。同理也可以证明如一弹性体在表面上受到外载荷强度分量（$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\bar{Z}$）作用处于平衡，且物体内任一点的6个应力分量已知时，则根据平衡条件，在边界面上任一点的六个应力分量也必满足（1-2）式，同样得出与式（1-2）相同的方程式（图1-5a）。

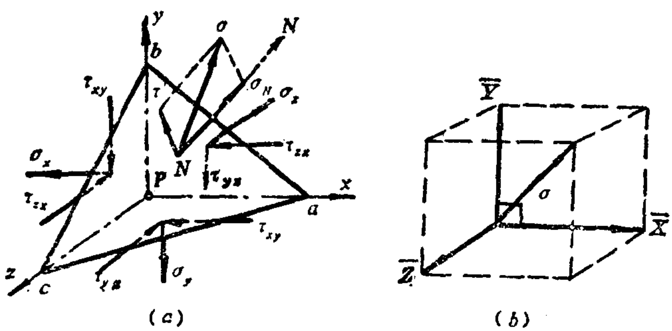


图 1-5

设过体内一点任一斜面上的应力分量为$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\bar{Z}$，可求得总应力：

$$\sigma^2=\overline{X}^2+\overline{Y}^2+\bar{Z}^2\qquad(1\text{-}3)$$

在外法线N-N上的投影之和为法向应力（正应力），则：

$$\sigma_N=\overline{X}l+\overline{Y}m+\bar{Z}n=\sigma_x l^2+\sigma_y m^2+\sigma_z n^2+2\tau_{xy}lm+2\tau_{yz}mn+2\tau_{zx}nl\qquad(1\text{-}4)$$

三角形abc上的剪应力为τ：

$$\tau^2=\sigma^2-\sigma_N{}^2\qquad(1\text{-}5)$$

物体内的任一点，如六个应力分量已知，就可求出任一个斜面上的正应力和剪应力，也就是六个应力分量完全决定一点的

应力状态。

下面将进一步证明，一点六个应力分量随坐标轴变化的转换关系。图（1-6）相当于从（图1-5a）的abc三角形上引出三条互相垂直的直线，设Nx'的方向余弦为l_1，m_1，n_1，Ny'及Nz'的方向余弦分别为l_2，m_2，n_2及l_3，m_3，n_3。新坐标x'，y'，z'与x，y，z的关系可由9个方向余弦求得。见下表：

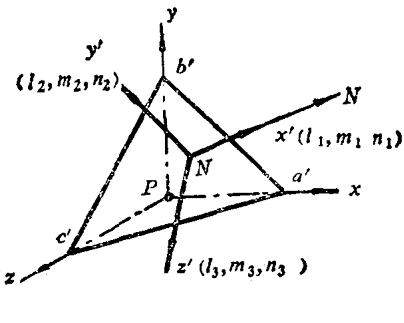


图 1-6

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

如以Nx'作p的外法线，按（1-2）式得：

$$\left.\begin{aligned}\overline{X}&=\sigma_x l_1+\tau_{xy}m_1+\tau_{zx}n_1\\ \overline{Y}&=\tau_{xy}l_1+\sigma_y m_1+\tau_{yz}n_1\\ \overline{Z}&=\tau_{zx}l_1+\tau_{yz}m_1+\sigma_z n_1\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}6)$$

因Nx'与$\Delta a'b'c'$垂直，则：

$$\sigma'_x=\sigma_N=\overline{X}l_1+\overline{Y}m_1+\overline{Z}n_1=\sigma_x l_1^2+\sigma_y m_1^2+\sigma_z n_1^2$$
$$+2\tau_{xy}l_1m_1+2\tau_{yz}m_1n_1+2\tau_{zx}n_1l_1$$

同时Ny'和Nz'均在$\Delta a'b'c'$内，其剪应力分量为：

$$\tau'_{xy}=\overline{X}l_2+\overline{Y}m_2+\overline{Z}n_2$$
$$=\sigma_x l_1 l_2+\sigma_y m_1 m_2+\sigma_z n_1 n_2+\tau_{xy}(l_1m_2+l_2m_1)$$
$$+\tau_{yz}(m_1n_2+m_2n_1)+\tau_{zx}(n_1l_2+n_2l_1),$$

$$\tau'_{xz}=\overline{X}l_3+\overline{Y}m_3+\bar{Z}n_3$$
$$=\sigma_x l_3 l_1+\sigma_y m_3 m_1+\sigma_z n_3 n_1+\tau_{xy}(l_3 m_1+l_1 m_3)$$
$$+\tau_{yz}(m_3 n_1+m_1 n_3)+\tau_{zx}(n_3 l_1+n_1 l_3)。$$

同理，可以Ny'或Nz'作为P点的外法线，得到与上述相似形式的公式，并可证得$\tau'_{yx}=\tau'_{xy}$、$\tau'_{xz}=\tau'_{zx}$、$\tau'_{yz}=\tau'_{zy}$。最后仍然只有六个独立的应力分量：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma'_x&=\sigma_x l_1^2+\sigma_y m_1^2+\sigma_z n_1^2+2\tau_{xy}l_1 m_1+2\tau_{yz}m_1 n_1+2\tau_{zx}n_1 l_1,\\
\sigma'_y&=\sigma_x l_2^2+\sigma_y m_2^2+\sigma_y n_2^2+2\tau_{xy}l_2 m_2+2\tau_{yz}m_2 n_2+2\tau_{zx}n_2 l_2,\\
\sigma'_z&=\sigma_x l_3^2+\sigma_y m_3^2+\sigma_z n_3^2+2\tau_{xy}l_3 m_3+2\tau_{yz}m_3 n_3+2\tau_{zx}n_3 l_3,\\
\tau'_{xy}&=\sigma_x l_1 l_2+\sigma_y m_1 m_2+\sigma_z n_1 n_2+\tau_{xy}(l_1 m_2+l_2 m_1)\\
&\quad+\tau_{yz}(m_1 n_2+m_2 n_1)+\tau_{zx}(n_1 l_2+n_2 l_1),\\
\tau'_{yz}&=\sigma_x l_2 l_3+\sigma_y m_2 m_3+\sigma_z n_2 n_3+\tau_{xy}(l_2 m_3+l_3 m_2)\\
&\quad+\tau_{yz}(m_2 n_3+m_3 n_2)+\tau_{zx}(n_2 l_3+n_3 l_2),\\
\tau'_{zx}&=\sigma_x l_3 l_1+\sigma_y m_3 m_1+\sigma_z n_3 n_1+\tau_{xy}(l_3 m_1+l_1 m_3)\\
&\quad+\tau_{yz}(m_3 n_1+m_1 n_3)+\tau_{zx}(n_3 l_1+n_1 l_3)
\end{aligned}\right\}\tag{1-7}$$

（1-7）式即为新坐标的应力要素。

第二节 应 力 张 量

张量是表征一类物理状态或几何性质的物理量或几何量，它包括表征连续介质的应力、应变和应变率的量；表征物体弹性性质的量；确定物体动力性质（惯性矩）的量，等等，也包括空间的各种抽象几何性质的张量。张量的计算在许多领域中应用，最常见的如弹性理论、塑性理论及水动力学，等等。

上面我们叙述的应力分量随坐标变化的关系是十分重要的，它可以用张量值来表示应力。如弹性体一点的应力状态的数值与某一选定坐标无关时，则此值称为应力张量，坐标平面的应力或者应力状态的分量，称为应力张量分量，如σ_x、σ_y…等。

如果一个量是由 9 个标量来确定的，则这个量就是一个二阶