数学概论

（大学文科数学）

童季贤　李天瑞　编著

西南交通大学出版社

责任编辑 刘婷婷
封面设计 肖 勤

ISBN 7-81057-611-9

9 787810 576116 >

ISBN 7-81057-611-9/O·033
定价：15.00元

数学概论

（大学文科数学）

童季贤　李天瑞　编著

西南交通大学出版社
·四川　成都·

内 容 提 要

全书作为数学概论介绍了数学简史，数与函数，微分与积分，矩阵与线性方程组，概率与模糊概念；同时介绍了运筹学的部分内容，以及数学实验和数学模型的基本情况。各章后面配有适量的习题，供师生参考使用。

本书数学知识面较宽，内容相对较浅，各章内容相对独立，更适合文科学生选用。教学上有相当的灵活性，又有一定的余地，并且在前言中提供了不同学时的教学模块参考意见可供选择。本书适合文科类，如哲学、社会学、法律学、政治学、图书馆、中文、历史、考古、外语以及建筑、医科等类的学生选为高等数学课程教材。

图书在版编目（CIP）数据

数学概论 / 童季贤，李天瑞编著. —成都：西南交通大学出版社，2001.10
大学文科数学教材
ISBN 7-81057-611-9

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①童…②李… Ⅲ. 高等数学 - 高等数学 - 教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 073360 号

数 学 概 论
（大学文科数学）
童季贤 李天瑞 编著
*
出 版 人 宋绍南
责任编辑 刘婷婷
封面设计 肖 勤
西南交通大学出版社出版发行
(成都二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行科电话：7600564)
http: //press.swjtu.edu.cn
E-mail: cbs@center2.swjtu.edu.cn
四川森林印务有限责任公司印刷
*
开本：787mm × 1092mm 1/16 印张：11.75
字数：282 千字 印数：1—3000 册
2001 年 10 月第 1 版 2001 年 10 月第 1 次印刷
ISBN 7-81057-611-9/O · 033
定价：15.00 元

前　言

在人类社会的进步，科学现代化过程中，数学及数学方法显得越来越重要，在许多学科中，它已经不单纯是一种辅助的工具了，而是解决许多重大问题的关键性的思想与方法。不仅在自然科学和工程技术领域中起着重要的作用，而且正以越来越快的速度渗透到社会科学的各个领域，显示出巨大的推动作用和启发作用：据统计自 1900 ~ 1965 年，在世界范围内社会科学方面的 62 项重大成就中，数学化的定量研究占 2/3 之多，而自 1969 年诺贝尔奖中设立经济学奖以来，因成功地将数学方法运用于经济学研究领域而获奖的工作占 2/3。由此可见，数学在文科类学生中不是可有可无的，而且，对文科各专业的深入研究也必须应用数学工具或数学思想和方法。

1979 年以来各高等院校的文科类学生，如哲学、社会学、法律学、政治学、图书馆、中文、历史、考古以及外语类学生陆续开设了“文科高等数学”课程或“数学概论”课程，原来有些不学数学的医类、建筑类也开设了“文科高等数学”课程。通过十年来的实践，证明对于现在或未来的社会学、医学或建筑类的工作者来说，数学既是一种强有力的研究工具，也是一种不可缺少的思维方式。

我校根据国家教委关于“开展面向 21 世纪教学内容和教学体系的研究”的精神，以及关于“开展面向 21 世纪非数学类的高等数学课程改革”的精神，对高等数学课程教学内容、教学方法进行了近十年的研讨和实践，已经出了工科类的一套数学教改教材。本人通过几年的文科高等数学的教学，参考了几种文科类高等数学教材，编写了《数学概论》讲义，又通过几年的教学与修改，在此基础上编写成本书。

这本《数学概论》为了适应文科类学生的需要，突出“概论”的要求，即内容面宽，但内容浅，使学生能较全面地、概括地了解数学及数学方法，这是本书的主要特点；此外，本书加了一些一般“高等数学”很少涉及的新内容，如无穷数集的势的概念，数学史、模糊数学的基本概念，数学实验与数学建模的介绍，运筹学的介绍等，这就是本书第二个特点；最后，许多章节相互独立，

可以灵活取舍，这给有不同教学要求的师生带来很大的方便。

为了满足不同专业的不同需求，本书提出一个参考教学模块如下：

A 类为 $5\times17=85$ 学时，第一章至第八章全部

B 类为 $4\times17=68$ 学时，第一章至第八章除去带*号章节

C 类为 $3\times17=51$ 学时，第一章至第五章，六、七、八章中选学一至二章

D 类为 $2\times17=34$ 学时，第一章至第五章

编　者

2001 年 8 月 20 日

目　　录

第一章 数学及数学简史

§1.1 数学概念及特点

有人说数学是自然科学的皇后，数学又是自然科学的工具，现在也成为经济管理和人文社会学的有力工具.

可以说，最抽象的艺术是音乐而最抽象的科学是数学. 抽象，再抽象是数学的主要特征.

什么叫数学?

数学（希腊文，μαϑημαтιχη′，来自μα′ϑημα——知识，科学），是关于与内容相脱离的形式和关系的科学. 数学的最初和基本的对象是空间形式和数量关系. “但是，为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边；这就是抽象过程. 这样，我们就得到没有长宽高的点、没有厚度和宽度的线、a 和 b 与 x 和 y，即常数和变数……”（恩格斯《反杜林论》，1971 年，第 35 页）. 例如，如果社会学家感兴趣的是人口随时间的增长，物理学家感兴趣的是气体压力由于温度变化而发生的变化，那么，数学家在这里关注的只是数 y 对数 x 的函数依赖关系. 除了空间形式和数量关系外，数学还研究其它的形式和关系，其中包括，数理逻辑——逻辑推理形式，n 维空间几何学，这些空间，当然已不是通常意义下的空间形式，但是存在它们的现实原型，如作为某个力学系统各种可能状态的集合（即系统的相空间）. 一般说来，现实世界的任何形式和关系都可以成为数学的对象，只要它们在客观上与内容无关，能够完全舍弃内容，并且能用清晰、准确、保持着丰富联系的概念来反映，使之为理论的纯逻辑发展提供基础. 除此而外，数学不仅研究直接从现实中抽象出来的形式和关系，而且还研究在逻辑上各种可能的、在已知的形式和关系的基础上定义出来的形式和关系. 正是这样，就出现了“虚数”、罗巴切夫斯基的“想像”几何学，等等；其中术语“虚数”、“想像”本身就强调所论及的是思想对象，还不能立即就讲清它们的现实意义. 现在，定义一些数学新对象已成为平常的事情，而新对象的解释方法又发展到这样的程度，以致其中很大一部分已无法分为现实的或只是逻辑上可能的. 这里有一个过渡——通过一系列抽象和定义——由现实意义显然的概念（例如整数），过渡到无法给出直观解释的概念（例如集合论的某些概念）. 可以把数学定义为关于逻辑上可能的、纯形式（即脱离内容的）的科学，或者定义为关于关系系统的科学，这是因为形式也是整个的各部分关系的系统，而数学中的关系，又总是被看做是任何一些抽象对象之间关系的系统.

数学的特点如下所列.

1. 被舍弃了内容的形式，作为独立的对象而出现

如自然界存在的是各种不同程度的球形物体，但是球形就其本身而言，已转变成理想对

象——几何球；自然界中存在的是各种变量的多样联系，而这些联系的纯形式，在数学上是作为理想对象——函数而出现的，等等. 各种其它科学也存在抽象性和理想性，但是在那里没有给它们以独立自在的意义，它们是始终离不开现实的. 而数学的抽象是无条件的，它的概念一经产生和定义之后，就稳定下来并且被看做是已知的，它们与现实的比较不是数学本身，而是它的应用问题. 尽管现代物理学提出，现实空间不完全是欧几里得式的，但谁也不把欧几里得几何看做是不精确的或者不严密的数学理论. 欧几里得几何的严密性和精确性，是由它的结论与表现为公理的基本前提相一致决定的.

2. 数学的结果——定理——通过逻辑推理由基本概念和前提得到的，缓引经验并不是数学论证（数学计算不过是以符号形式集中起来了的逻辑推理）

如同上面所说的数学特点，这完全不意味着，数学不从经验汲取自己的概念，也不与现实相关. 可是，数学研究的是与内容完全脱离的形式和关系，所保留的只是包含在它们定义中的东西. 因此，很自然，数学的结果是通过逻辑推理的方法，从这些定义、从相应的概念自身中得到的，所以纯数学具有纯演绎、思辨的特点.

3. 数学论断的确定不变性，是它的一个显著特点

物理定律在逻辑上是允许破坏的，但是不能想像，诸如 2 乘 2 不等于 4. 数学论断之所以确定不变，其原因不过是它们与所采用的前提有着逻辑上的联系. 数学论断之所以在逻辑上是必然的，是由所采用的前提决定的. “2 乘 2 等于 4”由乘法定义所推得. 由此可见，数学的这个特点，首先是由前面的两个特点决定的.

4. 存在一系列的抽象阶段，以及在已有概念的基础上形成新概念，是数学所特有的特征

整数无限序列、任意实数概念，已经是一系列抽象的结果；随后，在数学自身内部又产生了复数概念，进而又产生了超复数概念. 类似地，产生了非欧几何和多维空间等其它概念. 在已有概念的基础上，有意识地引进一些新概念，是现代数学的最一般特征.

5. 广泛的适用性是数学的又一个特点

任何一个领域，只要能从数学上提出问题，数学就能给出与所提问题的精确性相符合的结果. 我们同样地数任何一些对象，只要它们被严格分清了. 同一个方程组可以描述本质上完全不同的各种现象. 这样一来，数学的威力就在于它的抽象性：越撇开内容，就越有广泛应用的可能. 但是，同样地，数学应用的广泛性也不是绝对的，而是相对的：它在某个范围对某个问题应用的合理性，应依据所研究的内容决定.

6. 数学与其它科学相比有着独特的地位

数学与其它科学相比有着独特的地位，这是因为，它在研究自然界、社会以及思维领域中的形式和关系时，舍弃了内容且不准借助观察和实验进行论证. 因此，不能把数学列为自然科学或者社会科学.

然而数学和自然科学一样，是从实践中萌芽起来的，又仅仅由于经过相当漫长的知识积累，经过阐明概念和论断之间的联系，才转变成为“纯”数学，纯数学的进一步发展，在继续沿着紧密联系自然科学的道路上前进时，又不断地从根本上扩展它的对象，上升到更高抽象阶段. 例如，如果说欧几里得几何的对象是通常直观下的，尽管也有撇开物质内容的意思，那么，现在几何基础所谈到的却是“任意的对象”，只要它们满足相应的一些公理. 总而言之，数学的形式和内容，已经和正在继续不断地摆脱自己的内容. 尽管数学概念的定义越来越精确，但它们总不能成为绝对精确的；数学推理的精确性和严密性也是发展着的，过去被认为是严密的，现在却不能认为还是严密的.

§1.2 纯数学的形成、古希腊的数学成就

1. 纯数学的形成

随着数学知识的积累，随着已有成果之间联系的建立以及解题法则的统一，推导新结果的理论方法、最初的数学证明也就逐渐形成起来，最后导致一个质的飞跃：形成了具有演绎方法的“纯”数学. 不言而喻，这个“飞跃”是相当漫长的. 据记载，这是发生在公元前 7～5 世纪的古希腊，数学知识是从埃及传到那里的. 值得指出的，泰利斯已经证明了一些最简单的几何定理. 几何的系统论述出现在公元前 5 世纪，德谟克利特提出了对于他那个时代相当深刻的、包含积分萌芽思想的一些论断. 不可公度线段的发现及随之建立起来的不可公度比的理论，是希腊数学的巨大成就. 这种逻辑构造方法，显然超出了经验知识的范围，是纯数学最后定形的鲜明标志［应当把数学的经验知识同确立这些知识的逻辑证明区分开，例如，位于直角三角形各边上的正方形之间的关系式已经含有毕达哥拉斯定理（即所谓勾股定理）的内容，这在毕达哥拉斯之前就已知道，但相应的定理并没有被证明过］. 无限概念的产生对于数学的发展有着根本性的意义，它在数学中的作用如此重大，以致有时把数学定义为“关于无限的科学”. 除了整数无限序列和无限延长直线外，还产生了几何图形无限可分的思想. 连续的东西，最初是不加分析地作为无限可分的东西出现的，它包括无限多个部分、点和时刻. 数学是沿着下述几个方向继续发展的：

（1）在已有概念范围内积累新的结果：如研究三角形的过程中发现了三内角和为 180°，这就是在平面几何的研究中积累的新结果.

（2）拓广数学的对象，把新的形式和关系纳入其中，从而形成一些根本性的新概念. 如，对随机现象的研究，产生了概率新概念.

（3）发明解题和证明定理的新方法. 有许多数学论文都是在深入研究问题的过程发现了新的解题方法或证明方法，使这个问题更深刻、更全面.

（4）上升到更多的抽象和更大的普遍性. 如，对除法的研究产生了有理数，显然比整数有更大的普遍性，对无理数的研究产生了实数概念，它比有理数有更大的普遍性. 又如，函数的研究是对数量关系的抽象，泛函数的研究又是对函数的进一步抽象，抽象后，它使许多函数论的关系更为简捷.

（5）深化基本概念. 对无理数、连续性以及无穷集合数量的研究深化了实数的概念，形成了实数理论.

2. 古希腊几何学的伟大成就

古希腊人对数学似乎有特别大的兴趣，尤其是在几何学方面. 这在一定程度上应当归功于毕达哥拉斯派和柏拉图，他们都是数学的崇拜者和鼓吹者. 据说柏拉图在他所创办的学园的大门口上就写着："不懂几何学者不得人内". 在其它古国，数学基本上是一门实用性的学科，而在古希腊，也像我们所看到的天文学的情况那样，他们着重于向理论发展.

古希腊最早的数学家可能是泰利斯. 据说他提出并证明了下列几何学基本命题：圆为它的任一直径所平分；半圆的圆周角是直角；等腰三角形两底角相等；相似三角形的各对应边成比例；若两三角形两角和一边对应相等则两三角形全等. 此说是否属实已难于考证，不过如果说他已作出了后来那种严格的演绎证明，则是不可信的.

毕达哥拉斯派没有留下任何数学著作，我们只能从他人的记述中得知一些他的情况. 他们所崇拜的数是一个一个的数目，一些最基本的几何图形似乎也是数的表现. 他们的数有类似于原子论者的原子. $\frac{1}{2}(n^2+n)$ 被称为三角形数（n 为正整数，下同），n^2 为正方形数. 非素数的合成数而又不恰好是正方形数的则为长方形数. 还有 $\frac{1}{2}(3n^2-n)$ 为五边形数，$2n^2-n$ 为六边形数等等. 他们发现了 $\sqrt{2}$ 这个无理数，但 $\sqrt{2}$ 与 1 不能公度，或是说 $\sqrt{2}$ 不能与某个数目相合的问题使他们甚为困惑. 勾股定理是在他们之前早就有了的，据说最早给以严格证明的是他们. 有记载说在他们成功地证明了这个定理之后，曾举行过一次盛大的"百牛宴"以示庆祝. 据说，欧几里得几何学中关于平行线、三角形、多边形、圆、球和正多面体的许多定理，实际上都是毕达哥拉斯派的成果. 不过他们是否已做出了那样严格的证明也是值得怀疑的.

公元前 5 世纪，在古希腊曾存在过一个被称为智者派的哲学派别，他们之中有一些数学家提出了下列三个著名的几何做图难题：即只用圆规和直尺，作一正方形使其面积等于一已知圆的面积；作一立方体使其体积等于一已知立方体的两倍；三等分一任意角. 这三大难题在很长的时期内吸引了许多数学家，后来才证明了这都是不可能的. 对三大难题的研究虽然都是得不到实际的结果，但却产生了许多十分有价值的副产品. 智者派中的重要人物希匹阿斯（Hippias of Elis, 公元前 460? ～? ）在试图三等分一任意角时，发明了割圆曲线，如能作出这条曲线即可三等分一任意锐角，但是割圆曲线也是不能用直尺和圆规作出的. 可能是属于毕达哥拉斯派的希波克拉底（Hippocrates of Chios，约公元前 5 世纪）致力于化圆为方的问题时，得出了求以两不等径圆弧为边的月牙形面积的方法. 智者派的安提丰（Antiphon，公元前 5 世纪）在研究这个问题时，提出可以把圆看成是无穷多边的正多边形，毕达哥拉斯派的布莱生（Bryson of Heraclea，公元前 5 世纪）则以圆外接正多边形来思考同一问题，此即穷竭法的开端.

柏拉图如此重视数学，但他本人在数学上似未有具体的成果. 柏拉图研究数学不是为了实用的目的，而在于寻求一种思维中的完善和美，因此他特别注意数学的证明方法. 有记载说，他们研究过数学中的分析法、归谬法这样一些基本的推理方法，由于他们的工作，数学的推理方法更加严密了. 他们究竟把这些工作推进到什么程度，有哪些具体成果，我们现在不得而知，不过我们确实看见，自柏拉图以后，古希腊的数学更加理论化了. 我们当然不能想像古希腊发达的生产技术没有相应的实用数学知识，但数学作为一门学科与实际生活的距

离加大了. 古希腊的实验科学、物理学等在相当长的时期内没有得到相应的发展与数学这种状况看来也不无关系.

出自柏拉图派而又有所叛离的欧多克索不仅在天文学上有重要的贡献，他还是古希腊最有成就的数学家之一. 无理数$\sqrt{2}$的不可公度使古希腊的数学家产生了很大的困难，更多无理数的发现促使人们不得不认真地去研究它们. 无理数究竟是不是数？原先用于可公度量的那些几何学的证明能否用于这些不可公度量？一个一个可数的数目是不连续的，而量则是连续的，这些都是矛盾. 欧多克索面对这些难题走出了一条路子. 他定义了两个量之比和两个量之比相等的关系，即比例关系，以此来解决量的问题. 这样，从毕达哥拉斯开始的几何和数的简单而直接的关系就被分开了，量并不就是可数的数目，上述困难便迎刃而解. 从此，古希腊数学更加偏向于几何学. 因为在他们看来，似乎几何学是能处理一切问题的，包括无理数这样的问题在内. 对几何学的偏爱却抑制了古希腊代数学的发展. 后来在他们那里，有关代数学的问题实际上都用几何学的方法来处理，这不能认为就是很好的. 欧多克索的另一项重要贡献，是他继续了安提丰等人的工作，完成了计算曲边形面积和曲面体体积的方法. 这项工作的重要意义不只在于计算那些难于计算的量，更在于推进了穷竭法的研究. 虽然那时还没有清晰的极限的思想，穷竭法已经预示着微积分学的思想正在萌发.

欧多克索的学生美尼克谟（Menaechmos，公元前 375？ ~前 325？ ）的最重要的成就是发现了圆锥曲线. 他在这方面的工作可能也是试图解决上述三大作图难题而引起的. 他选取了顶角分别为直角、锐角和钝角的三种圆锥，分别以一垂直于锥面一母线的平面与之相割，这样就得到了抛物线、椭圆和双曲线（他还只知道双曲线的一个支）. 圆锥曲线的发现对于几何学以及天文学、物理学的发展都十分重要. 不过美尼克谟的工作也还只是一个开端.

古希腊后期，学术中心转移到了埃及的亚历山大城，古希腊数学的最后成果是在那里总结和完成的. 生活在亚历山大城的欧几里得（Euclid of Alexandria，公元前 323？ ~前 235？ ）是古希腊最享盛名的数学家，以他的主要著作《几何原本》（以下简称《原本》）而著称于世. 他的工作的重大意义在于把前人的数学成果加以系统的整理和总结，以严密的演绎逻辑把建立在一些公理之上的初等几何学知识构成为一个严整的体系. 这部著作中的数学内容也许没有多少为他所创，但是关于公理的选择，定理的排列以及一些严密的证明无疑是他的功劳，在这些方面他的工作十分出色，《原本》在当时就很受数学家们注意，直到 19 世纪之前，它都是欧洲的数学基本教科书. 我国在 1607 年就出版了它前六卷的汉译本. 除了《原本》之外，欧几里得还有其他一些数学著作和物理学著作.

阿基米德（Archimedes，公元前 287？ ~前 212）是古希腊后期最伟大的科学家，他的工作涉及到理论和实用的许多领域. 在数学方面他留下了不少著作，主要是几何学方面的，这些著作被认为是古希腊数学的顶峰. 阿基米德着重研究了一些形状比较复杂的面积和体积的计算方法，如球体的面积、体积与其外切圆柱的面积、体积之比，求抛物线所围面积和弓形面积的方法，求螺线（$\rho = a\theta$）所围面积的方法等等. 他应用穷竭法解决了许多难题. 他计算圆周率，得$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$，他在计算螺线所围面积时所用的方法已非常接近微积分的方法了. 他还会用圆锥曲线的方法解了相当于$x^3 - ax^2 + b^2c = 0$这样一个三次方程. 阿基米德研究

数学是为了得到在实际中有用的结果，和他的前人的目标不完全相同，但他所用的证明的方法则较他的前人更为精确和严谨. 他既继承和发扬了古希腊研究抽象数学的科学方法，又使数学的研究与实际应用联系起来，这在科学发展史上的意义是重大的，对后世有极为深远的影响.

阿波罗尼的主要工作是在数学上，他追随欧几里得的弟子从事学术工作. 他的《圆锥曲线》一书被认为是古希腊最杰出的数学著作之一，相当一个时期之内使他的后人在圆锥曲线的几何学问题上几乎无事可做. 阿波罗尼是第一个从同一圆锥的截面上来研究圆锥曲线的人，他以一个平面按不同的角度与圆锥相交，分别得出了抛物线、椭圆和双曲线，同时他也弄清楚了双曲线有两个分支. 他给出了圆锥曲线的定义，说明了求一圆锥曲线的直径、有心圆锥曲线的中心、抛物线和有心圆锥曲线的轴的方法和作圆锥曲线的切线的方法，讨论了双曲线的渐近线和共轭双曲线，研究了有心圆锥曲线焦点的性质等等. 阿波罗尼虽尚无坐标的概念，但在他的讨论中已隐含了坐标的意思. 除了这部著作之外，阿波罗尼还有其它一些有价值的数学著作.

3. 欧几里得几何

希腊人了解埃及人所能做的，他们必定是从后者那里学到了关于线、角、形的很多有用定律——埃及人大概是通过经验概括而得知这些定律的. 希腊人把这种知识命名为几何学，即土地测量之意. 然而，人们了解的几何定律越多，继续用经验概括来认识另外的定律就变得越棘手；从已知定律推出进一步的定律则是更可靠、更有效的方法. 希腊人在把演绎法纳入他们发现新定律的方法中迈出了决定性的一步：他们发现演绎法是个使人愉快的方法后，即便对无可疑问的几何命题，也开始构造它们的演绎证明. 传统的说法把使几何学成为一门理论科学的进一步成就，归功于毕达哥拉斯. 这一成就包括用这样的方法把系统性的秩序引入几何学，即选择几个特殊的定律作为基本定律，并试图从它们推演出所有其它的已知定律；它还包括引入更抽象的几何概念，如没有宽度的线的概念，以及一线能与一圆相切因而同该圆仅有一个公共点的概念. 希腊人珍视几何学的理论研究，是由于它自身的缘故，而不仅是由于它的有益应用；毕达哥拉斯及他之后的柏拉图之所以抬高几何学在理论上的重要性，是由于几何学在他看来，它是抽象的、永恒的纯正宗教式的.

公元前 300 年左右，欧几里得写出了《原本》. 在这部著作中，他汇集并系统地表述了当时可得到的全部几何知识. 该书把希腊的几何学提高到一个新的水平，而且是西方思想文献中最有影响的经典之一. 在整个古代、整个中世纪和 19 世纪中以前的近代时期里，欧几里得的《原本》既被用作几何教科书，又被当成严密科学思维的典范.

欧几里得在《原本》中的作法是按照系统的演绎方式展开几何学：他使用了关于线、角、形的五个不予证明的原理，把它们称为公设；他借助于公理和定义，从这些公设进一步推出了大量命题（定理）. 欧几里得的公设如下：

（1）从任一点到其它的任一点可作一条直线；

（2）任一直线可在一直线上不断延长；

（3）已知任一点和任一距离，可作出以该点为中心并且以该距离为半径的一圆；

（4）所有直角彼此相等；

(5) 若一直线与其它两直线相交，以致该直线一侧的两内角之和小于两直角，则那两直线延伸足够长后必相交于该侧.

除公设外，欧几里得还陈述了其它五个不予证明的原理，称作公理（或共同见解），如“与同一物相等的一些物，它们彼此相等”. 公设和公理之间的主要区别似乎是公设专门处理几何的题材（线、角、形），而公理则须处理量之相等的更一般概念——几乎每门学科都用得着的概念. 近代的数学家和逻辑学家一般不是这样区分公理和公设的，“公理”和“公设”这两术语在现在可以互换使用.

对所用的每个几何术语都尽力去定义，这也是欧几里得的方法的一个要点. 下面是他的一些定义，按其在《原本》的出现次序编号：

(1) 点是没有部分的那种东西；

(2) 线是没有宽度的长度；

(3) 直线是同其上各点看齐的线；

(4) 图形是被任一边界或任何一些边界所包含的那种东西；

(5) 平行直线是这样的一些直线，它们在同一平面内，并且把它们往两个方向无限延长后，它们在两个方向上都不相交.

欧几里得的目的是从公设以及公理和定义出发推出他的所有其它的几何命题，先推出平面几何的命题，然后推出立体几何的命题. 在《原本》中证明了命题有两类. 一些命题是普遍定律：如第一篇的命题 47 说，“直角三角形斜边上的正方形等于两直角边上的两个正方形之和”. 但是，其它许多命题是作为要求的作图而表述的：如第一篇的命题 1 为“在给定的有限直线上作一个等边三角形”. 用直尺和圆规来进行作图的一种方法是按这样一种方式设计的，该方式使得人们有可能证明按该方法去做就会完成作图（这里涉及了构造的概念，这个概念后来成了康德数学哲学的核心）.

两千年后的完善，两千多年以来，欧几里得的《原本》历受一切挑战仍存于世，并且作为一个登峰造极的数学杰作而屹立着，它的证明之严格性被誉为完美无瑕. 然而，在 19 世纪中，数学家们的严格性标准大为提高了，人们逐渐认识到，欧几里得的证明中的某些地方，他所陈述的假设不足以像他希望的那样仅仅通过形式的演绎就能得到他的结论. 要填补这些逻辑漏洞所必须的假设，同欧几里得确已陈述的公设相比，在内容之重要性上不亚于后者，也并非不如后者那样值得明白地表述出来.

在原始术语、定义和公设的选择上，允许多大的灵活余地是合法的呢？当代的数学家认为，可以允许相当大的灵活余地. 很可能会有关于原始术语、定义和公设的这样一些选择方案，它们将导致对同一题材的、虽有差异却同样合法的系统阐述. 所以，在 D · 希尔伯特所创造的对欧几里得几何的现代公理化中，六个原始定义是“点”、“线”、“平面”、“关联”、“介于”和“迭合”. 稍后 O · 维布伦作出了一种不同的公理化，其中仅用了“点”、“介于”和“迭合”这几个术语，并且他的公理集也与希尔伯特的不同. 差别更大的是 E · V · 亨廷顿所搞的公理化，他仅把“球面”和“包含”作为原始术语，他也只得用不同的公理. 所有这些公理化都是互不相同的，但都是同一题材的系统阐述，因为在所有这些公理化中，同样的一些欧几里得定理最终都能得到证明. 从现代的观点来看，所有这些公理化都是完全合法的，尽管就它们的术语基本集而论，它们一个比一个更节省.

§1.3 初等数学的发展以及埃及、印度、中国的数学成就

原始人时期，已经开始记数（刻痕）记载获物，开始有简单的整数概念，但它不能成为真正意义上的数学.

数学的发展不能只归结为量的增加，而是包含着质的变化，这些变化与数学对象本质上的扩展以及新概念、新理论的形成有关. 然而，在这里并不摈弃现存的理论，它们不过是得到深化和推广. 例如，罗巴切夫斯基几何并不排斥欧几里得几何，但两种几何理论被包括在某个一般的体系中，这是数学发展的一个特点. 数学的发展既受其它科学和技术的影响，又有着自己“内部”的道路. 每个因素在各种具体情况下的作用是不同的. 归根到底，起决定性作用的是其它科学——主要是通过它们和实践的影响. 如果说数学发展的逻辑是由数学对象的客观逻辑决定的，那么社会条件则决定了它的速度. 自公元前 7 ~ 5 世纪纯数学形成之后，数学发展的第一个时期是初等数学时期. 这个时期一直延续到 17 世纪，并且又可划分为根本不同的两个阶段. 第一个阶段（希腊数学阶段）的特点是，几何学得到深入发展并且占据着统治地位，希腊人把它发展到紧接着解析几何和积分学的建立；第二个阶段的特征是，初等代数得到长足发展并形成数的一般概念（实数）且得到完善，在这个阶段，笛卡儿引进了代数的现代符号，从而使代数获得了最适合其内容的形式. 第二个阶段开始于公元前 3 至 2 千年间的许多国家：埃及、巴比伦、中国、印度，以及西欧一些国家.

数学发展的下一个时期是从 17 世纪初到 19 世纪中叶. 通常把它定义为变量数学时期，这正如把初等数学定义为关于常量和最简单几何图形的科学一样，这种定义是不精确的. 应当把初等数学定义为可构造数学更为合适. 它不仅研究常量之间的联系，而且还研究变量之间的联系，即函数（圆面积与半径、角的正弦的相关性等），也研究一些曲线和曲面；从本质上看，还使用了极限概念（如在求圆周长时），所有这些希腊数学都有. 然而，在这里所涉及的只是在构造上已给定了的图形和函数，以及确定的极限过程. 而曲线、函数、极限的一般概念，在初等数学中简直是不存在的. 希腊人把不是用确定的几何作图法给出的曲线看做是“机械曲线”.

1. 古代两河流域和古埃及的数学

数学的产生源于生产、交换和天文学计算的需要，幼发拉底河和底格里斯河区两个地区很早就有了自己的数学. 两河流域地区的记数法是十进制与六十进制并用，为了计算方便，人们还编制了许多数学表，在一些泥板上我们就看到了乘法表、倒数表、平方表、平方根表、立方表、立方根表等等，其中的倒数表一直计算到 60^{19} 这样大数的倒数. 他们在代数学方面的工作很有成绩，不但能解一元一次方程、多元一次方程，也能解一些一元二次方程，甚至一些较为特殊的三次方程和四次方程. 在一块泥板上我们竟然看到他们解了这样一个指数方程：$(1+0.2)^x=2$，得出 $x=3.8$ 的正确答案. 几何学方面，他们知道半圆的圆周角是直角，知道正方形的对角线为边长的 $\sqrt{2}$ 倍. 他们有计算直角三角形、等腰三角形和梯形面积的正确公式；他们也有计算正圆柱体和平截头正方锥体体积的正确公式. 他们所用的圆周率为 $\pi=3$ 或 $\pi=3.125$. 把周角分为 $360°$，$1°$ 分为 $60'$，$1'$分为 $60''$，即我们现在所通用的方法，就是从古代两河流域开始的. 古埃及人在数学上的工作我们现在知道的也不太多，这可能都

是纸草书不如泥板书能耐长期保存之故. 古埃及人记数用的是十进制，有他们自己的记数方法. 他们也能解一些代数方程，直至比较简单的一元二次方程. 他们在几何学上的成就似乎要大一些. 有记载说，因为每年尼罗河泛滥之后都要重新丈量土地以确定当年这些土地的赋税，有许多计算土地面积的工作要做，这当是几何学在那里发展起来的重要原因之一. 我们看到了他们计算三角形和梯形面积的方法. 他们所用的圆周率为 $\pi = 3.1605$. 他们也有用以计算平截头正方锥体体积的公式，和我们现在所用的公式完全一致. 虽然我们所见的古埃及人的数学文献不多，但是古埃及人的巨大石砌建筑告诉我们，那些石块无疑是经过周密的计算，然后再按一定的形状和尺寸加工好了以后才能堆砌上去的，没有相当程度的数学知识，这些巨大的工程就难以设想.

2. 古印度的数学成就

古印度在数学方面有相当大的成就，在世界数学史上有重要的地位. 自哈拉巴文化时期起，古印度人用的就是十进制记数，但是早期还没有位值法. 大约到了公元 7 世纪以后才有位值法记数，不过开始时还没有“零”的符号，只用空一格来表示. 公元 9 世纪后半叶始有零的符号，写作“·”，这时古印度的十进制位值法记数就完备了. 后来这种记数法为中亚地区许多民族所采用，又经过阿拉伯人传到了欧洲，逐渐演变成为现今世界上通用的“阿拉伯记数法”，这是古印度人的一大贡献.

现存古印度最早的有关数学的著作名为《准绳经》，这是一部讲述祭坛修筑的书，大约成书于公元前 5 ~ 4 世纪，其中包含了一些几何学的知识. 这部书表明，那时他们已经知道了勾股定理，他们实际使用的圆周率为 $\pi = 3.09$. 古印度人在天文学计算中很早就运用了三角学，在另一部书《太阳悉檀多》中即有这方面的内容，它给出了最早的三角函数表（相当于现在的正弦函数表）. 公元 499 年成书的《圣使集》中有关数学的内容共有 66 条，包括了算术运算、乘方、开方以及一些代数学、几何学和三角学的规则. 《圣使集》还研究了两个无理数相加的问题，得到了正确的公式，对于简单一元二次方程求解和简单代数恒等式的证明也有所研究. 在三角学方面他又引进了正矢函数. 他给出的圆周率为 $\pi = 3.1416$.

公元 7 ~ 13 世纪是古印度数学成就最辉煌的时期，其间的著名人物有梵藏（Brahmagupta，598 ~ ？），大雄（Mahavira，9 世纪），室利驮罗（Sridhara，999 ~ ？）和作明. 梵藏约于 628 年写成《梵明满悉檀多》，对许多数学问题进行了深入的探讨. 梵藏是古印度最早引进负数概念的人，他还提出了负数的运算方法. 他对零作为一个数已有所认识，但他错误地认为零除零还是等于零. 他提出了解一般二次方程的规则，得出二次方程 $x^2 + px - q = 0$ 的根为 $x = \dfrac{\sqrt{p^2 - 4q} - p}{2}$. 他给出了不定方程 $ax + by = 0$ 的整数解和处理不定方程 $ax^2 + 1 = y^2$ 的方法. 他还得出求等差数列末项以及数列之和的正确公式. 在几何学方面，他有以四边形之边长求四边形面积的正确公式，即

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

（S 为四边形的面积，a、b、c、d 为各边之长，s 为四边之和的一半）. 他所用的圆周率为 $\pi = \sqrt{10} \approx 3.1623$. 大雄继续他前人的工作，他的主要著作是《计算精华》（约 830 年）. 大雄认识到零乘以任一数都等于零，不过他又错误地认为以零除一个数仍然等于这个数. 他