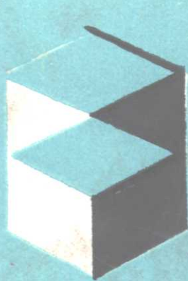
陈载赋编



# 土建工程中的微分方程

## 简易解法

重庆出版社

# 内 容 提 要

求解微分方程是一个复杂的高等数学问题，往往使人无从着手，甚至花费很大精力而得不出答案。本书力图对常见各类型微分方程提出具体的解算方法和步骤，并附有土建工程中常遇到的典型微分方程算例如：应力集中问题．质点的振动、摆、圆板、厚壁筒、梁、悬链线、立柱的纵向挠曲、圆管、地震时单质点系的振动、薄壁构件的约束扭转、勒让德方程、贝塞尔方程、开口薄壁杆受压、圆柱壳受水压作用、悬索桥、弹性地基上圆拱的挠度曲线、矩形薄板、球壳在风压作用下的内力、弹性理论的平面问题、直杆的纵向振动、以及地震时弯曲梁结构的计算等四十余例．只要掌握初等数学知识和积分的基本公式，藉本书之助，就可较简便地得出结果．

**土建工程中的微分方程** 简易解法

重庆出版社出版（重庆李子坝正街 102 号）
中国市政工程西南设计院发行
成都市银河印刷厂印刷
开本：787×1092 1/16 印张：8 字数：195千
1985年10月第一版 1985年10月第一次印刷
印数：1—10000

书号：13114·31 定价：1.82元

# 序

在力学和结构领域中，经常会遇到微分方程，求解微分方程，是一个较复杂的高等数学问题。对于大多数从事工程设计的科技人员，往往不可能花费很大的精力来进行如此复杂的运算，在一定程度上影响了工程设计精度，并且对提高力学和结构理论水平，也会增加颇大的阻力。我院陈载赋工程师，积累了从事设计、施工、教学三十多年的经验，总结出了一些求解微分方程的简易方法，便于实际应用，今已刊印出版。一方面，希望通过交流，使这些方法能在四化建设中发挥更好的作用；另一方面，也希望对鼓励富有实际经验的同志著书立说能有所促进。

本书实际属于结合工程应用的数学工具书，目前这种工具书尚不多见。本书对从事教学、科研、设计和施工的科技人员都有一定的参考价值。刊印出版这类书籍，尚属初次尝试，不足之处，希国内专家学者批评指正，俾再版时得以更正补充。

中国市政工程西南设计院院长<br>高级工程师　　卢复中

1985年5月于成都

# 目　　录

# 绪　论

## 1　微分方程

一个包含有导数或微分的方程，称为微分方程。如：

$$\frac{dy}{dx}+y=0 \tag{a}$$

$$(xy-y^2)dx+x^2dy=0 \tag{b}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+\sin y=0 \tag{c}$$

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2y\frac{dy}{dx}+4x=0 \tag{d}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x \tag{e}$$

## 2　常微分方程与偏微分方程

1　常微分方程

一个自变量（如 x）一个 因变量（如 y），以及因变量对自变量的一个或几个导数之间的关系。如(a)～(d)。

2　偏微分方程

二个或二个以上的自变量（如x,y……）一个因变量（如z)，以及因变量对几个 自变量的一个或几个偏导数之间的关系。如(e)。

## 3　微分方程的阶

即为该方程中最高阶导数的阶数。如(a)、(b)、(d)为一阶；(c)、(e)为二阶。

## 4　微分方程的次数

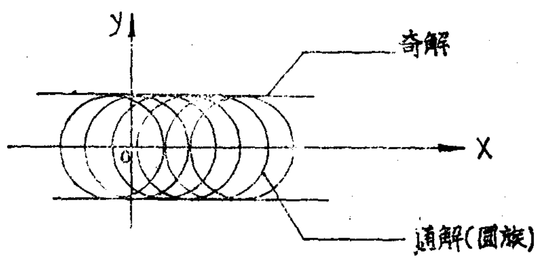
当微分方程中所包含的一切导数都是有理的和整数次幂，则其最高阶导数的幂数，称为微分方程的次数。如(a)、(b)、(c) 及(e)为一次方程；而(d)为二次方程。在一个微分方程中因变量及其导数只有一次，并且不存在更高的乘幂或乘积，这种方程称为线性微分方程，如(a)与(e)。

## 5 微分方程的解

1 包含与微分方程阶数相等的任意常数的数目，这样的解，称为微分方程的通解（一般解、全解）。

2 于通解中，给任意常数以某些数值，使适合某些特定条件，所得到的解称为特解（特殊解）。具体运算可参看“1.3.2、2.2.2例3、2.4.2例1和2.8.2例3。”

3 所谓一阶微分方程的奇解（奇异解），是指这样一条积分曲线，在这条曲线上每一点至少还通过另外一条积分曲线，如图—1



图—1

4 微分方程解的验证

将求得之解及它的导数代入所给微分方程中，若等号两边相等，则解正确。具体验证参见“1.4.2例及2.8.2例1”。

## 6 主要符号

本书采用主要符号如下，后文中未加注明的符号，其涵义均以此为准。

x、y、z、t、u、v——变量

a、b、c、m、n、k——常数

F（ ）、f（ ）——函数

X、Y——坐标轴

O——坐标原点

D——算子符号

$$y'=\frac{dy}{dx}\qquad y''=\frac{d^2y}{dx^2}\qquad y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}$$

# 第一篇 常微分方程

## §1 一阶方程

1.1 方程的型式

1.1.1 全微分方程 $F_1(x,y)dx+F_2(x,y)dy=0$

且 $\dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}$

1.1.2 变量分离的微分方程 $F(x)dx+f(y)dy=0$

1.1.3 齐次微分方程 $F_1(x,y)dx+F_2(x,y)dy=0$

$F_1(x,y)$及$F_2(x,y)$是x，y的同次的齐次函数.

1.1.4 准齐次型微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=F\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

1.1.5 线性微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+F(x)y=f(x)$

1.1.6 柏努利方程 $\dfrac{dy}{dx}+F(x)y=f(x)y^n$

1.1.7 黎卡迪方程 $\dfrac{dy}{dx}=F_1(x)+F_2(x)y+F_3(x)y^2$

1.1.8 隐微分方程 $F(x,y,y')=0$ $y=xy'+F(y')$

$F(y,y')=0$ $F(x,y')=0$

1.2 全微分方程

$$F_1(x,y)dx+F_2(x,y)dy=0 \tag{1—1}$$

且 $$\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} \tag{1—1$_a$}$$

式中：$F_1(x,y)$、$F_2(x,y)$——变量x,y的连续函数。

1.2.1 （1—1）式的通解

$$\int F_1(x,y)\,dx^{①}+\int\left[F_2(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int F_1(x,y)dx^{②}\right]dy=C \tag{1—1$_b$}$$

注：①在此式中将y视为常数而对x进行积分

②在积分式中将x视为常数而对y进行微分

1.2.2 例：解微分方程

$$x^2y'-y^2-(y'-1)(2xy-1)=0 \tag{a}$$

解：a．整理(a)式得

$$y'(x^2-2xy+1)-(y^2-2xy+1)=0$$

$$(2xy-y^2-1)dx+(x^2-2xy+1)dy=0$$

由(1—1)式可知

$$F_1(x,y)=2xy-y^2-1$$

$$F_2(x,y)=x^2-2xy+1$$

且 $$\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}=2x-2y$$

b. 由$(1—1)_b$式

$$\int(2xy-y^2-1)dx+\int\left[(x^2-2xy+1)-\frac{\partial}{\partial y}\int(2xy-y^2-1)dx\right]dy=C$$

$$x^2y-xy^2-x+\int\left[x^2-2xy+1-\frac{\partial}{\partial y}(x^2y-xy^2-x)\right]dy=C$$

$$x^2y-xy^2-x+\int\left[x^2-2xy+1-x^2+2xy\right]dy=C$$

$$x^2y-xy^2-x+y=C \qquad (x-y)(xy-1)=C$$

1.3 变量分离的微分方程

$$F(x)dx+f(y)dy=0 \tag{1—2}$$

1.3.1 （1—2）式的通解

$$\int F(x)dx+\int f(y)dy=C \qquad (1-2)_a$$

1.3.2 例

1. 一质量为m的质点，沿直线运动，受阻力 bv 作用，阻力是速度 v 的线性函数，而对时间t和位置都无关系．质点由静止出发，作用在质点上的力 $P=a-bv$．其运动微分方程为

$$m\frac{dv}{dt}=a-bv \tag{a}$$

解：a．变(a)式为 $$\frac{dv}{dt}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}v$$

分离变量得 $$\frac{dv}{a-bv}=\frac{dt}{m} \tag{b}$$

b．取$a-bv=u$ $\quad dv=-\frac{du}{b} \qquad -\frac{du}{bu}=\frac{dt}{m} \qquad -\frac{du}{bu}-\frac{dt}{m}=0 \qquad$ (c)

由$(1—2)_a$式 $-\frac{\ln u}{b}-\frac{t}{m}=C_1$ 因质点系由静止出发，故当

$$t=0 \quad v=0 \qquad -\frac{\ln(a-bv)}{b}-\frac{t}{m}=C_1 \qquad -\frac{\ln a}{b}=C_1$$

$$\frac{\ln a}{b}-\frac{\ln(a-bv)}{b}=\frac{t}{m} \qquad \ln\frac{a}{a-bv}=\frac{b}{m}t$$

$$a-bv=ae^{-\frac{b}{m}t} \qquad v=\frac{a}{b}\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

c． 设取y轴为运动路线，则 $\quad v=\frac{dy}{dt}$

于是 $\frac{dy}{dt}=\frac{a}{b}\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right)$

$$y=\int\frac{a}{b}dt-\frac{a}{b}\int e^{-\frac{b}{m}t}dt+C_2$$

$$y=\frac{a}{b}t-\frac{a}{b}e^{-\frac{b}{m}t}\cdot\frac{(-m)}{b}+C_2=\frac{a}{b}t+\frac{am}{b^2}e^{-\frac{b}{m}t}+C_2$$

当$t=0$时 $y=0$，于是$C_2=-\frac{am}{b^2}$

$$\therefore\quad y=\frac{a}{b}t+\frac{am}{b^2}(e^{-\frac{b}{m}t}-1)$$

2. 在空气中竖直上抛物体，物体质量为m，引力为mg，取空气阻力$p=b^2v^2$，v 为物体速度。y轴正向向上，运动的微分方程为

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-b^2v^2 \qquad (a)$$

求物体的上抛极限高度。

解：a. 令$g=n^2k^2$ $\quad n^2=\frac{b^2}{m}$

(a)式化为 $\frac{dv}{dt}=-n^2(k^2+v^2)$

分离变量得 $\frac{dv}{k^2+v^2}=-n^2dt \qquad \frac{dv}{k^2+v^2}+n^2dt=0 \qquad (b)$

b. 由$(1-2)_a$式积分(b)式得 $\frac{1}{k}\text{arctg}\frac{v}{k}+n^2t=C_1$

设当时间$t=0$时的初速度为$v_0$，则$C_1=\frac{1}{k}\text{arctg}\frac{v_0}{k}$

$\therefore\quad \frac{1}{k}(\text{arctg}\frac{v}{k}-\text{arctg}\frac{v_0}{k})=-n^2t \qquad$ 取$\text{arctg}\frac{v_0}{k}=r$

$$\text{arctg}\frac{v}{k}-r=-n^2kt \qquad \frac{v}{k}=\text{tg}(r-n^2kt) \qquad v=k\,\text{tg}(r-n^2kt)$$

c. 又$v=\frac{dy}{dt}$ $\qquad \frac{dy}{dt}=k\,\text{tg}(r-n^2kt)$

取$r-n^2kt=u$ $\qquad \frac{du}{dt}=-n^2k \qquad dt=-\frac{du}{n^2k}$ 于是

$$y=k\int\text{tg}(r-n^2kt)dt+C_2=\frac{-1}{n^2}\int\text{tg}\,u\,du+C_2$$

$$y=\frac{1}{n^2}\ln\cos u+C_2=\frac{1}{n^2}\ln\cos(r-n^2kt)+C_2$$

当$t=0$时 $\quad y=0 \qquad C_2=\frac{-1}{n^2}\ln\cos r$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{n^2}\left[\ln\cos(r-n^2kt)-\ln\cos r\right]=\frac{1}{n^2}\left[\ln\frac{\cos(r-n^2kt)}{\cos r}\right]$$

d. 当 $\cos(r-n^2kt)=1$ 时得 $y_{max}$

$$\therefore\quad y_{max}=\frac{1}{n^2}\left[\ln\frac{1}{\cos r}\right]=\frac{1}{n^2}\ln\sec r$$

## 1.4 齐次微分方程

$$F_1(x,y)dx+F_2(x,y)dy=0 \qquad (1-3)$$

$F_1(x,y)$ 及 $F_2(x,y)$ 是x、y的同次的齐次函数。

### 1.4.1 方程的解法

1. 取 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_1(x,y)}{F_2(x,y)}$ $\qquad (1-3)_a$

2. 以 $y=tx$ 代入 $(1-3)_a$ 式的等号右边，消去x后得 $F_3(t)$。

3. $\ln x+\displaystyle\int\frac{dt}{t-F_3(t)}=C$ $\qquad (1-3)_b$

4. 以 $t=\dfrac{y}{x}$ 代入 $(1-3)_b$ 得解。

### 1.4.2 例：解方程 $y^2+x^2\dfrac{dy}{dx}=xy\dfrac{dy}{dx}$ $\qquad$ (a)

**解**：a. 变(a)式为 $\quad y^2dx+x^2dy-xydy=0$ $\qquad$ (b)

$F_1(x,y)=y^2 \qquad F_2(x,y)=x^2-xy$

b. 按 $(1-3)_a$ 式 $\quad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_1(x,y)}{F_2(x,y)}=\dfrac{y^2}{xy-x^2}$ $\qquad$ (c)

c. 令 $y=tx$ 代入(c)式得 $F_3(t)=\dfrac{(tx)^2}{x\cdot tx-x^2}=\dfrac{t^2}{t-1}$

d. 由 $(1-3)_b$ 式得 $\quad \ln x+\displaystyle\int\frac{dt}{t-\frac{t^2}{t-1}}=C$ $\qquad$ (d)

$$\ln x+\int\frac{1-t}{t}dt=C \qquad (d)$$

$$\ln x+\ln t-t=C \qquad \ln xt=C+t \qquad xt=e^{c+t}=e^c\cdot e^t \qquad (e)$$

e. 令 $e^c=C_1$ 且 $t=\dfrac{y}{x}$ 代入(e)式

$$\therefore\quad x\frac{y}{x}=C_1e^{\frac{y}{x}} \qquad y=C_1e^{\frac{y}{x}}$$

f. 验证 由解 $y=C_1e^{\frac{y}{x}}$ 可得

$f(x,y)=C_1e^{\frac{y}{x}}-y$ $\qquad$ 按隐函数的微分法则

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{-y}{x^2}C_1e^{\frac{y}{x}} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{1}{x}C_1e^{\frac{y}{x}}-1$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}=\frac{\frac{y}{x^2}C_1e^{\frac{y}{x}}}{\frac{1}{x}C_1e^{\frac{y}{x}}-1}$$ 代入(c)式

$$\frac{\frac{y}{x^2}C_1e^{\frac{y}{x}}}{\frac{1}{x}C_1e^{\frac{y}{x}}-1}=\frac{(C_1e^{\frac{y}{x}})^2}{x(C_1e^{\frac{y}{x}})-x^2} \qquad \frac{\frac{1}{x^2}(C_1e^{\frac{y}{x}})^2}{\frac{1}{x}C_1e^{\frac{y}{x}}-1}=\frac{\frac{1}{x^2}(C_1e^{\frac{y}{x}})^2}{\frac{1}{x}C_1e^{\frac{y}{x}}-1}$$

故解　$y=C_1e^{\frac{y}{x}}$ 正确

## 1.5　准齐次型微分方程

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{1—4}$$

### 1.5.1　方程的解法

1．如(1—4)式中　$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$时，则

1）变(1—4)式为$\frac{dv}{du}=F\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right)$　　(1—4)$_a$

(1—4)$_a$式F前之符号与(1—4)式F前之符号相同，见例1。

2）以$v=tu$ 代入(1—4)$_a$式等号右边，消去u后得f(t)。

3）$$\int\frac{du}{u}+\int\frac{dt}{t-f(t)}=C \tag{(1—4)$_b$}$$

4）以$t=\frac{v}{u}$ 代入(1—4)$_b$式消去 t 后，再以 $u=x-m$，$v=y-n$ 代入得解。m、n由(1—4)$_c$式解出。

$$\left.\begin{array}{l}a_1m+b_1n+c_1=0\\a_2m+b_2n+c_2=0\end{array}\right\} \tag{(1—4)$_c$}$$

2．如(1—4)式中　$a_1b_2-a_2b_1=0$　而$b_1\neq 0$时，则

1）以$k=\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}$　　将(1—4)式变为

$$\frac{dv}{dx}=a_1+b_1F\left(\frac{v+c_1}{kv+c_2}\right) \tag{(1—4)$_d$}$$

2）$$\int\frac{dv}{a_1+b_1F\left(\frac{v+c_1}{kv+c_2}\right)}-\int dx=C \tag{(1—4)$_e$}$$

3）以$v=a_1x+b_1y$ 代入(1—4)$_e$式得解

3．如(1—4)式中$a_1b_2-a_2b_1=0$　而$b_1=0$时，则

1）当$b_2=0$　　(1—4)式变为

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{a_1x+c_1}{a_2x+c_2}\right) \qquad (1—4)_f$$

积分$(1—4)_f$得解

2）当$a_1=0$ （1—4)式变为

$$\frac{dv}{dx}=b_2F\left(\frac{c_1}{v+c_2}\right)+a_2 \qquad (1—4)_g$$

$$\int\frac{dv}{b_2F\left(\frac{c_1}{v+c_2}\right)+a_2}-\int dx=C \qquad (1—4)_h$$

以$v=a_2x+b_2y$代入$(1—4)_h$式得解

1.5.2 例：

1．解方程 $(3y+4x+1)dx+(x+y+1)dy=0$ (a)

解： a.变(a)式为 $\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{4x+3y+1}{x+y+1}\right)$ (b)

(b)式中 $a_1=4$ $b_1=3$ $c_1=1$ $a_2=1$ $b_2=1$ $c_2=1$

$a_1b_2-a_2b_1=4\times1-1\times3=1$ 由$(1—4)_a$式变(b)式为

$$\frac{dv}{du}=-\left(\frac{4u+3v}{u+v}\right) \qquad (c)$$

b. 令$v=tu$ 则$t=\frac{v}{u}$ 由(c)式可得

$$f(t)=-\frac{4u+3tu}{u+tu}=-\frac{4+3t}{1+t}$$

c. 按$(1—4)_b$式得 $\int\frac{du}{u}+\int\frac{dt}{t-f(t)}=C$ $\int\frac{du}{u}+\int\frac{(t+1)dt}{4+4t+t^2}=C$

$$\ln u+\frac{1}{2}\ln(4+4t+t^2)+\frac{1}{2+t}=C \quad \ln u+\ln(2+t)+\frac{1}{2+t}=C$$

d. $t=\frac{v}{u}$ $\therefore$ $\ln u+\ln\left(2+\frac{v}{u}\right)+\frac{1}{2+\frac{v}{u}}=C$ $\ln(2u+v)+\frac{u}{2u+v}=C$

又$u=x-m$ $v=y-n$ 由$(1—4)_c$式

$$\begin{cases}4m+3n+1=0\\ m+n+1=0\end{cases} \quad 求得 \quad \begin{matrix}m=2\\ n=-3\end{matrix}$$

$\therefore$ $u=x-2$ $v=y+3$ 于是

$$\ln(2x-4+y+3)+\frac{x-2}{2x-4+y+3}=C$$

$$\ln(2x+y-1)+\frac{x-2}{2x+y-1}=C$$

2．解方程 $(y+2x)dx+(1-4x-2y)dy=0$ (a)

解：a. 将(a)式变为 $\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{2x+y}{-4x-2y+1}\right)$ (b)

式中： $a_1=2$ $b_1=1$ $c_1=0$ $a_2=-4$ $b_2=-2$ $c_2=1$

$$a_1b_2-a_2b_1=2\times(-2)-(-4)\times 1=0 \quad 此时b_1\neq 0$$

令 $b_2=kb_1$　$a_2=ka_1$　$k=\frac{b_2}{b_1}=\frac{-2}{1}=-2$　　按$(1—4)_d$式将(b)式变为

$$\frac{dv}{dx}=a_1+b_1F\left(\frac{v+c_1}{kv+c_2}\right)=2-\frac{v}{-2v+1}=\frac{2-5v}{1-2v} \qquad (c)$$

b. 由$(1—4)_e$式得 $\int\frac{1-2v}{2-5v}dv-\int dx=C$

$$\int\frac{dv}{2-5v}-\int\frac{2v}{2-5v}dv-\int dx=C \qquad (d)$$

$$-\frac{1}{5}\ln(2-5v)+\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\ln(2-5v)+\frac{2}{5}v-\frac{4}{25}-x=C \qquad (d)$$

c. 以$v=a_1x+b_1y=2x+y$　代入(d)式得解

$$10y-5x-\ln(2-10x-5y)=C$$

1.6 线性微分方程　$\frac{dy}{dx}+F(x)y=f(x)$　　(1—5)

式中：$F(x)$、$f(x)$是x的连续函数或常数。

1.6.1 方程的解法

1. 由公式　$\ln u+\int F(x)dx=0$　　$(1—5)_a$　求u值

2. 由公式　$v=\int\frac{f(x)}{u}dx+C$　　$(1—5)_b$　求v值

3. (1—5)式的通解　$y=vu$　　$(1—5)_c$

1.6.2 例：如图1—1之管件，凹角上应力集中区域的应力，以微分方程　$\frac{d\tau}{dR}+\frac{\tau}{R}=\frac{\tau_0 s}{A}$　(a)　求得。

式中$\tau_0$为平均剪应力，s为管件截面中心线长度，A为s所包围的面积。

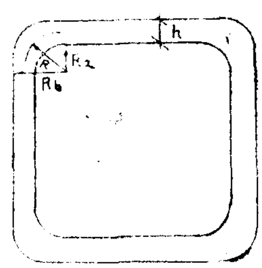


图1—1

解：a. 按式(1—5)可知(a)式中

$$F(x)=\frac{1}{R} \qquad f(x)=\frac{\tau_0 s}{A}$$

由$(1—5)_a$式

$$\ln u+\int\frac{dR}{R}=0 \quad \ln u+\ln R=0 \quad uR=e^0=1 \quad u=\frac{1}{R}$$

b. 由$(1—5)_b$式　$v=\int\frac{\tau_0 s}{A}RdR+C=\frac{\tau_0 s}{2A}R^2+C$

c. 由$(1—5)_c$式　$\tau=vu=\frac{C}{R}+\frac{\tau_0 s}{2A}R$

d. 积分常数C由下式求出　$\int_{R_a}^{R_b}\tau dR=\tau_0 h$

$$\int_{R_a}^{R_b}\left(\frac{C}{R}+\frac{\tau_0 s}{2A}R\right)dR=\tau_0 h \qquad \left[C\ln R+\frac{\tau_0 s}{2A}\cdot\frac{R^2}{2}\right]_{R_a}^{R_b}=\tau_0 h$$

$$C(\ln R_b-\ln R_a)+\frac{\tau_0 s}{4A}(R_b^2-R_a^2)=\tau_0 h$$

$$C=\left[\tau_0 h-\frac{\tau_0 hs}{4A}(R_b+R_a)\right]\frac{1}{\ln\frac{R_b}{R_a}}=\tau_0 h\frac{1-\frac{s}{4A}(R_b+R_a)}{\ln\frac{R_b}{R_a}}$$

于是 $\tau=\frac{\tau_0 h}{R}\cdot\frac{1-\frac{s}{4A}(R_a+R_b)}{\ln\frac{R_b}{R_a}}+\frac{\tau_0 s}{2A}R$

1.7 柏努利方程 $\frac{dy}{dx}+F(x)y=f(x)y^n$ (1—6)

(1—6)式中 $n\neq1$, $n\neq0$

1.7.1 方程的解法

1. 求u值 $\ln u+\int(1-n)F(x)dx=0$ $(1—6)_a$

2. 求v值 $v=\int\frac{f(x)}{u}dx+C$ $(1—6)_b$

3. $\frac{y^{1-n}}{1-n}=vu$ $(1—6)_c$ 得解

1.7.2 例：解方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=m(\ln x)y^2$ (a)

解：a. 由(a)式知 $F(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=m\ln x$, $n=2$

b. 由$(1—6)_a$式 $\ln u+\int(1-2)\frac{1}{x}dx=0$ $\ln u-\ln x=0$ $u=x$

c. 由$(1—6)_b$式 $v=\int\frac{m\ln x}{x}dx+C=\frac{m(\ln x)^2}{2}+C=\frac{m(\ln x)^2+2C}{2}$

d. 由$(1—6)_c$式 $\frac{y^{1-2}}{1-2}=vu=x\cdot\frac{m(\ln x)^2+2C}{2}$

$$-1=\frac{xy\ [m(\ln x)^2+2C]}{2}$$

$$xy\ [m(\ln x)^2+2C]+2=0$$

1.8 黎卡迪方程 $\frac{dy}{dx}=F_1(x)+F_2(x)y+F_3(x)y^2$ (1—7)

式中：$F_1(x)$、$F_2(x)$、$F_3(x)$为x的连续函数。

1.8.1 方程的解法

1. 用观察或试探的方法求得(1—7)式的一个特解$y_1$，(1—7)式变为线性微分方程$(1—7)_a$式。

$$\frac{dz}{dx}+[F_2(x)+2y_1F_3(x)]z=-F_3(x) \qquad (1—7)_a$$

2.求u值 $\int\frac{du}{u}+\int[F_2(x)+2y_1F_3(x)]dx=0$ $(1—7)_b$

3. $v=-\int \frac{F_3(x)}{u}dx+C$ $(1-7)_c$

4. $z=vu$ $(1-7)_d$

5. (1—7)式的通解 $y=\frac{1}{z}+y_1$ $(1-7)_e$

1.8.2 例：解方程 $\frac{dy}{dx}=y^2-\frac{2}{x^2}$ (a)

解：a. 变(a)式为 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{x^2}+y^2$ (b)

由(1—7)式知 $F_1(x)=-\frac{2}{x^2}$ $F_2(x)=0$ $F_3(x)=1$

b. 从(b)式知，如用$y_1=\frac{1}{x}$代替y，满足方程要求，故$y_1$为方程之一特解。

c. 由$(1-7)_b$式 $\int\frac{du}{u}+\int\left[0+2\times\frac{1}{x}\times 1\right]dx=0$

$$\ln u+\ln x^2=0 \qquad ux^2=1 \qquad u=\frac{1}{x^2}$$

d. $v=-\int\frac{1}{\frac{1}{x^2}}dx+C=-\frac{x^3}{3}+C$

e. 由$(1-7)_d$式 $z=vu=\frac{1}{x^2}\left(\frac{-x^3}{3}+C\right)=\frac{3C-x^3}{3x^2}$ 令$3C=C_1$

f. 由$(1-7)_e$式 $y=\frac{1}{z}+y_1=\frac{3x^2}{C_1-x^3}+\frac{1}{x}$

1.9 隐微分方程 $F(x,y,y')=0$ (1—8)

1.9.1 方程的解法

1. 可以用代数方法由(1—8)式解出$y'$的微分方程

1) 分析因式将(1—8)式化为

$$F_1(x,y,y')F_2(x,y,y')\cdots\cdots F_n(x,y,y')=0 \qquad (1-8)_a$$

式中：n为$y'$的次数。

2) 由$(1-8)_a$式可得$y'$的显微分方程

$$\left.\begin{array}{l} y'=F_1(x,y) \\ y'=F_2(x,y) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y'=F_n(x,y) \end{array}\right\} \qquad (1-8)_b$$

$(1-8)_b$式的通解为$f_1(x,y,c)=0$，$f_2(x,y,c)=0$ ……，$f_n(x,y,c)=0$ $(1-8)_c$

3) 由$(1-8)_c$式得(1—8)式的通解

$$f_1(x,y,c)f_2(x,y,c)\cdots\cdots f_n(x,y,c)=0 \qquad (1-8)_d$$

2. 可以用微分法和消去法解出的微分方程

1) 类型$F(y,y')=0$ $(1-8)_e$

(1) 化$(1-8)_e$式为$y=f(y')$ $(1-8)_f$

(2) 令$y_1=y'$代入$(1-8)_f$式得$y=f(y_1)$ $(1-8)_g$

(3) 由$(1-8)_g$式求$f'(y_1)$代入$(1-8)_h$式

$$x=\int\frac{f'(y_1)}{y_1}dy_1+C \qquad (1-8)_h$$

(4) $(1-8)_g$与$(1-8)_h$式即为$(1-8)_e$式通解的参数表示

(5) 如从$(1-8)_e$式中不易解出y，即不易表达为$(1-8)_f$式，则

A. 适当引进t的函数，把$(1-8)_e$式表达为参数方程

$$y=F_1(t) \qquad (1-8)_i$$

$$y'=F_2(t) \qquad (1-8)_j$$

B. 令$y_1=y'$代入$(1-8)_j$式，并由$(1-8)_i$式求$F_1'(t)$

C. 积分 $$x=\int\frac{F_1'(t)}{F_2(t)}dt+C \qquad (1-8)_k$$

D. $(1-8)_i$式与$(1-8)_k$式即为$(1-8)_e$式通解的参数表示

2) 类型$F(x,y')=0$ $(1-8)_l$

(1) 化$(1-8)_l$式为$x=f(y')$ $(1-8)_m$

(2) 令$y_1=y'$代入$(1-8)_m$式得$x=f(y_1)$ $(1-8)_n$

(3) 由$(1-8)_n$式求$f'(y_1)$代入$(1-8)_o$式

$$y=\int y_1f'(y_1)dy_1+C \qquad (1-8)_o$$

(4) $(1-8)_n$式与$(1-8)_o$式即为$(1-8)_l$式通解的参数表达式

(5) 如$(1-8)_l$式不易表达为$(1-8)_m$式，则

A. 适当引进t的函数，把$(1-8)_l$式表达为

$$x=F_1(t) \qquad (1-8)_p$$

$$y'=F_2(t) \qquad (1-8)_q$$

B. 由$(1-8)_p$式求$F_1'(t)$

C. 积分 $$y=\int F_2(t)F_1'(t)dt+C \qquad (1-8)_r$$

D. $(1-8)_p$式与$(1-8)_r$式即为$(1-8)_l$式通解的参数表达式

3. 克莱洛方程 $y=xy'+F(y')$ $(1-8)_s$

1) 以$y'=C$代入$(1-8)_s$式得通解$y=Cx+F(C)$ $(1-8)_t$

2) 令$y'=y_1$代入$(1-8)_s$式中的$F(y')$得$F(y_1)$，从而求出$F'(y_1)$

3) $x=-F'(y_1)$ $(1-8)_u$

$y=-y_1F'(y_1)+F(y_1)$ $(1-8)_v$

$(1-8)_u$式及$(1-8)_v$式为$(1-8)_s$式之奇解的参数方程

1.9.2 例：1.解方程 $x^2y'^2+4xyy'+3y^2=0$ (a)

解：a. 由(a)式分析因式得 $(xy'+3y)(xy'+y)=0$ (b)

b. 由(b)式
$$\left.\begin{aligned}&xy'+3y=0 \qquad y'=\frac{-3y}{x}\\ &xy'+y=0 \qquad y'=-\frac{y}{x}\end{aligned}\right\} \qquad (c)$$