

鲁棒控制系统

LUBANG KONGZHI XITONG

吉明 姚绪梁 / 编著 金鸿章 / 主审

哈尔滨工程大学出版社

鲁棒控制系统

吉 明 姚绪梁 编著
金鸿章 主审

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

鲁棒控制系统/吉明,姚绪梁编著. —哈尔滨:
哈尔滨工程大学出版社, 2002. 10
ISBN 7-81073-361-3

I. 鲁... II. ①吉... ②姚... III. 鲁棒
控制-控制系统 IV. TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 059211 号

内 容 简 介

本书系统地介绍了鲁棒控制的基本理论,主要包括 H_∞ 控制理论中的标准问题、Hankle 设计方法、Riccati 设计方法,及其在线性、非线性系统分析设计中的应用;以卡里托诺夫多项式定理为基础的参数不确定系统的分析和综合;结构奇异值分析设计方法等。本书基本覆盖了鲁棒控制各个研究方面。

本书在内容安排上作了取舍,使之内容简明、结构紧凑。

本书可作为高等学校控制科学与工程学科及相关学科的研究生教材,也可作为自动化及相关学科的高年级本科生教材,本书还可作为专业技术人员的参考书。

哈 尔 滨 工 程 大 学 出 版 社 出 版 发 行
哈 尔 滨 市 南 通 大 街 145 号 哈 工 程 大 学 11 号 楼
发 行 部 电 话 : (0451)2519328 邮 编 : 150001
新 华 书 店 经 销
肇 东 粮 食 印 刷 厂 印 刷

*

开本 850mm×1168mm 1/32 印张 6.375 字数 165 千字

2002 年 10 月第 1 版

2002 年 10 月第 1 次印刷

印数:1—1 200 册

定价:8.50 元

前 言

从经典控制理论、现代控制理论到今天的包括各种智能控制方法在内的新兴控制理论,为适应各种各样的受控对象控制需要,提出了许多控制方法。这些控制理论有力地推动了控制工程的快速发展,有效地解决了许多类型的受控对象的控制问题。

大部分控制理论建立在被控对象的数学模型基础上,被控对象数学模型的准确与否直接影响到控制质量。往往有这种情况发生:理论分析和数字仿真结果表明所设计的控制系统有很好的控制质量,但是据此得到的控制系统参数在实际系统中实用时,控制质量远不如理论分析和数字仿真时的控制效果。这种理论分析和实际应用不一致的一个重要原因就是理论分析使用的被控对象的数学模型不正确。但是,在实际应用中,被控对象准确的数学模型往往是得不到的。这也就是为什么许多控制理论在实际的系统设计中很少被应用,而算法简单、鲁棒性好、可靠性高的各种 PID 控制却广泛应用于各类控制系统。

实际被控对象往往具有非线性、时变性,这些特性很难用精确的数学模型表达,这就形成了构成控制的数学模型的不确定性。这些不确定性影响了许多控制策略的应用。例如,对于最优控制策略,是在给定的数学模型和最优准则意义下的最优,如果数学模型存在着严重的不确定性,那么这种最优是没有意义的。有些被控对象,例如船舶、飞机等运动体,其动力学模型存在严重的不确定性,有些系统参数的误差与标称值是同一量级的,对于这些系统进行鲁棒控制是一种非常好的解决方案。

鲁棒控制针对系统中存在一定范围的不确定性,设计一个鲁棒控制器,使得闭环系统在保持稳定的同时,保证一定的动态性能

品质。鲁棒控制理论研究的问题包括控制系统的鲁控分析和综合两个方面。在鲁棒分析时,要研究系统在各种不确定性情况下,系统受扰后的性能分析,包括系统稳定性和动态性能分析。鲁棒综合研究采用什么样的控制结构、用什么样的鲁棒控制器来使存在不确定性的系统在扰动作用下,仍能保证稳定并有较好的动态性能。

鲁棒控制的研究内容主要有以下两个方面。其一是以加拿大学者 G·Zames 在 20 世纪 80 年代初期提出的 H_{∞} 控制理论,它经过 20 多年的发展,已经形成了一套理论体系,成为分析和设计不确定系统的一个强有力的工具,并且已经成功地应用到一些控制系统中。鲁棒控制的另一分支是以分析系统的鲁棒稳定性和鲁棒性能为基础的系统鲁棒分析和设计,这里主要包括俄国学者卡里托诺夫提出的多项式鲁棒稳定性理论、美国学者 J·C·Doyle 提出的结构奇异值分析方法。

正是由于鲁棒控制在处理系统不确定性方面的优点,鲁棒控制的研究得到了广泛的重视。目前,在许多高等院校中,鲁棒控制已经作为一门研究生课程。尽管目前已经出版了一批有关鲁棒控制的专著和教材,但在实际教学中,还是希望有一本适合工科院校控制科学与工程学科研究生使用的简明教材,以便学生在已掌握的数学和控制理论知识的基础上,用 30 多学时完成此门课程的学习。这本教材就是以这个指导思想而编写的。

编 者

2002 年 9 月

目 录

1. 基础知识	1
1.1 空间概念	1
1.1.1 距离空间	1
1.1.2 线性赋范空间	2
1.1.3 Banach 空间	2
1.1.4 Hilbert 空间	3
1.2 矩阵概念	5
1.3 信号和系统的范数	9
1.3.1 信号的范数	9
1.3.2 系统的范数	13
1.4 H_∞ 范数与 Riccati 方程	15
1.4.1 哈密尔顿阵的性质	15
1.4.2 H_∞ 范数与 Riccati 方程	16
1.4.3 H_∞ 范数与 Riccati 不等式	16
1.5 有理函数阵的内外分解	17
1.6 控制系统的稳定性	20
1.6.1 外部稳定性	20
1.6.2 内部稳定性	22
1.6.3 反馈系统的稳定性	23
1.7 李亚普诺夫方程	27
1.8 线性分式变换与 HM 变换	29
1.8.1 下线性分式变换	29
1.8.2 上线性分式变换	30
1.8.3 HM 变换	32

2. H_∞ 控制理论概述	33
2.1 问题的提出	33
2.2 H_∞ 控制理论的发展概述	34
2.3 H_∞ 标准问题	35
2.4 H_∞ 标准控制包含的控制问题	37
2.4.1 跟踪问题	37
2.4.2 鲁棒稳定性问题	40
2.4.3 灵敏度极小化问题	41
2.4.4 混合灵敏度问题	42
2.4.5 模型匹配问题	44
2.5 H_∞ 标准问题的稳定性分析	46
2.5.1 内部稳定性	46
2.5.2 广义对象的可稳定性	50
2.5.3 H_∞ 标准问题与模型匹配问题	55
2.6 不确定系统的 H_∞ 控制问题	57
2.6.1 不确定性系统的鲁棒稳定性	58
2.6.2 鲁棒性能问题	61
2.7 基于逼近理论的 H_∞ 标准问题解法	63
2.7.1 模型匹配问题转化为扩展 Nehari 问题	63
2.7.2 应用 Hankel 范数逼近求解 Nehari 问题	66
2.7.3 设计步骤	68
3. 基于 Riccati 方程的 H_∞ 设计方法	70
3.1 H_∞ 状态反馈控制问题	70
3.1.1 H_∞ 状态反馈的一般形式	70
3.1.2 H_∞ 状态反馈控制特例	75
3.2 H_∞ 输出反馈设计问题	76
3.2.1 H_∞ 输出反馈特例	76
3.2.2 输出反馈的一般问题	79

3.3 关于广义控制对象的假设条件	87
3.4 二次稳定化控制	91
3.5 H_{∞} 鲁棒性能问题	94
3.5.1 Riccati 不等式解的鲁棒性	95
3.5.2 H_{∞} 鲁棒性能分析	97
3.5.3 H_{∞} 鲁棒性能设计	100
3.5.4 基于状态观测的回复设计	103
3.6 非线性 H_{∞} 控制问题	106
3.6.1 相关概念	107
3.6.2 非线性 H_{∞} 状态反馈控制	111
3.6.3 非线性 H_{∞} 输出反馈控制	113
3.6.4 非线性系统 H_{∞} 鲁棒性能问题	116
4. 参数不确定系统的鲁棒分析与综合	121
4.1 多项式族的鲁棒稳定性	121
4.1.1 基本概念	121
4.1.2 区间多项式族的鲁棒稳定性	123
4.1.3 系数相关扰动多项式族的鲁棒稳定性	127
4.2 稳定多项式空间的凸方向	131
4.2.1 凸方向的基本概念	131
4.2.2 凸方向的频域条件	132
4.2.3 凸方向的代数条件	134
4.3 区间系统的鲁棒分析与综合	140
4.3.1 区间系统的鲁棒稳定性	140
4.3.2 区间对象族鲁棒镇定的有限检验	143
4.3.3 局部凸方向的应用	145
4.4 区间系统的鲁棒性能	147
4.5 鲁棒严格正实性	151
4.5.1 严格正实性	151

4.5.2	区间有理函数族的鲁棒严格正实性	152
4.5.3	鲁棒绝对稳定性	154
5.	鲁棒控制系统的 μ 方法	157
5.1	结构不确定性和结构奇异值 μ	157
5.2	μ 的基本性质	161
5.3	鲁棒稳定性和鲁棒性能的 μ 分析方法	166
5.3.1	鲁棒稳定性分析	167
5.3.2	鲁棒性能	168
5.4	μ 综合设计	174
5.4.1	μ 综合设计问题	174
5.4.2	$D-K$ 迭代算法	175
5.4.3	$\mu-K$ 迭代算法	179
5.5	μ 方法在非线性鲁棒控制系统中的应用	184
5.5.1	基础知识	184
5.5.2	非线性系统的严密反馈线性化	185
5.5.3	非线性鲁棒控制问题	189
5.5.4	举例	191
参考文献		194

1 基础知识

1.1 空间概念

1.1.1 距离空间

定义 1.1.1 设 W 是一非空集合, 对于任意一对元素 $x, y \in W$, 均对应一定值 $d(x, y)$, 它适应如下条件:

(1) $d(x, y) \geq 0$; 当且仅当 $x = y$ 时, $d(x, y) = 0$;

(2) 三角不等式

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \quad x, y, z \in W \quad (1.1.1)$$

成立, 则称 $d(x, y)$ 是 x 与 y 之间的距离; W 按距离 $d(x, y)$ 成距离空间, 记为 (W, d) 。

对于距离空间 W , 有以下几点性质:

(1) 距离空间中的距离具有对称性, 即

$$d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in W \quad (1.1.2)$$

(2) 同一集合, 可以定义多种距离, 构成不同的距离空间。例如, 一维欧氏空间, 即实数空间 $E^1 = R$,

$$d(x, y) = |x - y| \quad (1.1.3)$$

但对于

$$d_1(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \quad (1.1.4)$$

也满足距离的定义;

(3) 距离空间中, 收敛点列的极限具有唯一性; 距离对于两个变元 x, y 具有连续性。

1.1.2 线性赋范空间

定义 1.1.2 设 X 是复数域 C 上的线性空间, 若在 X 上定义实值函数 $f(x): x \rightarrow R$ 满足下列条件:

(1) 正性: $\forall x \in X, f(x) \geq 0$ (1.1.5)

(2) 齐次性: $\forall x \in X, \forall \alpha \in R, f(\alpha x) = |\alpha|f(x)$ (1.1.6)

(3) 三角不等式: $\forall x, y \in X, f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ (1.1.7)

此时, 称 $f(x)$ 为 x 的半范数。

进一步, 当 $f(x)$ 满足:

(4) 正定性: 当且仅当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 是 x 的范数, 记作 $\|x\|$ 。而 x 按此范数 $\|\cdot\|$ 构成线性赋范空间, 记作 $(X, \|\cdot\|)$ 。

在同一线性赋范空间中, 可以定义多种不同的范数, 但最常用的范数主要有以下三种:

(1) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ (1.1.8)

(2) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ (1.1.9)

(3) $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ (1.1.10)

其中 $\|x\|_2$ 常称为欧几里得范数。

同样, 在线性赋范空间 X 中, 也可由范数引出两点间的距离: 对于 $\forall x, y \in X$, 定义

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

其满足距离的条件, 因此线性赋范空间也是距离空间; 另外, 在线性赋范空间里, 也可以定义和讨论点列的收敛性。

1.1.3 Banach 空间

定义 1.1.3 设距离空间 (W, d) , $\{x_n\}$ 是 W 中的点列, 若对

于 $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) > 0$, 使 $i, k \geq N(\epsilon)$ 时, 有

$$d(x_i, x_k) < \epsilon \quad (1.1.11)$$

则称 $\{x_n\}$ 为 W 中的序列。

若距离空间 W 中的任一 Cauchy 序列均收敛于 W 中的点, 则称 W 是完备空间。完备的线性赋范空间称为 Banach 空间。

例如: n 维欧几里得空间 E^n 是 Banach 空间。

对于线性赋范空间和 Banach 空间的子空间有如下性质:

(1) 设有线性赋范空间 X , M 是 X 的一个线性子空间, 且 M 是开的, 则有 $M = X$;

(2) 若 X 空间为 Banach 空间, M 是 X 的一个线性子空间, 当且仅当 M 是闭的时, 则 M 为 Banach 空间。

在有限维线性空间 X 上, 任意两个范数都是等价的; 对于有限维线性赋范空间, 则是 Banach 空间; 任意线性赋范空间的有限维线性子空间是闭子空间。

1.1.4 Hilbert 空间

定义 1.1.4 设 H 是数域 F 上的线性空间。对于任意 $\forall x, y \in H$, 均对应一个数 $\langle x, y \rangle \in F$, 且满足条件:

$$(1) \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in H \quad (1.1.12a)$$

$$(2) \langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in H, \quad \forall \alpha, \beta \in F \quad (1.1.12b)$$

$$(3) \langle x, x \rangle \geq 0; x \in H, \text{ 当且仅当 } x = 0 \text{ 时, } \langle x, x \rangle = 0 \quad (1.1.12c)$$

则称 $\langle x, y \rangle$ 为 H 中的内积。当 F 为复数域 C (或实数域 R) 时, 称 H 为复 (或实) 内积空间。

对于内积空间 H , 有

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, z \rangle + \bar{\beta} \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in H, \quad \alpha, \beta \in C \quad (1.1.13)$$

在内积空间 H 中, 可以定义

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in H \quad (1.1.14)$$

为 x 的一个范数,则称该范数为由内积 $\langle x, y \rangle$ 导出的范数。因此,可以推知内积空间是线性赋范空间,同时也是距离空间。对于完备的内积空间,则称为 Hilbert 空间。

对于内积空间 H , 设 $\|\cdot\|$ 是其内积导出范数, 则对于 $\forall x, y \in H$, 满足平行四边形公式, 即

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (1.1.15)$$

由这一性质可知, 仅当线性赋范空间中的任意两元素, 都满足平行四边形公式时, 该线性赋范空间才是内积空间。关于内积空间, 有如下性质。

(1) 记 H 为内积空间, 若 $x, y \in H$ 满足 $\langle x, y \rangle = 0$, 则称 x 与 y 直交, 记作 $x \perp y$ 。

(2) 设 M 为 H 的子集, 若 $x \in H$, 满足 $\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in M$, 则称 x 与 M 直交, 记为 $x \perp M$ 。

(3) 设 K 和 L 为 H 的子集, 若

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in K, \forall y \in L \quad (1.1.16)$$

则称 K 与 L 直交, 记作 $K \perp L$ 。

(4) K 的直交补为

$$K^\perp = \{y | x \perp y, \forall x \in K, \forall y \in H\} \quad (1.1.17)$$

则 $K^\perp$ 是 H 的线性闭子空间。

(5) 设 L_1, L_2 是 H 的两线性子空间, 如有 $L_1 \perp L_2$, 则称

$$L = \{x + y | x \in L_1, y \in L_2\} \quad (1.1.28)$$

为 L_1 与 L_2 的直和, 记作 $L_1 \oplus L_2$ 。

(6) 设 K 为 H 的线性子空间, $x \in H$, 若 $x_0 \in K, x_1 \perp K^\perp$, 使

$$x = x_0 + x_1 \quad (1.1.29)$$

则称 x_0 为 x 在 K 上的直交投影。

注: 不是任意 x 均在 K 上有投影; 但投影存在时, 则具有唯一

性。

综上所述:对于 Hilbert 空间,具有“良好”的几何特性,而对于 Banach 空间来说,则不具备。

1.2 矩阵概念

1. 酉矩阵

令 A 是 $n \times n$ 维矩阵,其中 $a_{ij} \in C$,当 A 满足

$$\overline{A}^T \cdot A = A \cdot \overline{A}^T = I \quad (1.2.1)$$

则称矩阵 A 为酉矩阵。为描述简单,令 $A^* = \overline{A}^T$ 。

酉矩阵有如下性质:

$$(1) A^{-1} = A^*; \quad (1.2.2)$$

(2) 若记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则有

$$\overline{\alpha_i}^* \alpha_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2.3)$$

$$(3) \text{ 若记 } A = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \text{ 则有}$$

$$\beta_i \overline{\beta_j}^* = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2.4)$$

(4) $A^T, \text{adj}A$ (伴随矩阵) 都是酉矩阵; 若 B 为酉矩阵, 则 AB 也是酉矩阵;

$$(5) |\det A| = 1;$$

(6) 酉矩阵 A 的特征值 λ , 满足 $|\lambda| = 1$ 。

2. Hermite 矩阵

令矩阵 $A \in C^{n \times n}$, 当满足

$$A = A^* \quad (1.2.5)$$

则称矩阵 A 为 Hermite 矩阵。

对任何 Hermite 矩阵 A , 都存在满秩矩阵 C , 使 $C^* A C$ 化为对

角阵。

3. 有理分式矩阵

以数域 F 上的一个变量 s 的有理分式作为元素的矩阵称为有理分式矩阵。令有理分式矩阵中每一元素的表达式为 $\frac{f_{ij}(s)}{g_{ij}(s)}$ 。其中 $f_{ij}(s), g_{ij}(s)$ 分别为 s 的多项式。当每个元素都满足

$$\deg f_{ij}(s) \leq \deg g_{ij}(s) \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2.6)$$

则称该分式矩阵为真有理分式矩阵。当满足

$$\deg f_{ij}(s) < \deg g_{ij}(s) \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2.7)$$

则称该分式矩阵为严格真有理分式矩阵。

4. 单模态矩阵

令 $U(s)$ 为有理函数方阵, 若 $U(s), U^{-1}(s) \in H_{\infty}$, 则称 $U(s)$ 为单模态矩阵。

实际上单模态矩阵, 是要求 $U(s)$ 的行列式 $\det U(s)$ 为一不等于零的常数。显然对于非奇异定常阵, 单模态阵的逆矩阵, 以及单模态阵的乘积均为单模态矩阵。

5. 矩阵的迹

定义方阵 $A(a_{ij})_{n \times n}$ 的迹为

$$T_r(AA^T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2.8)$$

方阵的迹是一个数。

6. 矩阵的谱半径

令矩阵 $A \in C^{n \times n}$, 其特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则称

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i| \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2.9)$$

为矩阵 A 的谱半径。

从几何上说,若以复平面上原点为中心,则以 $\rho(A)$ 为半径的圆包含了矩阵 A 的全部特征值;或者说 $\rho(A)$ 是复平面上以原点为中心能包含矩阵 A 所有特征值的圆的最小半径。

一般来讲,谱半径 $\rho(A)$ 不是矩阵的范数,且矩阵 A 的谱半径对于 A 的任一种矩阵范数 $\|A\|$ 都有

$$\rho(A) \leq \|A\| \quad (1.2.10)$$

例如, $\|A\|_1$ 和 $\|A\|_\infty$ 都满足

$$\rho(A) \leq \|A\|_1 = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, j = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (1.2.11)$$

$$\rho(A) \leq \|A\|_\infty = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (1.2.12)$$

7. 矩阵的奇异值

设 $A \in C^{n \times m}$, A 的共轭转置矩阵记作 A^* , 则 $m \times m$ 方阵 $A^* \cdot A$ 和 $n \times n$ 方阵 $A \cdot A^*$ 均为非负定阵, 且有

$$\text{rank} A^* A = \text{rank} A A^* = \text{rank} A \quad (1.2.13)$$

设 $\text{rank} A = r$, 则 $A^* A$ 和 $A A^*$ 有 r 个相同的正特征值, 即

$$\lambda_i(A^* A) = \lambda_i(A A^*) > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

而 $A^* A$ 与 $A A^*$ 其余的特征值均为零。

定义 $\sqrt{\lambda_i}$ 为 A 的奇异值(singular value), 其中 λ_i 为 $A^* A$ 的特征值, 记作 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, i = 1, 2, \dots, r$ 。

为不引起混淆, 称 σ_i 为 A 的奇异值, 它是复数标量绝对值概念的推广。记 $\sigma_{\max} = \bar{\sigma}$ 为最大奇异值, 则有

$$A^* \cdot A \leq \bar{\sigma}^2(A) \cdot I = \sigma_{\max}^2(A) \cdot I \quad (1.2.14)$$

对于任意矩阵 $A \in C^{n \times m}$, 设 $\text{rank} A = r, \sigma_1, \dots, \sigma_r$ 为 A 的奇异值, 则存在 n 阶正交阵 U 和 m 阶正交阵 V , 使得

$$A = UDV$$

对于正交阵 U 和 V , 有 $U^* U = I, V^* V = I$ 且

$$D = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$$

对于矩阵奇异值, 有以下的性质。设 $A \in C^{n \times m}$ 为任意矩阵, $x \in C^{m \times 1}$ 向量, 则有:

$$(1) \max_{\substack{\|x\| \neq 0 \\ \|x\|=1}} \|Ax\| = \sigma_{\max}(A) = \bar{\sigma}(A);$$

$$(2) \sigma_{\min}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \bar{\sigma}(A);$$

$$(3) \bar{\sigma}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\substack{x \neq 0 \\ \|x\|=1}} \|Ax\|;$$

$$(4) \sigma_{\min}(A) = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \min_{\substack{x \neq 0 \\ \|x\|=1}} \|Ax\| \quad (\|x\| =$$

$$\sqrt{x^* x});$$

$$(5) \bar{\sigma}(A) \leq 1 \text{ 的充要条件是 } I - A^* A \geq 0 \text{ 或 } I - AA^* \geq 0;$$

$$(6) A \text{ 满秩的充要条件是 } \sigma_{\min}(A) > 0;$$

$$(7) \text{ 若 } A \text{ 可逆, 则 } \bar{\sigma}(A) = \sigma_{\min}(A^{-1});$$

$$(8) \forall \beta \in C \text{ 有}$$

$$\sigma_i(\beta A) = |\beta| \sigma_i(A)$$

$$(9) A_1, A_2 \in C^{n \times m}, \text{ 则}$$

$$\bar{\sigma}(A_1 + A_2) \leq \bar{\sigma}(A_1) + \bar{\sigma}(A_2)$$

$$(10) \text{ 设 } A \in C^{n \times q}, B \in C^{q \times m}, \text{ 则}$$

$$\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A) \bar{\sigma}(B)$$

$$\sigma_{\min}(AB) \geq \sigma_{\min}(A) \sigma_{\min}(B)$$

$$(11) \text{ 设 } A \text{ 可分块表示为}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } \bar{\sigma}(A) \geq \bar{\sigma}(A_{ij}) \quad (i, j = 1, 2)。$$