

巧解数学问题100例

[波] 格·西金高豪斯 著

林庆祺 译

吴大梁 校



福建科学技术出版社

012-44
✓

巧解数学问题100例

〔波〕格·西金高豪斯 著

林庆祺 译

吴大梁 校

福建科学技术出版社

一九八五年·福州

责任编辑：王健文

巧解数学问题100例

〔波〕格·西金高豪斯 著 林庆祺 译 吴大梁 校

福建科学技术出版社出版

（福州得贵巷27号）

福建省新华书店发行

闽侯青圃印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 6.375印张 135千字

1985年8月第1版

1985年8月第1次印刷

印数：1—33,500

书号：7211·25 定价：0.91元

0.88

译 者 的 话

本书作者格·西金高豪斯(1887—1972年)，是波兰著名的学者和科普作家，也是举世闻名的波兰数学学校的创始人之一。他一生大量的时间都用以从事教育事业，他在波兰大学数学教学上的影响是很深远的，此外还为中学生写了不少数学读物。1939年他所著《数学万花筒》一书，图文并茂，妙趣横生，启发思维，深受读者欢迎。此书先后被译成多种文字在许多国家出版，在国际上享有一定的声誉。

1958年他的《100个数学问题》问世后，引起人们很大的关注，很快就被译成俄文、英文出版。后来，作者又三易其稿，重新出版。1982年苏联学者T·Φ·鲍亚尔斯·卡娅和Б·B·鲍亚尔斯基又将该书的新版译成俄文，此中译本就是根据这俄文版转译而成的，现改为《巧解数学问题100例》。

本书共分七章，一至六章给出了100道数学问题(此外还添补了一些题目，这些题目皆在题号下标以a、b、c等)，并附有解答；第七章提出了13道思考题，供读者独自研讨。本书例举的问题，饶有趣味，引人入胜；解答构思巧妙，富于启发性。许多问题及其解答人们读后会有豁然开朗之感。

它是一本优秀的中学生数学课外读物，也可供中学数学教师参考，同时亦适合大专院校理工科学生和各界数学爱好者阅读。它有助于中学生增长知识开阔思路，提高独立思考和分析解决问题的能力，也有助于某些对高等数学感到困惑的大专院校低年级学生培养学习兴趣，树立学习信心。它将

使人们感受到数学的魅力与美感,促使人们智能的发展提高。

在本书的翻译过程中,承蒙福州大学张琮、蔡传荣两位老师的热情帮助,承蒙福建省科学技术出版社约请从事数学教育工作的吴大梁同志对译稿进行校订,吴大钟同志也参加了审校工作,在此谨表谢意!

译 者

1985年4月

目 录

问题 解答

第一章 数、等式和不等式

- | | | |
|---------------|-------|--------|
| 1. 乘法表的练习 | (1) | (50) |
| 2. 数的有趣特性 | (1) | (50) |
| 3. 被11除的整除性 | (2) | (53) |
| 4. 数的整除性 | (2) | (54) |
| 5. 简易情况下的费玛定理 | (2) | (55) |
| 6. 数的分布 | (2) | (56) |
| 7. 推广 | (3) | (57) |
| 7a. 字母排列 | (3) | (61) |
| 8. 比例 | (3) | (62) |
| 8a. 对称的代数式 | (3) | (62) |
| 9. 根的无理数性 | (4) | (62) |
| 10. 不等式 | (4) | (62) |
| 11. 数列 | (4) | (64) |

第二章 点、多边形、圆、椭圆

- | | | |
|--------------|-------|--------|
| 12. 平面上的点 | (5) | (65) |
| 13. 角的研究 | (5) | (66) |
| 14. 三角形面积 | (6) | (66) |
| 15. 等分三角形的周长 | (6) | (67) |
| 15a. 重心 | (6) | (72) |
| 16. 三角形的分割 | (6) | (72) |

17. 三角形	(7)	(73)
18. 三角形网 (1)	(7)	(73)
19. 三角形网 (2)	(7)	(74)
20. 长方形将剩下什么?	(7)	(76)
20a. 四边形	(8)	(77)
21. 正方形的分割	(8)	(77)
22. 正方形的网	(8)	(80)
23. 格点	(8)	(81)
24. 圆内的格点	(8)	(81)
25. $14 = 15$	(9)	(82)
26. 多边形	(9)	(82)
27. 点和圆	(10)	(83)
28. 几何习题	(10)	(83)

第三章 空间、多面体、球体

29. 空间的分割	(11)	(84)
30. 两个投影	(11)	(85)
31. 正方体	(11)	(85)
32. 测地线	(12)	(86)
33. 分子运动	(12)	(88)
34. 正方体展开图	(12)	(89)
35. 正方体	(12)	(90)
36. 六面体	(13)	(91)
37. 四面体	(13)	(93)
38. 各面全等的四面体	(13)	(93)
39. 八面体	(13)	(95)
40. 表面上的距离	(13)	(97)
41. 苍蝇的旅行	(14)	(98)
42. 正十二面体	(14)	(99)

42a. 内接多面体	(14)	(101)
43. 多面体	(14)	(107)
44. 非凸的多面体	(15)	(108)
44a. 正多面体	(15)	(109)
45. 古怪的习题	(15)	(125)
46. 三个球面和直线	(16)	(126)
47. 球面的一个特性	(16)	(126)
47a. 球的堆垒 (1)	(16)	(127)
47b. 球的堆垒 (2)	(17)	(128)

第四章 实用题和非实用题

47c. 教科书中印错的字	(18)	(131)
48. 玩具	(18)	(131)
49. 节日的火腿	(18)	(132)
50. 四等分一块饼	(19)	(132)
51. 分割三角形大蛋糕	(19)	(133)
52. 称量	(20)	(134)
52a. 他的生日是哪一天?	(20)	(135)
53. 索菲娅·谢尔盖叶夫娜有多大年纪?	(20)	(135)
54. 池塘中有多少条鱼可捕?	(21)	(137)
55. 轴的测量	(21)	(138)
56. 一百二十个钢球	(21)	(138)
57. 管子上的带	(22)	(139)
58. 分针与时针等长的钟	(23)	(139)
59. 高个子和矮个子	(23)	(141)
60. A班和B班的学生	(23)	(143)
61. 统计学	(25)	(143)
62. 血型	(25)	(145)
63. 再谈血型	(26)	(146)

63a. 出纳习题	(27)	(147)
63b. 果园与果树	(27)	(148)
64. 多余劳动	(28)	(148)
65. 砖的对角线	(28)	(151)
66. 捆扎盒子	(28)	(151)
66a. 另一种捆扎	(28)	(152)
67. 杠杆秤	(29)	(153)
68. 最小距离	(29)	(154)
69. 矩形的一次性分割	(29)	(154)
70. 一个实际的习题	(30)	(161)
71. 邻近的城市	(30)	(162)
72. 铁路网 (1)	(31)	(163)
73. 铁路网 (2)	(31)	(164)
74. 试飞	(31)	(166)
75. 太阳和月亮	(31)	(167)
76. 初等天文学	(31)	(167)

第五章 国际象棋、排球、追踪

77. 棋盘	(32)	(169)
78. 再谈棋盘	(32)	(169)
79. 棋盘上的车	(32)	(174)
80. 椭圆形球台	(33)	(177)
81. 体育运动习题 (1)	(33)	(178)
82. 体育运动习题 (2)	(33)	(178)
83. 分级比赛方案	(33)	(178)
84. 排球队联合会	(34)	(180)
85. 淘汰赛	(34)	(181)
86. 一个骑车者和两个步行者	(35)	(181)
87. 四条狗	(35)	(182)

88. 追踪 (1).....	(36)	(182)
89. 追踪 (2).....	(36)	(183)
90. 习题的条件真的不充分吗?	(36)	(183)
91. 摩托艇 (1).....	(36)	(184)
92. 摩托艇 (2).....	(37)	(185)

第六章 沙拉杰克博士的数学奇遇

93. 奇特的数.....	(38)	(186)
94. “厘米尺”	(38)	(186)
95. 猜单词游戏.....	(39)	(186)
96. 大学生的债务.....	(39)	(187)
96a. “第二号秘诀”	(39)	(188)
96b. 幻方.....	(40)	(190)
97. 奇怪的团体.....	(41)	(190)
98. 算盘.....	(41)	(191)
99. 街上洒水.....	(42)	(191)
100. 法国城市.....	(42)	(191)

第七章 没有给出答案的思考题

1. 正号与负号.....	(43)
2. 三角形中的三角形.....	(45)
3. 圆周的划分.....	(45)
4. 三面角.....	(46)
5. 无边界的棋盘.....	(46)
6. 再谈算盘.....	(46)
7. 重量的比较.....	(47)
8. 放在箱子里的筒.....	(47)
9. 细菌.....	(47)
10. 马戏团来了.....	(48)

11. 三个骑马的牧人..... (48)
12. 审问..... (49)
13. 十二面体上的箭头..... (49)

第 一 章

数、等式和不等式

1. 乘法表的练习

先给定数列的第一、二项 2、3，然后把第一项 2 与第二项 3 相乘，其积 6 作为第三项；把第二项 3 与第三项 6 相乘，其积 18 的两个数码 1、8 分别作为第四、五项；再把第三项 6 与第四项 1 相乘，其积 6 作为第六项；第四项 1 与第五项 8 相乘，其积 8 作为第七项；……

这样，我们得到数列

2, 3, 6, 1, 8, 6, 8, ……

数列中相邻两个数字之间下面的小弧形表示相乘，其积写在数列中作为后继的项。例如，现在继续写在后面的项，就是把 6 与 8 相乘，其积为 48，于是写出第八项 4，第九项 8，……这个数列可以无止境地写下去，因为每相乘一次小弧都往后推移一步，而得到的结果至少是一位数，经常还是两位数，每相乘一次数列至少添加一项，于是这数列可以是无穷数列。

请求证：这个数列中不会出现数字 5，7，9。

2. 数的有趣特性

写出任意一个自然数（例如 2583），并算出这个数的各个数字的平方和（ $2^2 + 5^2 + 8^2 + 3^2 = 102$ ）。再对所得的数算出其各个数字的平方和（ $1^2 + 0^2 + 2^2 = 5$ ），依此继续

进行 ($5^2=25$, $2^2+5^2=29$, $2^2+9^2=85$, ……)。

请求证: 如果这个演算过程中各步的结果都不出现 1 (很明显, 如果出现 1, 就会无穷地重复出现 1), 那么肯定会在某一步出现 145, 此后还会形成下列数字的无穷循环:

145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89.

3. 被 11 除的整除性

求证: 对于任一自然数 k

$$5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k}$$

能被 11 除尽。

4. 数的整除性

数 ($3^{105} + 4^{105}$) 可以被 7、13、49、181 及 379 除尽, 但用 5 及 11 除不尽。

这该如何验证?

5. 简易情况下的费马定理

如果 x, y, z, n 是自然数, 并且 $n \geq z$, 那么等式 $x^n + y^n = z^n$ 不能成立。

6. 数的分布

求出 $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{10}$ 十个数, 使它们作如下分布:

x_1 置于区间 $[0, 1]$ 内;

x_1 和 x_2 分别置于区间 $[0, 1]$ 的两个二等分区间内;

x_1, x_2, x_3 , 分别置于区间 $[0, 1]$ 的三个三等分区间内;

x_1, x_2, x_3, x_4 分别置于区间 $[0, 1]$ 的四个四等分区间内, 等等。

最后, $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 分别置于区间 $[0, 1]$ 的十个十等分区间内。

7. 推广

把上题中的10改为任意自然数 n ，这样的题目你还能解答吗？

7a. 字母排列

由 $aabbcc$ 这组字母可得到90种不同的排列。在排列 $aabc bcb$ 中把 b, c 对换，即用 c 代替 b 且用 b 代替 c ，可以得到排列 $aac bcb$ ；如果把排列 $aac bcb$ 反读，就可以得到排列 $bcbcaa$ ，若在排列 $bcbcaa$ 中对换字母 a, b ，又可得到排列 $acacbb$ 等等。

所有象 $aabc bcb$ ， $aac bcb$ ， $bcbcaa$ ， $acacbb$ 这样一些排列，我们认为它们只有非本质的差别。而象排列 $aabc bcb$ 和 $abcbca$ ，则具有本质的差别，因为无论是对换其中任意两个字母或是把排列反读，还是把这两种置换实施多次，都不能把其中一个排列变成另一个排列。

问题：可以对 $aabbcc$ 这组字母作出多少种本质不同的排列？

8. 比例

数 A, B, C, p, q, r 满足下列关系式：

$$A : B = p, B : C = q, C : A = r.$$

试在比例式 $A : B : C = \square : \square : \square$ 的空格里填上 p, q, r 组成的代数式。要求这三个代数式之间具有这样的轮换性：如果把 p 换成 q ， q 换成 r ， r 换成 p ，那么第一个代数式变为第二个代数式，第二个代数式变为第三个代数式，而第三个代数式则变为第一个代数式。

8a. 对称的代数式

象 $x + y + z$ 或 xyz 这样的代数式是对称的。因为任意改变 x, y, z 排列的顺序，该式的值都不变。上述式子的对称性是很明显的；但是还存在着一些对称的代数式，它们的对称

性却不很明显。例如：

$$|x-y|+x+y-2z+|x-y|+x+y+2z.$$

求证：这个代数式是对称的，并把它化成具有明显对称性的式子。

9. 根的无理数

用初等方法求证：

方程式 $x^5 + x = 10$ 的正根是无理数。

10. 不等式

求证不等式

$$\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+r} + \frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+r} \\ > \frac{C+c+A+a}{C+c+A+a+b+r},$$

不等式中的字母都表示正数。

11. 数 列

求出各项都是正数的数列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ ，使满足 $a_0 = 1$ 和 $a_n - a_{n+1} = a_{n+2}, n = 0, 1, 2, \dots$

证明：这样的数列是唯一的。

第 二 章

点、多边形、圆、椭圆

12. 平面上的点

在平面上画出几个点或几十个。用线段把每一点同离它最近的一个点连起来；假设各点间的距离各不相同，那么，每个点的最近点是哪一点是没有疑问的。

求证：所得到的图形中不包含封闭的多边形也不存在交叉的线段。

13. 角的研究

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是给定 n 个正数的某种排列。自平面上的 O 点向右方画一射线 OX ，在射线上截取线段 $OP_1 = x_1$ ；接着在过 P_1 点且垂直于 OP_1 的直线上截取线段 $P_1P_2 = x_2$ ，然后再在过 P_2 点且垂直于 OP_2 的直线上截取线段 $P_2P_3 = x_3$ ，……一直到截取 $P_{n-1}P_n = x_n$ 为止。在每次截取线段时应使 OP_i 与 P_iP_{i+1} 构成的直角始终是使左直角边通过 O 点。可以认为射线 OX 围绕 O 点从初始位置 OP_1 开始逆时针地依次转到 $OP_2, OP_3, \dots$ 最后到位置 OP_n ，旋转了一个角。这个角的大小显然一般是跟 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 这 n 个数的排列顺序有关。

求证：如果 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是按递减顺序排列，那么 OX 旋转角最小；如果 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是按递增顺序排列，那么 OX 旋转角最大。

14. 三角形面积

不用三角方法来证明:

$\triangle ABC$ 中, 若 $\angle A = 60^\circ$, 则三角形面积为

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} [a^2 - (b-c)^2]; \quad (1)$$

若 $\angle A = 120^\circ$, 则三角形面积为

$$S = \frac{\sqrt{3}}{12} [a^2 - (b-c)^2]. \quad (2)$$

15. 等分三角形的周长

任取一个三角形。可以用一条直线把它的周长截成两半。我们甚至可以预先给定这直线的方向。如果我们在两个不同的方向作两条这样的直线, 则它们相交于某一个点 Q , 就是说, 通过一点 Q 有两条把三角形周长等分的直线。

问: 是否存在一点, 通过它有三条这样的直线? 如果存在, 那又如何求出?

15a. 重心

设 P 点为 A, B, C 三点的重心(所谓三点的重心, 是指放置着相同质量的三个质点的重心)。设 A_1, B_1, C_1 分别为下列三组点的重心: $B, C, P; C, A, P; A, B, P$ 。

求证: A_1, B_1, C_1 三点的重心就是 P 点。

16. 三角形的分割

把一个三角形分割成19个三角形, 要求在所得到图形中的每一个顶点(包括大三角形的各个顶点)上会集的边数相同。

在这道题中数字19不可能用更大的数替换, 但是可以用比19小的数替换。