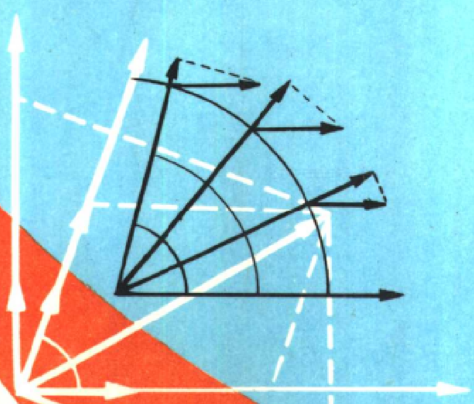
张量分析与有限弹性变形理论

黄平　严圣平　王培荣　著



中国矿业大学出版社

责任编辑　安乃隽
封面设计　张蕴琪

ISBN 7-81040-614-0

9 787810 406147 >

ISBN 7-81040-614-0
O·44　　　定价：14.00元

张量分析
与
有限弹性变形理论

黄　平　严圣平　王培荣　著

中国矿业大学出版社

内容简介

本书是一本介绍张量分析和研究有限弹性变形理论的专著。全书共分两篇。第一篇介绍研究连续介质力学的数学工具——张量分析。第二篇介绍有限弹性变形的基本理论与数值计算方法。在几何场论中介绍了极分解与和分解定理，在本构理论中介绍了作者的最新研究成果——弹性变形可恢复性的定量描述法与有限弹性变形的本构方程，并由此导出数值计算的方法。

本书可作为力学及有关专业本科高年级学生、研究生的教材，以及有关专业教师、科研及工程技术人员的参考书。

责任编辑　安乃隽
责任校对　马景山

张量分析与有限弹性变形理论

黄　平　严圣平　王培荣　著

中国矿业大学出版社出版发行
新华书店经销　中国矿业大学印刷厂印刷
开本 850×1168 毫米 1/32　印张 9.25　字数 230 千字
1996 年 12 月第一版　1996 年 12 月第一次印刷
印数 1—1000 册

ISBN　7-81040-614-0

O·44　　定价：14.00 元

前　言

弹性力学，作为精确理论，无论从几何关系或物性关系方面考虑，都应该是非线性的。Cauchy 和 Green 在这一领域首先作出了贡献。在 Kirchhoff 和 Kelvin 的研究成果中也可以找到非线性理论的基础。1894 年，Finger 完成了超弹性体的有限变形理论。由于当时应用的均属于弹性范围内变形不大的弱弹性材料，生产与工程中没有提出精确理论的迫切要求。再加上有限弹性变形理论的方程冗长而复杂，使当时的人们感到在数学上进行一般性的讨论是没有多大希望的，于是绝大多数弹性力学工作者都避开这种理论而走上了线性化的道路。这种趋势反而使经典弹性力学发展成为一门十分成熟的理论。30 多年来计算力学的兴起与发展，线性理论在解决许多工程实际问题中找到了得心应手的应用。

40 多年来，新现象的不断发现，高强、轻质、复合材料与新结构的应用，使非线性理论越来越受到重视。不少学者对古典理论做了不同程度的几何上或物理上的修正，从而提出了各种各样的非线性工程理论，种类繁多，不胜枚举。

自从 1894 年 Finger 提出极分解定理到 1979 年陈至达教授提出 S—R 和分解定理以来，众多非线性力学工作者认为，有限变形几何场论方面的工作已经比较完善。Green 应变张量在工程界应用得也比较广泛。变形几何学理论总的来说已不再是力学工作者研究的热点。

但是，对于有限弹性变形的本构理论；对于如何建立便于实际应用的非线性应力应变关系，始终是一个非常困难的问题。其困难来源于两个原因：一个原因是所谓应力与应变的耦合关系，有限变

形时应力与单位面积的改变相耦合，应力与应变共生且非线性耦合，这种非线性耦合使得将应力表达为应变的函数关系（最好是显式）变得十分困难（如果变形过程中可以直接测量出应力的变化和应变的变化，那么它们的函数关系就容易建立，但实际情况并非如此）。另一个原因是，有限变形过程中如何测定反映所谓材料物理性质的“物理常数”，尤其是“各向异性”材料，这也是实验力学工作者面临的难题。

上述难题不解决，有限弹性变形理论就无法深入到各个工程应用领域。对于本构理论，我们不能停留在纯理论的探讨上，不能满足于提出一些一般性的普遍适用的各种守恒律。我们还必须揭示一些反映弹性变形本质特性的、便于工程界实际应用的、具体“可操作”的“本构关系”。

作者经过十余年的研究，终于发现，如果能够对弹性变形这种“可恢复”的性质进行定量的数学描述，即我们建立的本构方程——应力与变形梯度的关系可以描述变形的可恢复性，则有限弹性变形问题可以迎刃而解。

作者的意图并不是要将本书写成一本工程师们直接可应用的参考资料，而是为读者研究有限弹性变形提供有效的理论工具和便于实际应用的计算方法，至于解决具体工程问题，读者尚需作进一步研究。

本书第一篇主要介绍“张量分析”。对于研究线性弹性理论而言，也许可以将张量分析工具看作一种方便的速记符号。但在非线性连续介质力学领域，这种提法未免贬低了它的作用。普遍的张量分析是一种敏锐得多的“思想工具”，研究连续介质力学使用张量工具，真好比如鱼得水。在张量符号后面，可能隐藏着毫无意义的东西，但是它也可能对一个困难的问题给以新的启发。新一代工程师和跨世纪力学人才对张量学习和理解越透彻，使用得越广泛，其收获将越丰硕。

初学张量的读者面对“张量之林”会感到迷惑不解或把它看成一种“符号学”。为此，本书用较多的篇幅深入浅出地加以介绍。努力化抽象为具体，从简到繁，并与力学实例相结合。一些地方还把张量符号用矩阵对照写出，这不是张量本身的需要，但对初学者熟悉张量是有益的。

有了第一篇张量分析的预备知识，学习第二篇应当说没有什么困难。学习第二篇的困难并非来自数学方面。有时线性理论或小变形的概念往往是学习非线性理论的障碍，这样说并不过分。例如拖带坐标的概念；平衡方程建立在变形态几何位形上的概念；应力与应变相耦合的概念等等。这些概念并不是线性理论基础上的延伸。因此，初学者在学习时应格外注意。

由于在第十一章中，有限弹性变形的计算建立在求解线性理论基本方程的基础之上，因此本书不得不在七、八章中对线性理论的基本方程与解法做一简单的回顾与综述。不熟悉这些理论的读者，可参阅书末的有关参考文献。

有关有限弹性变形理论的研究文献与比较成熟的研究成果远不如线性理论丰富。本书在这方面的成果可以说是一个刚会走路的孩童，这个孩童正期盼着前辈的关怀与培养。

有理由相信，在不太长的时间内有限弹性变形理论及其计算方法将会十分成熟与完善。

本书的出版得到煤炭科学基金与江苏省重点学科基金的资助，在此谨向基金委的领导深表谢意！

黄　平

1996 年教师节

于中国矿业大学

目　　录

第二篇 弹性力学的有限变形理论

第一篇　张 量 分 析

第一章　矢　　量

§1-1　矢量表示法

物理中的位移、速度、力都是矢量。利用三维空间中的有向线段 $\boldsymbol{v}$ 表示矢量是最直观的表示法，如图 1-1 所示。有向线段的长度 v 代表矢量的大小。这种方法不依赖于坐标系的选择。

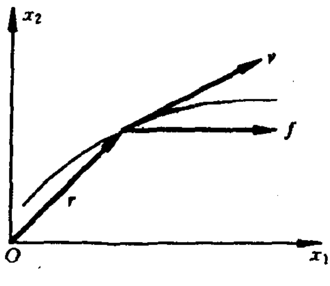


图 1-1　矢量 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{f}$ 的图示法

矢量的分量表示法是另一种表示方法，选定一个坐标系，比如通常的正交直线坐标系，即卡氏坐标系，然后确定矢量对于该坐标系的分量

$$\boldsymbol{v} \sim (v_x, v_y, v_z) \tag{1-1a}$$

这一有序数也可视作一个单行矩阵。

矢量也可以用基矢与其对应分量写成

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}v_x + \boldsymbol{j}v_y + \boldsymbol{k}v_z \tag{1-1b}$$

其中 $\boldsymbol{i}v_x$、$\boldsymbol{j}v_y$、$\boldsymbol{k}v_z$ 称为分矢量。而

$$i(1,0,0),\ j(0,1,0),\ k(0,0,1) \tag{1-1c}$$

是单位矢量，它们组成卡氏系中的一组基矢(称为标架)。

§1-2 指标符号

上面所述用分量(v_x,v_y,v_z)或用基矢量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$来表示矢量的方法，在推广到比三维更高的空间时就有困难了。因此，发展了另一种记法。把x、y、z分别记为x_1、x_2、x_3。这样，一个n维空间的矢量(无法用直观图表示)用分量表示时为

$$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n) \tag{1-2a}$$

它可视为一个n维的单行矩阵，且可写为

$$\boldsymbol{v}=\{v_i\} \qquad (i=1,2,3,\cdots,n)$$

同理，基矢$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$可分别写为$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$。$n$维空间的基矢，可写为$\boldsymbol{e}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$。而与式(1-1b)对应的写法为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1v_1+\boldsymbol{e}_2v_2+\cdots+\boldsymbol{e}_nv_n \tag{1-2b}$$

相应的分矢量为$\boldsymbol{e}_1v_1,\cdots,\boldsymbol{e}_iv_i,\cdots$，其中

$$\boldsymbol{e}_i=(0,\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{顺序第}i\text{个}}}{1},0,\cdots,0) \tag{1-2c}$$

这里i叫做v的下标，也有记作v^j(如本书第三章以后章节所出现)的，这时j称为上标。

有些量比矢量更复杂，只用一个下(或上)指标还不够，还要采用更多的指标，比如$A_{ij},B_{ij},C_{ijk},\cdots$，等等。以后讨论的张量，就是这种形式的一种量。

§1-3 矢量代数

矢量代数，包括矢量与实数的乘法运算以及矢量的加、减、乘法运算。

一、矢量的加法

矢量的加(减)法运算在图形表示法中,可以采用三角形法(图1-2a)或平行四边形法(图1-2b)。

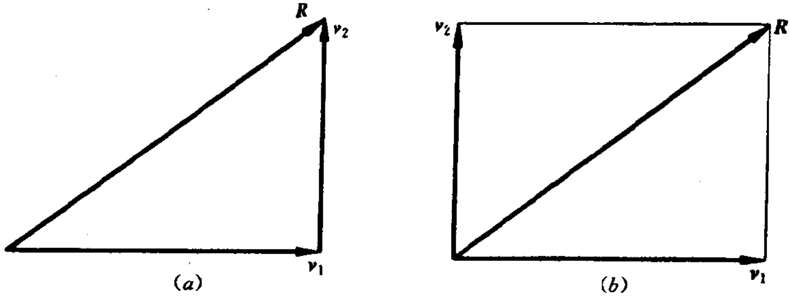


图1-2

在分量表示法中,则有

$$\boldsymbol{v} \pm \boldsymbol{w} = (v_x \pm w_x,\ v_y \pm w_y,\ v_z \pm w_z) \tag{1-3}$$

或者用指标记法,有

$$\boldsymbol{v} \pm \boldsymbol{w} = (v_1 \pm w_1,\ v_2 \pm w_2,\ v_3 \pm w_3) \tag{1-4}$$

用基矢表示为

$$\boldsymbol{v} \pm \boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_1(v_1 \pm w_1) + \boldsymbol{e}_2(v_2 \pm w_2) + \boldsymbol{e}_3(v_3 \pm w_3) \tag{1-5}$$

根据上述几种表示方法易见,矢量的加法满足交换律,即

$$\boldsymbol{v} \pm \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \pm \boldsymbol{v} \tag{1-6}$$

因为实数是满足加法规律的,这一规律也成为判断一个有方向的量是否是矢量的一个必要条件。譬如,有限转动(而不是无限小转动)虽是有方向的,但它就不遵从交换律,因此,它不是矢量。

二、矢量的标积和叉积,δ_{ij}和 e_{ijk}符号、并矢

矢量代数中的积可以有几种定义。总之,是从两已知矢量去定义第三个量。下定义时当然最好同已知的物理规律相联系。

1. 标积和 Kronecker 符号 δ_{ij}

首先是标积,从物理学知道,一个力矢量 $\boldsymbol{f}$ 与一个位移矢量 $\boldsymbol{s}$,可以确定一个标量,即功 W

$$W = |\boldsymbol{f}||\boldsymbol{s}|\cos\theta \tag{1-7}$$

记作 $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}$，所以又称点积。用指标符号，则

$$W = f_1 s_1 + f_2 s_2 + f_3 s_3 = \sum_{i=1}^{3} f_i s_i \tag{1-8}$$

最后一个等式在 Σ 符号下 $f_i s_i$ 有两个同样的指标 i。因为这种形式的求和运算经常遇到，所以大家约定（称为爱因斯坦求和约定）可以不写出，今后，凡在一项中有一对相同的指标，就认为是对这一指标按全程求和。求和所得的结果，当然不再含有这一指标。如式(1-8)求和得出的功 W 就是一个标量，它不再含有表示分量的指标 i。另外，又因为求和结果既然不包括所求和的指标，那么这一指标在运算中间写成什么别的指标也不会影响其结果。即

$$W = f_i s_i = f_j s_j = f_k s_k \tag{1-9}$$

这一记法可以推广到 n 维空间，即 $a_i b_i$ 代表 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$，也可以推广到用指标符号表示的其它物理量，如

$$T_{ij} = \beta_{il}\beta_{jm}T_{lm} = \beta_{i\alpha}\beta_{j\beta}T_{\alpha\beta} \tag{1-10}$$

只要注意将一对求和指标同时替换，如式(1-9)中的 i 换成 j，式(1-10)中将一对 l 换成 α，一对 m 换成 β，它们的含意都是相同的，即

$$T_{ij} = \beta_{i1}\beta_{j1}T_{11} + \beta_{i1}\beta_{j2}T_{12} + \beta_{i1}\beta_{j3}T_{13} + \cdots = \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\beta_{il}\beta_{jm}T_{lm}$$

如上所述，一对相同指标要求和，求和结果与这对指标无关，这样的指标叫哑指标，如式(1-9)中的 i 或 j，k，又如式(1-10)中的 l，m 或 α，β。式(1-10)中还有两个指标 i，j 不求和，叫做自由标。

与式(1-9)对应，当用基矢分别表示 $\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{s}$ 时，它们的点积记为

$$\begin{aligned}W &= (f_1\boldsymbol{e}_1 + f_2\boldsymbol{e}_2 + f_3\boldsymbol{e}_3)\cdot(s_1\boldsymbol{e}_1 + s_2\boldsymbol{e}_2 + s_3\boldsymbol{e}_3)\\ &= f_1 s_1 \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 + f_1 s_2 \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 + f_1 s_3 \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3 + \cdots\\ &= \sum_{i,j} f_i s_j \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = f_i s_j \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j \end{aligned} \tag{1-11}$$

令

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

则由于 e_1、e_2、e_3 是相互垂直的单位矢量，由点积的定义，知

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & （当 i \neq j 时） \\ 1 & （当 i = j 时） \end{cases} \tag{1-12}$$

而有

$$W = f_i s_j \delta_{ij} = f_i s_i = f_1 s_1 + f_2 s_2 + f_3 s_3$$

δ_{ij}称为 Kronecker 符号。对于 n 维向量可将 i、j 的变程扩大为 $i, j = 1, 2, \cdots, n$，于是 n 维空间的点积为

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i \tag{1-13}$$

符号 δ_{ij}今后用得较多，例如式(1-1c)单位矢量 $\boldsymbol{i}$ 为(1,0,0)，$\boldsymbol{j}$ 为(0,1,0)，…就可以将其分量分别写成 $\delta_{1j}, \delta_{2j}, \cdots$。推广到 n 维，而写成

$$e_i = (\delta_{ij}), \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{1-14}$$

显然

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

2. 叉积和置换符号 e_{ijk}

矢量第二种积也与实际有联系。用两个矢量作为邻边，可以构成一个平行四边形，这个平行四边形有面积，而且还可规定一个法线正方向。可以定义矢量的积就等于这样规定的平行四边形。记为 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ ，并定义为

$$|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|\sin\theta \tag{1-15a}$$

以及 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ 矢量的方向为此平行四边形用右手螺旋法则所确定的正法线方向。这样定义的积是矢量，故叫矢积，也叫叉积。

与式(1-11)的定义点积的方式对比，当用基矢表示 $\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$ 时的叉积可写为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} &= (v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3) \times (w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3) \\ &= v_1 w_1 e_1 \times e_1 + v_1 w_2 e_1 \times e_2 + v_1 w_3 e_1 \times e_3 \end{aligned}$$

$$+v_2 w_1 \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 + v_2 w_2 \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 + v_2 w_3 \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 + \cdots \tag{1-15b}$$

由于 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$是互相垂直的单位矢量，由式(1-15a、b)可知

$$\left.\begin{array}{lll} \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = 0, & \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = 0, & \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = 0 \\ \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, & \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, & \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3, & \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1, & \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2 \end{array}\right\} \tag{1-15c}$$

引入符号 e_{ijk}，则上面九个式子可以用一个式子概括

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = e_{ijk}\, \boldsymbol{e}_k \quad (i,j,k = 1,2,3) \tag{1-16}$$

此式的理解是，等式右边有一对相同指标 k，表示要对 k 求和，e_{ijk} 的值规定为

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i,j,k \text{ 按顺时针方向轮换时；} \\ -1 & \text{当 } i,j,k \text{ 按逆时针方向轮换时；} \\ 0 & \text{当 } i,j,k \text{ 中有两个或三个指标相同时。} \end{cases}$$

e_{ijk}称为置换符号，利用符号 e_{ijk}，于是

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = u_i v_j e_{ijk}\, \boldsymbol{e}_k \tag{1-17}$$

3. e_{ijk}与 δ_{ij}的关系

由于符号 e_{ijk}与符号 δ_{ij}使用得较多，这里再顺便提一下它们的关系。由定义

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = e_{ijk}\, \boldsymbol{e}_k \quad (i,j,k = 1,2,3)$$

左右两边点乘 $\boldsymbol{e}_k$，得

$$(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k = e_{ijk} \tag{1-18}$$

上式左边就是矢量的混合积。它的物理意义是以 $\boldsymbol{e}_i$、$\boldsymbol{e}_j$、$\boldsymbol{e}_k$ 为三个棱而形成的正立方体的体积。

我们知道，以 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$为棱的平行六面体的体积 V(注意矢量的次序)可以用行列式

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{1-19}$$

给出。因此，考虑到式(1-14)$e_1=(\delta_{i1},\delta_{i2},\delta_{i3})\cdots$可得

$$(e_i \times e_j)\cdot e_k = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} = e_{ijk} \tag{1-20}$$

以上是两种定义矢量的方法(点积和叉积)。

4. 并矢

矢量积还可以有别的定义方法，例如v和w直接放在一起成vw或wv。这可以叫做直接乘积或并矢，因为它们是将两个矢量并排放在一起的。但是这样定义的乘积有何意义？有何性质？就须另外探讨了(见第二章)。

总之，上面按不同的定义矢量的积得出三种不同的结果，有标量、矢量及并矢。

§1-4 坐 标 变 换

一、三维空间坐标变换

考虑三维空间的两个正交直线坐标系(笛卡尔坐标系)，并设原坐标系为$Ox_1x_2x_3$，其基矢(标架)为e_1、e_2、e_3。又设变换后的新坐标系为$Ox_{1'}x_{2'}x_{3'}$，其基矢(标架)为$e_{1'}$、$e_{2'}$、$e_{3'}$。

设一矢量v，用旧坐标和新坐标系表示，分别为

$$v = e_i v_i = e_{j'} v_{j'} \tag{1-21}$$

由此可得：将矢量分量由旧坐标变换为新坐标的变换式。为此，用$e_{j'}$点乘式(1-21)，得

$$v_{j'} = e_{j'} \cdot e_i v_i$$

记为

$$v_{j'} = \beta_{j'i}\, v_i \tag{1-22}$$

式中

$$\beta_{j'i} = e_{j'} \cdot e_i = |e_{j'}||e_i|\cos\theta = \cos(j',i) \tag{1-23}$$