新世纪高职高专土建类系列教材

工程结构有限元计算

沈养中　李桐栋　主　编

王国菊　马秋生　副主编

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书为《新世纪高职高专土建类系列教材》之一，依据教育部制定的高职高专土建类专业力学课程教学的基本要求编写而成。全书共分八章，内容包括绪论、有限元位移法、杆系结构的单元分析和坐标变换、杆系结构的有限元整体分析、平面杆系结构有限元程序及算例、杆系结构有限元中的几个问题、弹性力学平面问题的有限元法、ANSYS 软件简介。每章后有思考题、习题，并附习题答案。本书着力体现当前高职高专教学改革的特点，突出针对性、适用性和实用性。编写时精选内容，简化公式推导，理论联系实际，注重工程应用；文字简洁，叙述深入浅出，通俗易懂，图文配合紧密。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校以及本科院校所属的二级职业技术学院和民办高校的土建类专业力学课程的教材，也可作为多学时土建类相关专业的力学教材和有关工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

工程结构有限元计算/沈养中，李桐栋主编. -北京：科学出版社，2001
(新世纪高职高专土建类系列教材)
ISBN 7-03-009495-6

Ⅰ. 工… Ⅱ. ①沈…②李… Ⅲ. 工程结构-结构计算-有限元法-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. TU311.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 048856 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2001 年 8 月第一次印刷 印张：12¼
印数：1—4 500 字数：228 000

定价：15.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

本书为《新世纪高职高专土建类系列教材》之一，依据教育部制定的高职高专土建类专业力学课程教学的基本要求编写而成。

本书为建筑力学之四，它与理论力学（建筑力学之一）、材料力学（建筑力学之二）及结构力学（建筑力学之三）在内容上融合、贯通，有机地连成一体，构成高职高专土建类专业配套的力学课程教材。本书着力体现当前高职高专教学改革的特点，突出针对性、适用性和实用性。编写时精选内容，简化公式推导，理论联系实际，注重工程应用；文字简洁，叙述深入浅出，通俗易懂，图文配合紧密。

有限元法是力学与现代计算技术相结合的产物，随着计算机的普及，有限元法已成为工程技术人员的必备知识。目前，各高校都已开设了有限元这门课程，但现有的有限元教材都是为本科生或研究生而编写的，不能很好地适应高职高专学校教学的需要，为此，我们编写了这本有限元教材。本书首先以连续梁为例讲解有限元的基本概念和分析过程，与结构力学自然衔接；对有限元所涉及的高深的数学和力学理论只作简单介绍，适合高职高专学生的知识结构；对基本理论和概念的讲解简洁明了，通俗易懂；重点讲解有限元的思想即有限元分析问题的方法和求解的基本过程，把有限元作为一个结构分析的工具介绍给学生，以提高学生解决实际问题的能力；给出了平面杆系结构和弹性力学平面问题的源程序，使读者可以通过阅读和调试程序，学习有限元的程序设计方法，同时加深对有限元理论的理解。

参加本书编写工作的有：河北工程技术高等专科学校沈养中（第一、四章）、李桐栋（第五、八章）、王国菊（第二、三、六章），华北航天工业学院马秋生（第七章）。全书由沈养中、李桐栋统稿。本书由天津大学副教授杨树耕博士主审。

在本书的编写过程中，许多同行提出了很好的意见和建议，在此表示衷心的感谢。

鉴于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请同行和广大读者批评指正。

第一章 绪 论

本章概述了力学分析的三种方法，简要介绍了有限元法的特点、基本思路和发展概况。

1.1 力学分析方法概述

理论分析、试验分析和计算机分析是力学中三种主要的分析方法。

理论分析是以基本概念和定理为基础，经过严密的数学推演，得到问题的解析解答。它是一种被广泛使用的传统分析方法。构件的强度、刚度和稳定性问题都与所选材料的力学性能有关，而材料的力学性能必须通过材料试验才能测定。另外，对于现有理论还不能解决的某些复杂的力学问题，有时要依靠试验方法才能得以解决。因此，在力学分析方法中，试验分析占有重要的地位。随着计算机的出现和飞速发展，力学的计算手段发生了根本性变化，使过去手算无法解决的问题，例如几十层的高层建筑的结构计算，现在仅用几小时便能得到全部结果。不仅如此，在理论分析中，可以利用计算机得到过去难以导出的公式；在试验分析中，计算机可以整理数据、绘制试验曲线、选用最优参数等。计算机分析已成为一种独特的分析方法，其地位将越来越重要。

从所得力学问题的解答形式来看，理论分析得到的是问题的解析解答，因而理论分析方法也称为解析法。计算机分析得到的是问题的数值解答，因而计算机分析方法也称为数值法。解析法通常只是对某些简单、特殊问题才能得出精确的解析解答。对于大多数工程问题，人们总是力求针对问题的特点作出一些合理的简化，用解析法求出一个可供参考的解答，其他各种复杂因素的考虑均包含在安全系数中。至于大型复杂的工程问题，要用解析法求出解析解答往往是不可能的，此时必须使用数值法。

数值法可分为两类：第一类是在解析法的基础上进行近似数值计算，其做法是对力学问题先建立基本微分方程，然后对基本微分方程进行近似的数值计算，这类方法的代表是有限差分法；第二类是在力学模型上进行近似的数值计算，其做法是首先将连续弹性体简化为由有限个单元组成的离散化模型，然后对离散化模型求出数值解答，这类方法的代表是有限元法。

有限元法从计算简图上入手，用有限个单元组成的理想化结构来代替实际结构，其解决问题是从一个一个单元着手，进而研究由各种单元组成的离散化结构，因而有限元法的物理概念清晰，并且对于各种复杂的因素，例如对于复杂的几何形状和边界条件、复杂的荷载分布，对于由多种材料组成的结构，或由杆、板、壳、块等

不同类型构件组成的结构等均能灵活加以考虑。因此，有限元法自问世以来，已成为解决复杂力学问题的工具，并很快在各种工程领域中得到应用和发展。

1.2 有限元法基本思路

有限元法包括以下三个主要步骤：离散化、单元分析和整体分析。

在对连续弹性体进行离散化时，可以采用杆单元、平面单元和块体单元等各种类型的单元。单元和单元之间的联结点称为结点（或角点）。有限元法选取基本未知量有三种方法：①选取结点位移作为基本未知量。②选取结点力作为基本未知量。③选取一部分结点位移和一部分结点力作为基本未知量。与结构力学相类似，上述三种方法分别称为位移法（或刚度法）、力法（或柔度法）和混合法。用力法求解超静定结构时，先要除去结构的多余约束从而得到静定的基本体系。因力法基本体系的选择常常可以有多种方案，故给计算机通用程序的编制带来不便；而位移法的基本体系是通过对结点施加约束使其不能产生位移而得到，故位移法的基本体系一般来说是惟一的，这样就可使计算程序系统化，并且通用性强。因此，有限元法中一般选取结点位移作为基本未知量。至于混合法，在有些问题，例如断裂力学问题中，显得比较方便。本书只讲述位移法。

在位移法中，单元分析的目的是建立单元结点力与结点位移之间的转换关系，即单元刚度方程。将单元装配成结构，综合考虑平衡条件和变形协调条件后进行整体分析，建立结构的结点力与结点位移之间的转换关系，即整体刚度方程，最后，通过求解线性方程组，得到结点位移。

在单元分析和整体分析中都采用矩阵计算。用矩阵进行运算可以使力学问题的表达紧凑，形式简洁，能够有效地形成和求解结构刚度方程（线性方程组），而且用矩阵表示的各种计算步骤容易实现标准化，适宜于编制计算机通用程序。因此，有限元法又称为结构矩阵分析。

1.3 有限元法发展概论

在电子计算机没有问世之前，传统的结构分析是建立在手算的基础之上的。人们往往寻找各种解题技巧，以期解决较为复杂的和计算繁杂的结构分析问题。结构力学中各种计算技巧就是在这种背景下产生的，其中最典型的例子是“力矩分配法”。1930 年，美国伊利诺斯大学 H. Cross 发表了连续梁和无侧移刚架的力矩分配法，由于该法避免了联立方程的求解，在世界土木工程界几乎引起轰动。所有这些结构分析的计算技巧，仅仅只针对一些特殊问题，都有一定的应用范围，所以人们希望能有一个有效的、通用性强的结构分析方法。

直到 20 世纪 50 年代，随着喷气式飞机逐步取代螺旋桨飞机，飞机的结构愈加复杂，这对航空设计部门提出了更高要求。以美国波音公司的 M. J. Turner、英国

伦敦大学的 J. H. Argyris 为代表，提出了结构矩阵分析方法，以刚刚问世不久的电子计算机为工具，进行结构分析。1960 年美国加州大学伯克利分校的 R. W. Clough 首先正式使用“有限单元”(finite element)这一术语。正是在工程技术飞速发展的基础上，有限元法应运而生。

有限元法的出现是 20 世纪力学界和工程界的一个重大事件。有限元法开辟了解决大型复杂工程问题的新天地，使过去不敢碰的一些计算难题变成常规问题，过去不得已而采用的一些过于粗糙的计算模型已被更加接近实际的精确模型代替，计算的未知数可以达到成千上万个，并且计算精度高、计算速度快。有限元法的这些巨大优越性使得它一经出现，便得到异常迅猛的发展。

经过半个世纪的发展，有限元法已成为一门成熟的学科。有限元的应用部门已从航空航天扩展到土木、机械、交通、水利等几乎所有的工业部门。有限元法的研究对象已从静力分析、线性问题扩展到动力分析、非线性问题；从弹性问题扩展到弹塑性、粘弹性问题和断裂问题；从固体力学扩展到流体力学；从工程力学扩展到生物力学。同时，有限元法本身在理论上也日趋完善，包括各种类型单元的建立，有限元法的数学基础，以及各种大型通用结构分析程序的编制等。

在本章的最后顺便指出，本书是为高职高专学生编写的一本有限元法的入门书。期望读者在学习本书后，能够掌握有限元法的基本思想，了解简单结构中有限元法的实现过程，会利用通用程序进行工程结构有限元计算。

第二章　有限元位移法

本章介绍有限元位移法的基本概念和主要分析步骤，讨论了利用有限元位移法分析连续梁结构的全过程，并给出了分析连续梁结构的程序框图。

2.1　有限元位移法的概念和分析步骤

2.1.1　有限元位移法的概念

有限元位移法是以结构的结点位移作为基本未知量，把连续体离散成有限个单元体，这些单元体在结点处相互联结，组成一个单元体的组合体，以代替原结构；对每个单元体建立结点力和结点位移之间的关系，然后对所有单元体的这种关系进行集成，建立以结点位移为未知量的代数方程组，求解方程组后得到结点位移，进而求得结构的内力。由于这种方法首先要把连续结构离散成若干个有限单元体，并在分析过程中以结点位移为基本未知量，故把这种分析方法称为有限元位移法，简称有限元法。

2.1.2　结构离散化

对结构进行有限元分析的第一步是把结构离散成有限个单元体，这一过程称为结构离散化。它是有限元分析的基础。对结构离散化，也就是对结构进行单元的划分。单元划分实际上就是把一个连续的整体结构划分为有限个单元体，并在单元体的指定点设置结点，把相邻的单元体在结点处联结，组成一个单元体的组合体来代替原结构。对结构进行离散时，所划分的单元类型是多种多样的，可以是一个杆件、一个三角形，也可以是四边形、四面体或者棱柱体等。具体划分成哪种类型的单元，应根据结构的具体形式而定，如杆系结构可划分为杆件单元，平板或曲板结构常划分为三角形单元或四边形单元，实体结构则通常划分为四面体单元或棱柱体单元。

2.1.3　分析单元的力学特性

把结构划分成若干个单元以后，就要对每个单元进行力学特性分析，其目的是对每个单元建立杆端内力与杆端位移之间的关系。对杆系结构，杆端内力与杆端位移之间的关系可由材料力学或结构力学的知识直接得出，一般表示为

$$\{F\}^e = [k]\{\delta\}^e \tag{2.1}$$

式中：$[k]$——单元刚度矩阵；

$\{F\}^e$——单元的杆端力向量；

$\{\delta\}^e$——单元的杆端位移向量。

式(2.1)称为单元的刚度方程。单元分析的核心内容就是建立单元刚度方程，求出单元刚度矩阵。

对于其他结构形式，需要利用几何方程、应力-应变关系及虚功原理建立单元刚度方程，从而求得单元刚度矩阵。

2.1.4 集成刚度矩阵，建立整体刚度方程

求得各单元的刚度矩阵以后，需进行整体分析，即由单元刚度矩阵集成整体刚度矩阵，并建立整体荷载向量。集成整体刚度矩阵常用的方法是直接刚度法，这个方法在以后的章节中我们将作详细介绍。有了整体刚度矩阵、荷载向量和结点位移向量，就可以得到如下的整个结构的平衡方程：

$$\{F\} = [K]\{\Delta\} \tag{2.2}$$

2.1.5 求解未知结点位移，计算单元内力

对上面建立的整体刚度方程，在考虑了边界条件，并进行适当的修改以后，就可以求解方程，从而解出所有的未知结点位移。对于线弹性问题，仅根据方程组的具体特点选择合适的计算方法即可；而对于非线性问题，则需通过一系列的步骤，逐步修正刚度矩阵、荷载向量列阵后才能求出解答。

求得结构的各结点位移以后，再转化为杆端位移，并代回式(2.1)即可求得各单元的内力。

2.2 连续梁的有限元法

2.2.1 用有限元法求解连续梁问题

了解了有限元法的基本概念和分析步骤以后，我们将介绍如何用有限元法来求解连续梁问题，以便对有限元法有更清晰的认识。

1. 单元划分

用有限元法分析的第一步是划分单元。在连续梁结构中，这一步比较简单，其单元的划分是自然形成的，即把每一段杆件看作一个单元，每个支座都看作结点。如图 2.1 所示，结点的编号为 1、2、3、…、n，单元的编号为①、②、③、…、$n-1$。设连

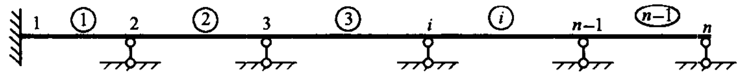


图 2.1

续梁结构共有 n 个结点，则可划分为 $(n-1)$ 个单元，连续梁的结点数减去 1 即为单元数。连续梁的左右两端可以是铰接，也可以是固定端；各单元的弯曲刚度可以相同，也可以不同。

2. **单元分析**

单元划分完成以后，即可进行单元分析，其目的是形成单元刚度矩阵。我们以如图 2.2 所示的连续梁为例，介绍如何进行单元分析。

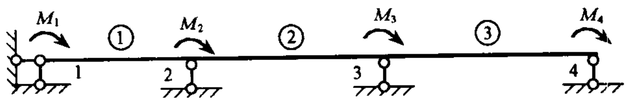


图 2.2

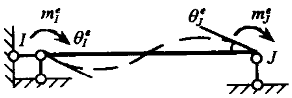


图 2.3

图 2.2 所示的连续梁承受结点力偶作用，结构中的结点统一编号为 1、2、3、4，单元编号为①、②、③。对单元进行分析时，任取一典型单元，如图 2.3 所示。为分析方便，对单元的两端重新编号为 I、J。

对连续梁进行单元分析的主要任务是建立杆端力矩 m_I^e、m_J^e 与结点转角 θ_I^e、θ_J^e 之间的关系式，其关系式可由结构力学中的转角位移方程直接得出，其矩阵形式为

$$\begin{Bmatrix} m_I \\ m_J \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} 4i & 2i \\ 2i & 4i \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \theta_I \\ \theta_J \end{Bmatrix}^e \tag{2.3}$$

令

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k_{II} & k_{IJ} \\ k_{JI} & k_{JJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i & 2i \\ 2i & 4i \end{bmatrix}^e \tag{2.4}$$

则上式变为

$$\begin{Bmatrix} m_I \\ m_J \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} k_{II} & k_{IJ} \\ k_{JI} & k_{JJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_I \\ \theta_J \end{Bmatrix}^e \tag{2.5}$$

或简写为

$$\{m\}^e = [k]^e\{\theta\}^e \tag{2.6}$$

式中：$\{m\}^e$——单元ⓔ的杆端力矩向量，$\{m\}^e = \begin{Bmatrix} m_I \\ m_J \end{Bmatrix}^e$；

$\{\theta\}^e$——单元ⓔ的结点转角向量，$\{\theta\}^e = \begin{Bmatrix} \theta_I \\ \theta_J \end{Bmatrix}^e$；

$[k]^e$——单元ⓔ的单元刚度矩阵，$[k]^e = \begin{bmatrix} k_{II} & k_{IJ} \\ k_{JI} & k_{JJ} \end{bmatrix}^e$。$k_{II}$、$k_{IJ}$、$k_{JI}$、$k_{JJ}$是矩阵 $[k]^e$ 中的元素，称为刚度系数。k_{IJ}表示使 J 点产生单位转角（其他转角为 0）时需在 I 点施加的力偶。

单元刚度矩阵$[k]^e$ 有如下性质：

1）单元刚度矩阵$[k]^e$ 是利用结点转角向量求杆端力矩向量时的转换矩阵。

2）$[k]^e$ 中的第一列向量$\begin{bmatrix} k_{II} \\ k_{JI} \end{bmatrix}$中的两个元素表示单元在 I 点发生单位转角即 $\theta_I=1$ 时分别在两端需施加的力偶，如图 2.4(a,b)所示。

3）$[k]^e$ 中的第一行向量$[k_{II} \quad k_{IJ}]$中的两个元素表示单元在两端点分别发生单位转角即 $\theta_J=1$ 时需施加在 I 点的力偶，如图 2.4(a,b)所示。

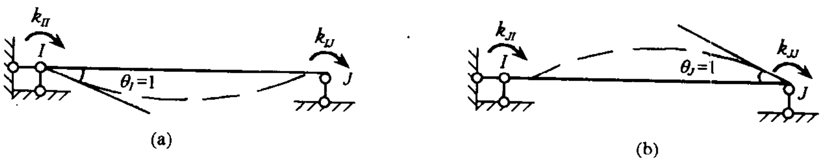


图 2.4

4）$[k]^e$ 为一对称矩阵，即 $k_{IJ}=k_{JI}$。

3. **整体分析**

求出各单元的刚度矩阵$[k]^e$ 以后，即可对连续梁进行整体分析，其目的是求出整体刚度矩阵，建立整体刚度方程。

如图 2.5 所示的连续梁，在建立整体刚度矩阵$[K]$时我们先不考虑支承情况，认为此梁有 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 4 个结点转角，结点上作用有 4 个力偶，分别为 M_1、M_2、M_3、M_4，则结点力偶和转角向量分别为

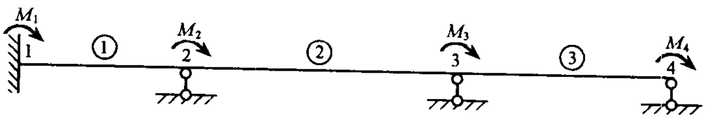


图 2.5

$$\{M\}=\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} \qquad \{\theta\}=\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

结点力偶和结点转角都以顺时针转动为正，逆时针转动为负。

结点力偶和结点转角的关系为

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} \tag{2.7}$$

或简写为

$$\{M\}=[K]\{\theta\} \tag{2.8}$$

式中：$[K]$——整体刚度矩阵，$[K]$中的任一元素 K_{ij}称为整体刚度系数，它表示当结点 j 发生单位转角即 $\theta_j=1$(其他结点转角为 0)时在 i 点需施加的结点力偶 M_i。

整体刚度系数 K_{ij} 可由单元刚度矩阵求得。例如对如图 2.5 所示的连续梁的单元①、②、③，可求得各单元刚度矩阵为

$$[k]^1=\begin{bmatrix}4i_1 & 2i_1\\ 2i_1 & 4i_1\end{bmatrix}$$

$$[k]^2=\begin{bmatrix}4i_2 & 2i_2\\ 2i_2 & 4i_2\end{bmatrix}$$

$$[k]^3=\begin{bmatrix}4i_3 & 2i_3\\ 2i_3 & 4i_3\end{bmatrix}$$

整体刚度矩阵 $[K]$ 是由单元刚度矩阵 $[k]^e$ 叠加而成的，但并不是 $[k]^1$、$[k]^2$、$[k]^{3}$ 的简单叠加，这是因为 $[K]$ 是 4×4 阶矩阵，而 $[k]^e$ 是 2×2 阶矩阵，所以在叠加前应对单元刚度矩阵 $[k]^e$ 进行修改，扩大为 4×4 阶矩阵。下面先修改各单元刚度矩阵：在单元①中，单元 I 结点对应结点 1，J 结点对应结点 2，则有

$$[k]^1=\begin{bmatrix}4i_1 & 2i_1 & 0 & 0\\ 2i_1 & 4i_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

在单元②中，单元 I 结点对应结点 2，J 结点对应结点 3，则有

$$[k]^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4i_2 & 2i_2 & 0\\ 0 & 2i_2 & 4i_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

在单元③中，单元 I 结点对应结点 3，J 结点对应结点 4，则有

$$[k]^3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4i_3 & 2i_3\\ 0 & 0 & 2i_3 & 4i_3\end{bmatrix}$$

将修改后的各单元刚度矩阵叠加，即得整体刚度矩阵为

$$[K]=\begin{bmatrix}4i_1 & 2i_1 & 0 & 0\\ 2i_1 & 4i_1+4i_2 & 2i_2 & 0\\ 0 & 2i_2 & 4i_2+4i_3 & 2i_3\\ 0 & 0 & 2i_3 & 4i_3\end{bmatrix}$$

有了整体刚度矩阵，可得到如下的整体刚度方程：

$$\begin{bmatrix}4i_1 & 2i_1 & 0 & 0\\ 2i_1 & 4i_1+4i_2 & 2i_2 & 0\\ 0 & 2i_2 & 4i_2+4i_3 & 2i_3\\ 0 & 0 & 2i_3 & 4i_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}M_1\\ M_2\\ M_3\\ M_4\end{Bmatrix} \tag{2.9}$$

这种由单元刚度矩阵直接集成整体刚度矩阵的方法称为直接刚度法，或称为刚度集成法。由集成过程可知，刚度集成法的关键是求出各单元刚度矩阵，并根据单元 I、J 结点的编号修改刚度矩阵，然后叠加即可。

用刚度集成法集成整体刚度矩阵是有限元法计算连续梁结构的关键步骤。

上面我们以三跨连续梁为例介绍了刚度集成法的基本原理和计算过程。对于具有 n 个结点[有 $(n-1)$ 个单元]的连续梁，利用刚度集成法可得到整体刚度矩阵为

$$[K]=\begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & & & & \\ 2i_1 & 4i_1+4i_2 & 2i_2 & & & \\ & 2i_2 & 4i_2+4i_3 & 2i_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2i_{n-2} & 4i_{n-2}+4i_{n-1} & 2i_{n-1} \\ & & & & 2i_{n-1} & 4i_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

由上式可见，对于具有 n 个结点的连续梁，其整体刚度矩阵是 $n\times n$ 阶的。矩阵中的非零元素集中在主对角线及两旁的另外两条对角线上，其他元素均为零，这种矩阵称为三对角矩阵。

【例 2.1】 用刚度集成法求如图 2.6 所示连续梁的整体刚度矩阵。为计算方便，设各跨的线刚度相等，均为 $i=1$。

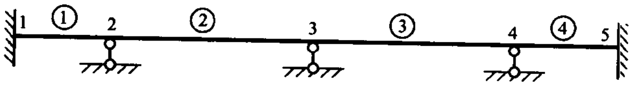


图 2.6

【解】 直接利用式(2.10)得到整体刚度矩阵为

$$[K]=\begin{bmatrix} 4 & 2 & & & \\ 2 & 8 & 2 & & \\ & 2 & 8 & 2 & \\ & & 2 & 8 & 2 \\ & & & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

4. 支承条件的引入

对于某一连续梁，若连续梁的两端为固定端，则端点的转角 θ 应等于零，此时，应对刚度方程进行修改，亦即引入支承条件。引入支承条件可以在整体刚度矩阵集成之前，也可以在整体刚度矩阵集成之后再引入。在连续梁中我们采用后一种处理方法，即形成整体刚度矩阵之后再引入支承条件，这种方法称为后处理法。

仍以图 2.5 所示连续梁为例，说明如何引入支承条件。对此梁，我们已建立了整体刚度方程式(2.9)，但由于左端为固定端，故 θ_1 应等于零，为此需修改整体刚度方程。为使建立的刚度方程达到 $\theta_1=0$ 的目的，将整体刚度方程式(2.9)改为如

下形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4i_1+4i_2 & 2i_2 & 0 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2+4i_3 & 2i_3 \\ 0 & 0 & 2i_3 & 4i_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

由式(2.11)可知，引入支承条件的具体做法是修改整体刚度矩阵，即将与固定端相应的主对角线元素改为 1，相应行、列的其他元素改为 0，相应的荷载也改为 0。

5. 非结点荷载的处理

作用于连续梁上的荷载是任意的，可以是结点荷载，也可以是非结点荷载。如果是结点荷载，则按前面讲述的方法计算；若为非结点荷载，则需转化为等效结点荷载。下面讨论非结点荷载的处理方法。

如图 2.7(a)所示的结构，欲求单元的等效结点荷载，首先在各结点处施加约束，以阻止结点转动[图 2.7(b)]，此时，单元①、②产生的固端弯矩为

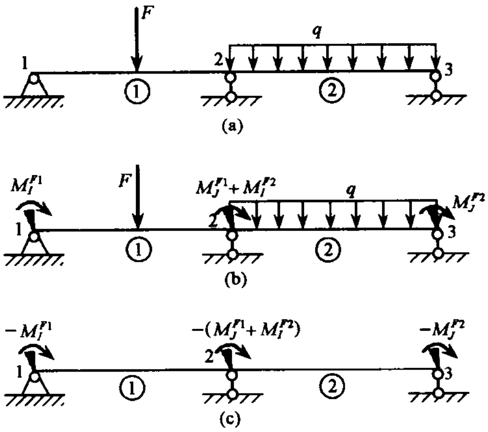


图 2.7

$$\{M^F\}^1 = \begin{Bmatrix} M_I^F \\ M_J^F \end{Bmatrix}^1 \qquad \{M^F\}^2 = \begin{Bmatrix} M_I^F \\ M_J^F \end{Bmatrix}^2$$

将固端弯矩叠加到相关结点上，得到结点约束力矩为

$$\begin{Bmatrix} M_1^F \\ M_2^F \\ M_3^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_I^{F1} \\ M_J^{F1} + M_I^{F2} \\ M_J^{F2} \end{Bmatrix}$$

然后去掉各结点的约束，使结构恢复原状，这相当于在各结点处施加力偶$\{F\}$，其数值和约束力矩相等，但方向相反。如图 2.7(c)所示，$\{F\}$被称为原结构的等效结点荷载，即

$$\{F\}=\begin{Bmatrix} -M_1^{F1} \\ -M_2^{F1}-M_1^{F2} \\ -M_2^{F2} \end{Bmatrix} \tag{2.12}$$

各单元固端力矩的计算可按结构力学的方法求解，或查附录表1。

6. 单元杆端弯矩

连续梁在一般荷载作用下，各单元的杆端弯矩由两部分组成，一部分是由杆端位移引起的杆端弯矩；另一部分是由作用于单元上的非结点荷载产生的固端弯矩。将二者叠加起来即可得到单元杆端弯矩，即

$$\begin{Bmatrix} M_I \\ M_J \end{Bmatrix}^e=\begin{bmatrix} k_{II} & k_{IJ} \\ k_{JI} & k_{JJ} \end{bmatrix}^e\begin{Bmatrix} \theta_I \\ \theta_J \end{Bmatrix}^e+\begin{Bmatrix} M_I^F \\ M_J^F \end{Bmatrix}^e \tag{2.13}$$

由于连续梁的支座下沉Δ所引起的杆端弯矩，可用类似的方法求解，其中支座位移Δ引起的固端弯矩，用结构力学的方法求解，或查附录表1。

【例2.2】 用有限元法计算图2.8(a)所示连续梁的内力。设$i_1=i_3=1$，$i_2=2$。

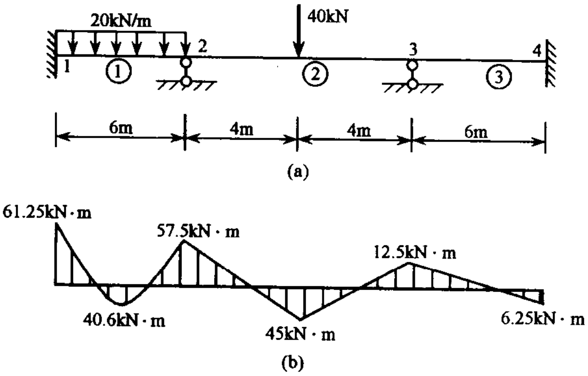


图2.8

【解】 1) 结点编号。用有限元法计算时先对连续梁进行编号，如图2.8(a)所示。

2) 计算固端弯矩及等效结点荷载。由结构力学知识可得三个单元的固端弯矩分别为

$$\begin{Bmatrix} M_I^F \\ M_J^F \end{Bmatrix}^1=\begin{Bmatrix} -60 \\ 60 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} M_I^F \\ M_J^F \end{Bmatrix}^2=\begin{Bmatrix} -40 \\ 40 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} M_I^F \\ M_J^F \end{Bmatrix}^3=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

由式(2.12)可得等效结点荷载向量为

$$\{F\}=\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -M_1^{F1} \\ -M_J^{F1}-M_I^{F2} \\ -M_J^{F2}-M_I^{F3} \\ -M_J^{F3} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 60 \\ -20 \\ -40 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3) 求单元刚度矩阵。由式(2.4)可知

单元①　　$[k]^1=\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}$

单元②　　$[k]^2=\begin{bmatrix}8 & 4\\4 & 8\end{bmatrix}$

单元③　　$[k]^3=\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}$

4）集成整体刚度矩阵。由式(2.10)直接得出

$$[K]=\begin{bmatrix}4 & 2 & 0 & 0\\2 & 12 & 4 & 0\\0 & 4 & 12 & 2\\0 & 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

5）引入支承条件。由于连续梁左、右两端都是固定端，故 $\theta_1=\theta_4=0$。将整体刚度矩阵中与 θ_1、θ_4 相应的第1、4行、列元素进行修改，即主对角线元素改为1，其他元素改为0。整体刚度矩阵修改为

$$[K]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 12 & 4 & 0\\0 & 4 & 12 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

同时，荷载向量中的第1、4个元素也改为0，整体刚度方程为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 12 & 4 & 0\\0 & 4 & 12 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\\theta_2\\\theta_3\\\theta_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\-20\\-40\\0\end{Bmatrix}$$

6）解方程，求未知结点转角。由上面的刚度方程可求得结点转角如下：

$$\left.\begin{aligned}\theta_1&=0\\\theta_2&=-0.625\\\theta_3&=-3.125\\\theta_4&=0\end{aligned}\right\}$$

7）求杆端弯矩。由式(2.13)可得

$$\begin{Bmatrix}M_I\\M_J\end{Bmatrix}^1=\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\-0.625\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-60\\60\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-61.25\\57.5\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}M_I\\M_J\end{Bmatrix}^2=\begin{bmatrix}8 & 4\\4 & 8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0.625\\-3.125\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-40\\40\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-57.5\\12.5\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}M_I\\M_J\end{Bmatrix}^3=\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-3.125\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-12.5\\-6.25\end{Bmatrix}$$

根据求得的各杆端弯矩绘出 M 图，如图 2.8(b)所示。

【例 2.3】 用有限元法计算图 2.9(a)所示连续梁的内力，并绘出弯矩图。

【解】 1) 结点编号。将图 2.9(a)所示连续梁分成两个单元，编号为①、②，结点编号为 1、2、3。

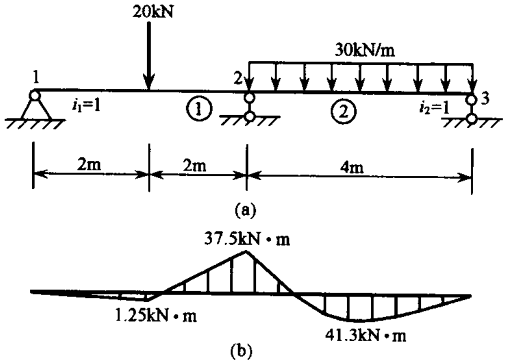


图 2.9

2) 计算固端弯矩及等效结点荷载。由结构力学的计算公式可得两个单元的固端弯矩分别为

$$\begin{Bmatrix} M_I \\ M_J \end{Bmatrix}^1 = \begin{Bmatrix} -10 \\ 10 \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} M_I \\ M_J \end{Bmatrix}^2 = \begin{Bmatrix} -40 \\ 40 \end{Bmatrix}$$

由式(2.12)可得等效结点荷载向量为

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -M_I^{F1} \\ -M_J^{F1} - M_I^{F2} \\ -M_J^{F2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 30 \\ -40 \end{Bmatrix}$$

3) 求单元刚度矩阵。由计算单元刚度矩阵的公式(2.4)直接得

$$[k]^1 = [k]^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

4) 求整体刚度矩阵。由式(2.10)直接求得

$$[K] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

由于此连续梁左、右两端都是铰支座，故不用修改刚度矩阵，直接得到刚度方程为

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 30 \\ -40 \end{Bmatrix}$$

5) 解方程，求未知位移。由上面的刚度方程可求得各结点转角如下：

$$\theta_1 = -1.25, \quad \theta_2 = 7.5, \quad \theta_3 = -13.75$$

6) 求杆端弯矩。由式(2.13)可得

$$\begin{Bmatrix} M_I \\ M_J \end{Bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1.25 \\ 7.5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -10 \\ 10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 37.5 \end{Bmatrix}$$

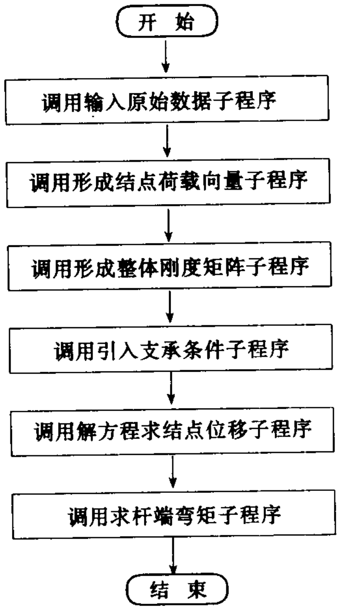
$$\begin{Bmatrix} M_I \\ M_J \end{Bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 7.5 \\ -13.75 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -40 \\ 40 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -37.5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

由此绘出弯矩图，如图 2.9(b)所示。

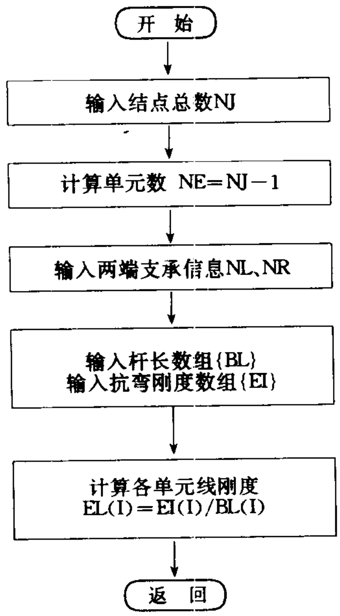
2.2.2 连续梁的程序框图

本节给出用有限元法分析连续梁的程序框图，读者可以利用本框图练习编写程序。本框图由一个主程序框图和五个子程序框图组成。

1. 主程序框图



2. 输入原始数据子程序框图



3. 形成结点荷载向量子程序框图