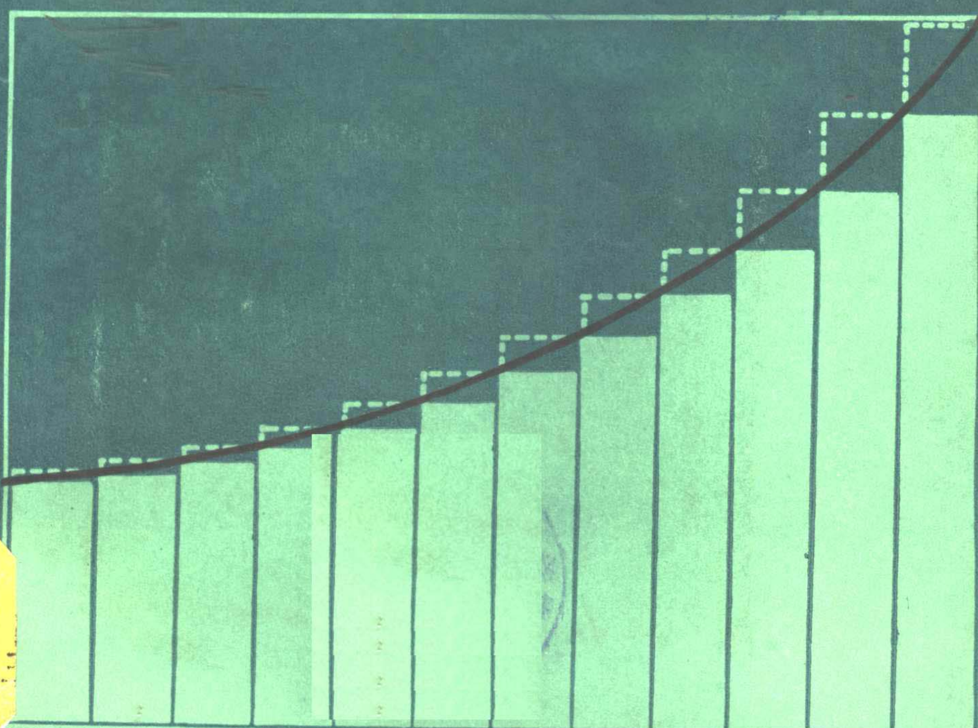
高等学校教学用书

高等数学

·上册·

（化、生、地专业用）

王存喜　宣体佐　编



北京师范大学出版社

高等学校教学用书

高等数学

上册

(化、生、地专业用)

王存喜　宣体佐　编

北京师范大学出版社

内 容 简 介

本书是为化学系、生物系、地理系等本科专业编写的教材，全书分上、下两册．主要内容包括一元函数微积分、级数、常微分方程、向量代数、空间解析几何、多元函数微积分以及行列式与矩阵的简介．内容紧扣教学大纲的要求，叙述便于自学是本书两大特点．

高等学校教学用书

高 等 数 学

上 册

（化、生、地专业用）

王存喜 宣体佐 编

*

北京师范大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

中国科学院印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：14.25 字数：349 千

1990 年 4 月第 1 版 1990 年 4 月第 1 次印刷

印数：1—2 000

ISBN 7-303-00826-8/O·114

定 价：3.45 元

编 者 的 话

本书是依据我们在北师范大学化学、地理等系讲授“高等数学”课的体会，同时依据高等师范院校化学、生物、地理等专业的“高等数学”课教学大纲，以及原教育部1984年4月颁发的中学教师进修高等师范本科化学专业的“高等数学”课教学大纲编写的.

目前国内已有一些高等数学教材，但是它们大多适应于工科专业的特点，而适应于理科及高等师范院校特点的教材尚且不多，为此我们编写此书，意图是为理科及高等师范院校的化、生、地等系的高等数学课提供教材，同时也可作为广大中学教师进修高师本科化学等专业的高等数学课提供教材.

我们在编写此书时注意突出以下两点：

一、内容紧扣大纲．由于本书的内容完全适应于它所遵循的两个大纲（本文开头已叙）的要求，因此我们的愿望是使本书有较强的针对性，又有较广泛的适用性.

二、叙述便于自学．由于在化、生、地等系开设的这门数学课长期以来存在着内容多、课时少的矛盾，因此本书的编写思想又要突出便于自学，我们尽量使讲解较为详尽，例题较为丰富，同时本书每节后配有习题，每章中分单元配有小结和综合例题，本书最后附有习题答案或解题提示，我们的愿望是使读者感到方便.

本书分上、下两册，上册内容主要包括一元函数微分学、一元函数积分学．下册内容主要包括级数、常微分方程、向量代数、空间解析几何、多元函数微积分、以及行列式与矩阵简介．带“*”号的章节，可酌情处理.

我们在编写中主要参考的书目有；樊映川等编的“高等数学讲义”，同济大学编著的“高等数学习题集”，辛钦（苏）著的“数学分

析简明教程”，希尔斯特（美）著的“化学数学”。此外还参考了其他有关高等数学教材。

本书上册由宣体佐同志编写，下册由王存喜同志编写。

本书承北京师大数学系董延闿教授审阅，并提出许多宝贵意见。对此，我们表示衷心地感谢。

由于编者的水平有限，本书一定存在不少缺点与错误，我们恳切希望读者给予批评指正。

编者　于北师大数学系。

目　　录

第一章 函 数

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，也是微积分的研究对象．在这一章里，我们从变量说起，然后讨论函数的一般概念和最常用的函数——初等函数．

§1.1 变量·区间

一、常量与变量

在观察自然现象或者生产过程时，常常会遇到各种不同的量，例如时间、距离、速度、面积、体积、温度等，它们各自有着不同的状态．其中有些量在某个过程中可以取不同的数值，这些量叫做**变量**；另一些量在过程的进行中却保持一定的数值不变，这些量叫做**常量**．例如在匀速直线运动中，速度是一个常量，而时间和路程都是变量．又如把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积是一个常量，而气体的温度和压强都是变量．

常量和变量的划分是相对的．它依赖于研究这个现象的场合．同一个量在某种情况下是常量，而在另一种情况下就可能是变量．例如重力加速度，在地球表面不大的范围内可看作一个常量，但在广大的范围内它必是一个变量．

我们还会遇到这样的情况，某些量在整个过程中虽然是变化的，但变化很小可以忽略不计，这时可把这个量看作常量．例如在自由落体运动中，当物体离地面不太高时，就把重力加速度看作一个常量．但在研究火箭的发射问题时，火箭的高度变化很大，这时重力加速度变化也很大，这种情况下就必须把重力加速度看作变

量，才能正确地解决问题.

由上面所说，我们不应把常量与变量绝对地对立起来，今后在讨论中，我们把常量看作变量的特殊情形，即把常量看作特殊的变量. 这给讨论问题带来许多便利. 我们再举生活中的一个例子来加以说明. 例如公共汽车的票价随乘车站数的不同而不同，因此汽车票价就是一个变量.但北京市内有几条线路上的公共汽车，不论乘车一站还是乘至终点站，票价一律一角，因此这几条线路上的公车汽车票价就是常量. 当我们把常量看作特殊的变量时，就可以说，北京市内各条线路上的公共汽车的票价都是变量. 这样，在讨论有关汽车票价的问题时，就避免了繁琐的说明.

通常用字母 a，b，c 等表示常量，用字母 x，y，t 等表示变量.

任何变量都有一个变化范围. 变化范围只包含一个数时，这个变量实际上就是一个常量.

一般说来，变量的变化范围常用区间来表示.

二、区间

设 a,b 是两个实数，且 $a<b$. 把满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的全体叫做**开区间**，记作 (a,b).把满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的全体叫做**闭区间**，记作 $[a, b]$. 把满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的实数 x 的全体叫做**半开区间**，分别记作 $(a, b]$ 或 $[a, b)$. 这些区间在数轴上表示出来，就是介于点 a 和点 b 之间的线段上的点的全体，如图 1.1 所示.点 a 和点 b 叫做区

开区间 (a,b)

闭区间 $[a,b]$

右半开区间 $[a,b)$

左半开区间 $(a,b]$

图 1.1

间的**端点**,线段的长度 $b-a$ 叫做区间的长度.

上面的区间都是有限区间,此外还有**无限区间**:

大于 a 的实数的全体,用 $(a,+\infty)$ 表示,或写成 $a<x<+\infty$;

大于或等于 a 的实数的全体,用 $[a,+\infty)$ 表示,或写成 $a\leqslant x<+\infty$;

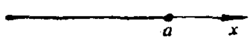
小于 a 的实数的全体,用$(-\infty,a)$表示,或写成$-\infty<x<a$;

小于或等于 a 的实数的全体,用 $(-\infty,a]$ 表示,或写成 $-\infty<x\leqslant a$;

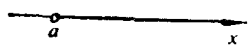
全体实数用 $(-\infty,+\infty)$ 表示,或写成 $-\infty<x<+\infty$.

这里应注意,$+\infty$ 和 $-\infty$ 只是记号,不是数,分别读作"正无穷大"和"负无穷大".

无限区间在数轴上的表示可参看图 1.2.



无限区间 $(-\infty,a]$



无限区间 $(a,+\infty)$

图 1.2

三、实数的绝对值

在后面的讨论中常用到有关绝对值的知识,设 a 为一实数,a **的绝对值**规定为:如果 a 是正数,则 a 的绝对值就是 a 本身;如果 a 是负数,则 a 的绝对值是与它相反的正数 $-a$;零的绝对值还是零.用式子表示就是:

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{当 } a\geqslant 0 \text{ 时},\\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

根据绝对值的定义,容易知道下面的关系式成立;$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$. 此外还有,关系式 $|a|\leqslant k(k\geqslant 0)$ 与 $-k\leqslant a\leqslant k$ 是等价的.这就是说,若 $|a|\leqslant k$,则有 $-k\leqslant a\leqslant k$;反之,若 $-k\leqslant a\leqslant k$,则有 $|a|\leqslant k$.

同样，关系式 $|a|<k(k>0)$ 与 $-k<a<k$ 是等价的。

关于绝对值的运算，有下面的几条性质：

1. 和的绝对值不大于各项绝对值之和，即

$$|a+b+c+\cdots+k| \leqslant |a|+|b|+|c|+\cdots+|k|.$$

2. 差的绝对值不小于各项绝对值之差，即

$$|a-b| \geqslant |a|-|b|.$$

3. 积的绝对值等于各因数绝对值之积，即

$$|abc\cdots k| = |a||b||c|\cdots|k|.$$

4. 商的绝对值等于被除数与除数的绝对值之商，即

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

例 解下列绝对值不等式，并把其解集用区间表示出来：

(1) $|x-3|<1$；(2) $\left|\frac{3x+2}{4}\right| \geqslant 2$；(3) $0<(x-2)^2 \leqslant 4$.

解 (1) $|x-3|<1$，它与 $-1<x-3<1$ 等价，所以 $2<x<4$. 用区间表示，解集为 $(2,4)$.

(2) $\left|\frac{3x+2}{4}\right| \geqslant 2$，即 $\frac{|3x+2|}{4} \geqslant 2$，所以 $|3x+2| \geqslant 8$，它等价于 $3x+2 \geqslant 8$ 或 $3x+2 \leqslant -8$，故得

$$x \geqslant 2 \quad 或 \quad x \leqslant -3\frac{1}{3}.$$

用区间表示，解集为 $[2,+\infty)$ 或 $\left(-\infty,-3\frac{1}{3}\right]$.

(3) $0<(x-2)^2 \leqslant 4$. 由 $(x-2)^2>0$，得 $x \neq 2$. 由 $(x-2)^2 \leqslant 4$ 知 $|x-2|^2 \leqslant 4$，于是 $|x-2| \leqslant 2$，故得 $0 \leqslant x \leqslant 4$. 由于 x 必须同时满足上述两个不等式，故得 $0 \leqslant x<2$ 或 $2<x \leqslant 4$. 用区间表示，解集为 $[0,2)$ 或 $(2,4]$.

四、邻域

我们在以后的讨论中，常要考虑某一点附近的情况，为此我们

引入邻域的概念。

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$。满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的实数 x 的全体，叫做点 a 的 δ **邻域**。点 a 叫做这邻域的中心，δ 叫做这邻域的半径。由于不等式 $|x-a|<\delta$ 与 $-\delta<x-a<\delta$，即 $a-\delta<x<a+\delta$ 等价，而满足最后这个不等式的实数 x 的全体，就是开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$，所以可以说点 a 的 δ 邻域也就是以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间，如图 1.3 所示。

图 1.3

习 题 1.1

1. 用区间表示 x 的变化范围，并在数轴上表示出来：

(1) $2<x\leqslant 5$；　　(2) $|x|\geqslant 2$；

(3) $x^2<9$；　　(4) $|x-3|\leqslant 4$；

(5) $0<|x+2|<5$；　　(6) $|x|>x$。

2. 化简：$\left(\dfrac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x-|x|}{2}\right)^2$。

3. 将下列各开区间看作邻域，求其中心和半径，并用绝对值不等式表示出来：

(1) $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$；　(2) $(16,17)$；　(3) (a,b) $(a<b)$。

§1.2 函数概念

一、函数举例

在同一个自然现象或生产过程中，往往有几个不同的变量，它们的变化相互联系着，共同遵循着一定的规律。

例 1 圆的面积A随着半径的变化而变化，变化的规律是

$$A=\pi r^2.$$

半径r的变化范围是$(0,+\infty)$，当r在$(0,+\infty)$中取定某一数值时，由上面的公式可以确定A的一个数值与之对应.

例 2 自由落体问题. 设物体下落的时间为t，所落下的距离为s，则s与t之间满足关系式

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中g是重力加速度，它是一个常量. 设物体着地的时刻为T，则t的变化范围为$[0, T]$，当t在$[0,T]$中取定某一数值时，由上面的公式就可以确定s的一个数值与之对应.

例 3 温度一定时，火药的燃烧速度与燃烧室内的压强有关，一般说来，压强越大，燃烧越快. 对于某种火药，在常温 20℃ 之下，测得压强p（千克/厘米^2）与燃烧速度v（毫米/秒）之间的对应关系如下表:

p	30	60	90	120	150	180
v	6.2	8.1	9.6	11.5	13.5	15.8

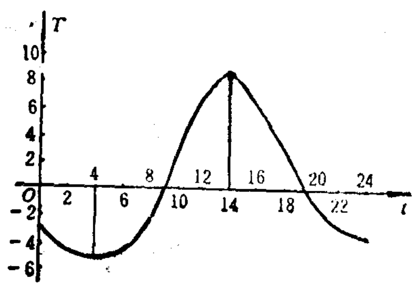


图 1.4

例 4 在气象站的百叶箱内气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上，如图 1.4 所示的曲线. 根据这个图，我们就

能知道这一天内时间 t 由 0（小时）变到 24（小时）气温 T(℃) 的变化情况．对每个确定的时刻 t，都有一个确定的温度 T 和它对应．例如 $t=14$ 时，$T=9$．

二、函数的定义

上面几个例题都表达了两个变量之间的相依关系，这种相依关系可以用不同的方式表达出来，可以用公式(例 1 和例 2)、表格(例 3)、图形（例 4）等方式来表达，，但却有着共同的本质，就是都给出了一个对应规则，根据这个规则，当一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的数值与之对应．下面我们给出函数的定义．

设在同一个变化过程中有两个变量 x 和 y，当 x 在某一范围内任意取定一个数值时，依照某一规则，变量 y 就有唯一确定的数值与之对应，则变量 y 叫做变量 x 的函数．变量 x 叫做自变量，变量 y 叫做因变量或函数．

变量 x 的变化范围叫做这个函数的定义域．

为了方便，我们把 y 是 x 的函数用记号 $y=f(x)$，或 $y=F(x)$，或 $y=\varphi(x)$ 来表示．这里 f，F，φ 表示 y 与 x 之间的对应规则即函数关系．今后在不同的问题中，我们常用 $y=f(x)$ 来表达各种各样的函数关系．但在同一个问题中出现几个不同的函数关系时，则必须分别采用不同的函数记号，以避免混淆．

当自变量 x 取某一数值 x_0 时，函数 $y=f(x)$ 有确定的数值 y_0 与之对应，就称函数在 x_0 处有定义，并且称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值，记作 $y_0=f(x_0)$．因此函数的定义域也就是使函数有定义的实数 x 的全体．当自变量 x 在定义域上取值时，相应的函数值的全体，叫做函数 $y=f(x)$ 的**值域**．

另外，函数 $y=f(x)=c$（c 是某一实数）也是一个函数，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$．这个函数称为常值函数．由于我们把常量当作特殊的变量，因此它完全符合函数的定义．

由函数的定义可知，函数是由定义域和对应规则所确定的．因此可以说，定义域和对应规则是确定函数的两个要素．对于两个函数来说，只有当它们的定义域和对应规则都相同时，这两个函数才是相同的．例如函数 $y=f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 与函数 $y=g(x)=x+2$．当 $x\neq 2$ 时，它们有相同的对应规则，但是 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,2)$ 及 $(2+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$．它们的定义域不同，因此这两个函数是不同的函数．又例如函数 $y=f(x)=\sin^2x+\cos^2x+x$ 与 $y=g(x)=1+x$，虽然表达式不同，但它们的定义域和对应规则都相同，因此这是两个相同的函数．

由上述可知，在研究函数时，必须先弄清它的定义域．

三、函数定义域的确定

由实际问题所确定的函数，它的定义域根据这个问题的实际意义来决定．例如前面的例1中函数的定义域为 $(0,+\infty)$，例 2 中函数的定义域为 $[0,T]$．例 3 中 v 是 p 的函数，它的定义域是表中列出的 6 个 p 值．例 4 中函数的定义域是 $[0,24]$．

今后我们所研究的函数常常是由纯数学表达式给出的函数，而没有标明它的定义域，这时就认为函数的定义域是使表达式有意义的 x 的全体．

例 5 求函数 $y=\sqrt{9-x^2}$ 的定义域．

解 因为只有当 $9-x^2\geqslant 0$ 时，偶次方根 $\sqrt{9-x^2}$ 才有意义，解这个不等式可得 $-3\leqslant x\leqslant 3$，所以函数 $y=\sqrt{9-x^2}$ 的定义域是 $[-3,3]$．

例 6 求函数 $y=\dfrac{1}{\ln(1-x)}$ 的定义域．

解 因为只有当 $1-x>0$ 时，对数式 $\ln(1-x)$ 才有意

义，故得 $x<1$。同时只有当 $\lg(1-x)\neq 0$ 时，这个分式才有意义，所以又需 $x\neq 0$。于是得到函数 $y=\dfrac{1}{\ln(1-x)}$ 的定义域是 $(-\infty,0)$ 及 $(0,1)$。

例 7 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$ 的定义域。

解 要使偶次方根 $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$ 有意义，必须 $\dfrac{x+2}{x-3}\geqslant 0$，为此必须使 $x+2\geqslant 0$ 及 $x-3>0$ 同时成立；或者使 $x+2\leqslant 0$ 及 $x-3<0$ 同时成立。我们用不等式组表示为：

$$\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\ x-3>0;\end{cases}\quad \text{或者}\quad \begin{cases}x+2\leqslant 0,\\ x-3<0.\end{cases}$$

分别解这两个不等式组，前者的解集为 $x>3$，后者的解集为 $x\leqslant -2$。所以函数 $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$ 的定义域为 $(3,+\infty)$ 及 $(-\infty,-2]$。

四、函数的表示法

表示函数的方法通常有三种。

1. 公式法　若两个变量之间的函数关系是用数学式子给出的，则称这种表示法为**公式法**或**解析法**.确切地说，这个数学式子要指出对自变量施行哪些运算（如加、减、乘、除、乘方、开方、取对数、求三角函数及反三角函数等等）以及运算的次序，从而可以求出函数的对应值。如本节第一段的例1、例 2 都属于这种情形。又例如

$$y=1+\lg(1+x),\quad y=\frac{1}{1+x^2},\quad y=\sqrt{1+\sin x}$$

等等都是用公式法表示的函数。

用公式法表示的函数，便于用分析的方法讨论函数的性质，进行理论研究。公式法也有缺点，例如不直观，有时需要作复杂的计