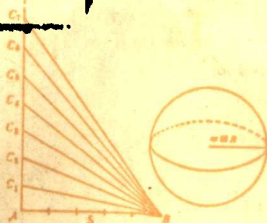


青年科学技术活动丛书

代代想想

刘守身著

苏工业学院图书馆
藏书章



中国青年出版社

想 想 代 代

刘 守 身 著

*

中 国 青 年 出 版 社 出 版

(北京东四12条老君堂11号)

北京市书刊出版业营业许可证出字第036号

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店总经售

*

787×1092 1/32 2 3/4 印张 50 000字

1957年12月北京第1版 1957年12月北京第1次印刷

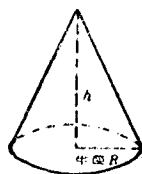
印数1-21,500 定价(7)0.26元

內 容 提 要

本書是同一作者著的“剪剪拼拼”和“算算湊湊”的姊妹篇，主要講述了求解勾股弦是正整數的直角三角形，和立方體各邊為正整數時，邊長單位數、面積單位數和體積單位數互等等許多有趣的問題。在求解這些問題中作者運用兄弟姊妹幾個人對話的形式，逐步地講述了解不定方程式的方法和許多基本道理。內容生動活潑，文字通俗易懂，可作為初中學生的課外讀物。

想 想 代 代

刘 守 身 著



中国青年出版社

1957年·北京

內 容 提 要

本書是同一作者著的“剪剪拼拼”和“算算湊湊”的姊妹篇，主要講述了求解勾股弦是正整數的直角三角形，和立方體各邊為正整數時，邊長單位數、面積單位數和體積單位數互等等許多有趣的問題。在求解這些問題中作者運用兄弟姊妹幾個人對話的形式，逐步地講述了解不定方程式的方法和許多基本道理。內容生動活潑，文字通俗易懂，可作為初中學生的課外讀物。

目 次

勾股弦都是整数的直角三角形.....	5
求这种直角三角形的普遍解.....	14
要長方体的表面积和体积單位数相等.....	34
用代数方法求这种長方体.....	42
另外一些和体积、面积、边長有关的題目.....	55
留一批題目給大家去动腦筋.....	82

勾股弦都是整数的直角三角形

“勾3股4弦5(图1),我們早就知道啦!現在我要問的是:勾是5,股和弦也要是整数,你們想,能作得出来嗎?”

“这也算难题?”守进奇怪地問。

“你作作看。”

“那股是6,弦是7,不就对了嗎?”他

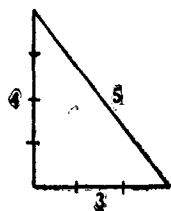


图 1

很快地作出了图(图2)。

“雪球和敏丹呢?”

“讓我算算看,”敏丹說。

雪球却問守进:“你怎么作的?”

“难道这种图,你还不会作?”他神气十足地一边說,一边在图上画弧(图3)。

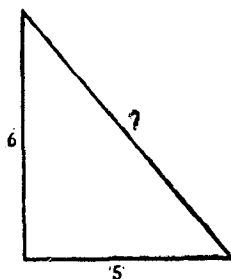


图 2

“只要先作一段綫 AB 等于5單位長,用 A 点做圓心,6單位長做半徑,画一圓弧;再用 B 点做圓心,7單位長做半徑,画一圓弧。得兩弧相交点 C ,联接 AC 、 BC ,三角形 ABC 就是勾5、股6、弦7了。”

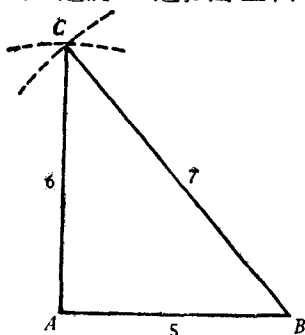


图 3

“可是算出来并不对啊!”敏丹說。“根据勾股弦定理,勾方加股方等于弦方。而你这个勾是5,股是6,乘方相加起来($5 \times 5 + 6 \times 6$)是61。但照弦是7的乘方,只有49,那怎会相等呢?”

“那你看……我这样作法总沒有錯吧!”

他哥哥插过来说:“那你实际作作看。”

“我不是作了嗎?”守进說。

“你是真的照着5、6、7的比例作的嗎?”

“好,那我作給你看,”守进拿起了尺,滿有把握的說。

雪球却看出毛病来了,說:“你作出来的不会是直角三角形。”

守进还是不信,作出来一看果然不是(图4)。

“那该怎么办呢?”守进有点发呆。

“有办法,不是可以画出来量一量嗎?”雪球从守进手里拿去了尺,就作起图来。“而且我們还可以用这个方法來解答哥哥提出的問題呢。你看,先作一条直綫AB等于5單位長,在A点作一垂直接AC,并将每一單位長都标出来:如 C_1 、 C_2 、

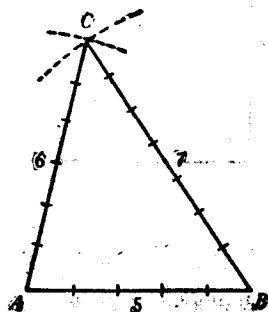


图 4

C_3 、 C_4 、……再分別联接B点,如 BC_1 、 BC_2 、 BC_3 、 BC_4 、……現在只要量一量这些斜边長,看哪一个是整数,那么这直角三角形三边都是整数,并且一直角边也正好是5。”

“对,对,”敏丹大声地叫起来,
“而且不用量,算也算得出。”

“算也算得出,你怎么算呢?”
守进觉得奇怪。

“就用勾股弦定理嘛!”敏丹接
着就算起来:

$$\overline{BC_1}^2 = 5^2 + 1^2 = 26,$$

$$\overline{BC_1} = \sqrt{26}, \text{ 不行。}$$

$$\overline{BC_2}^2 = 5^2 + 2^2 = 29,$$

$$\overline{BC_2} = \sqrt{29}, \text{ 不行。}$$

$$\overline{BC_3}^2 = 5^2 + 3^2 = 34,$$

$$\overline{BC_3} = \sqrt{34}, \text{ 不行。}$$

$$\overline{BC_4}^2 = 5^2 + 4^2 = 41, \quad \overline{BC_4} = \sqrt{41}, \text{ 不行。}$$

$$\overline{BC_5}^2 = 5^2 + 5^2 = 50, \quad \overline{BC_5} = \sqrt{50}, \text{ 不行。}$$

$$\overline{BC_6}^2 = 5^2 + 6^2 = 61, \quad \overline{BC_6} = \sqrt{61}, \text{ 不行。}$$

$$\overline{BC_7}^2 = 5^2 + 7^2 = 74, \quad \overline{BC_7} = \sqrt{74}, \text{ 不行。}$$

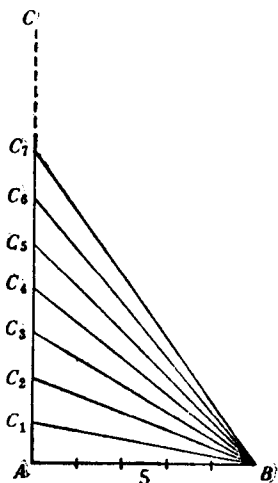


图 5

“不行,不行。我看这样算不出来,”守进不耐烦了。

“那怎么办呢?”雪球也有些动摇了。

“我想能算得出,除非根本没有勾是5的直角三角形,”敏
丹比较有信心。

“不会没有的,还是再往下算吧!”雪球的哥哥也鼓励他们
算下去。

于是大家看敏丹接着算下去:

$$\overline{BC_8}^2 = 5^2 + 8^2 = 89, \quad \overline{BC_8} = \sqrt{89}, \text{ 不行。}$$

$$\overline{BC_9}^2 = 5^2 + 9^2 = 106, \quad \overline{BC_9} = \sqrt{106}, \quad \text{不行.}$$

$$\overline{BC_{10}}^2 = 5^2 + 10^2 = 125, \quad \overline{BC_{10}} = \sqrt{125}, \quad \text{不行.}$$

$$\overline{BC_{11}}^2 = 5^2 + 11^2 = 146, \quad \overline{BC_{11}} = \sqrt{146}, \quad \text{不行.}$$

“还是不行，”这次雪球也耐不住了，“怎么越算越不象呢？”

“怎么这样沉不住气？眼看就可以得出结果来了，”他哥哥笑着說。

“是吗？”敏丹高兴极了，她一边念一边写：

$$\overline{BC_{12}}^2 = 5^2 + 12^2 = 169, \quad \overline{BC_{12}} = \sqrt{169} = 13.$$

“噢！13, 13，”敏丹连忙喊了起来。“勾5、股12、弦13正好都是整数！”同时作出了图(图6)。

“算是算出来了，可是这样算法实在太麻烦了，”守进接着說。

“是的，照你们这样去算，的确是麻烦了一些。”

“是不是还有简便的办法？”

“有，可以用代数方法代出来。”

“代数代出来，那怎么代法呢？”雪球感到非常奇怪。

“对！設文字来代‘数’好啦！如設 a 代勾長的数， b 代股長的数， c 代弦長的数，根据勾股弦定理， $a^2 + b^2 = c^2$ 。现在知道勾長的数是5，即 $a=5$ ，那末 $5^2 + b^2 = c^2$ ，就可以解出 b 和 c

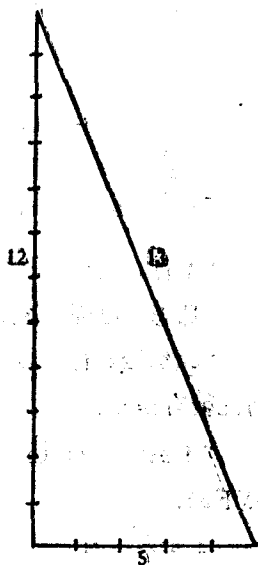


图 6

啦!”

“这怎么解呢? 一个方程式有二个未知数,”雪球說。

“是不是一个方程式只有一个未知数才能解呢?”她哥哥反問她。接着又解釋說:“这套概念是联立方程式給你們弄糊涂的。你們在初中代数里学解方程时,知道有几个未知数就有几个方程式,还没有见过有两个未知数只有一个方程式的。其实,方程式越少,求解就越容易,方程式多了,求解反而难。例如 $2x - y = 1$ 这样一个方程式,你可以很快很容易地求得:当 $x=1$ 时, $y=1$; 当 $x=2$ 时, $y=3$; 当 $x=3$ 时, $y=5$; 当 $x=4$ 时, $y=7$ …… 它的解答就有许许多多。如果解 $2x - y = 1$ 和 $x^2 = y$, 那末它就只有 $x=1, y=1$ 。因为上面解出来的 x, y 的其他数值不能适合第二个方程式,也就是第二个方程式把解答限制住了。如果解 $2x - y = 1, x^2 = y$ 和 $3x = y + 3$, 那末連一組解答也沒有了,因为第三个方程式更給解答加上了一重限制。很明白,并不是方程式多了就好办,相反的,方程式多了求解的限制条件也就严了。

“一个方程式里有二个未知数,不但可以解,而且很容易解,因为它的解是不定的,你給一个未知数以某一个值,另一个未知数就会得出它相应的值。例如 $5^2 + b^2 = c^2$ 这个方程式,你設 $b=1$, 那末 $5^2 + 1^2 = c^2, c^2 = 26, c = \sqrt{26}$ 。設 $b=2, 5^2 + 2^2 = c^2, c = \sqrt{29}$ 。設 $b=3, c = \sqrt{34}$ 。設 $b=4, c = \sqrt{41}$ …… 因此,我們就把这种方程叫做不定方程。照理,这种方程可以求出无穷尽的解答来,但是我們現在要求的 b 和 c 必須都是整数,这样的解答就受限制了。”

“那么应该怎样求解呢？”

“这就需要动动脑筋了。如果照刚才一个个设出数值来求，那就太慢太麻烦了。现在我给你们一些提示，象方程式 $5^2 + b^2 = c^2$ ，我们先把它化成 $c^2 - b^2 = 25$ ，再将 $c^2 - b^2$ 分解成 $(c-b)(c+b)$ ，同时将 25 也分解成二因数相乘，如：1 乘 25，2 乘 $\frac{25}{2}$ ，3 乘 $\frac{25}{3}$ 等。因此，可以把 $c^2 - b^2 = 25$ 变成 $(c-b)(c+b) = 1 \times 25$ ，或 $(c-b)(c+b) = 2 \times \frac{25}{2}$ ，或 $(c-b)(c+b) = 3 \times \frac{25}{3}$ 等。现在看 $(c-b)(c+b) = 1 \times 25$ ，我们设 $(c-b) = 1$ ， $(c+b) = 25$ ，那不是可以求出 b 和 c 来了吗？”

“这个方法不错，”守进连忙在纸上写出：

$$\begin{array}{rcl} c-b & = & 1, \\ +) c+b & = & 25, \\ \hline 2c & = & 26, \\ c & = & 13, \\ b=c-1 & = & 12. \end{array}$$

“看，这不就求出股 12、弦 13 了吗？”

“噢！”敏丹接着说。“那末， $(c-b)(c+b) = 2 \times \frac{25}{2}$ ，也可以设 $(c-b) = 2$ ， $(c+b) = \frac{25}{2}$ 来解出 b 和 c 来了。”

“是的，让我来做，”守进又把这一组联立方程解出来：

$$\begin{array}{rcl} c-b & = & 2, \\ +) c+b & = & \frac{25}{2}, \\ \hline 2c & = & \frac{29}{2}, \\ c & = & \frac{29}{4}. \end{array}$$

“不行， c 不是整数，那怎么一回事呢？”

“这倒好懂，因为 $c+b=\frac{25}{2}$ ，如果 c 和 b 都是整数，那二个整数相加是不会得分数的。”

“这样说来，分解成 $3 \times \frac{25}{3}$ 、 $4 \times \frac{25}{4}$ 、 $6 \times \frac{25}{6}$ 等，因数本身是分数，也就一定不行，不必解了。只有分解成二个整数因数才可能行，”雪球说。

“不过，分解成二个因数相同的也不行，”她哥哥作了补充，“例如将 25 分解成 5×5 ，设 $(c-b)=5$ ， $(c+b)=5$ ，那就求得 $b=0$ ， $c=5$ 。这是不符合题目要求的，0 本身不算整数。若照 $a=5$ ， $b=0$ ， $c=5$ ，作起图来，它也不是三角形，而是一根直线。因此这问题分析到这里就可以肯定：它的解答只有一个，即勾 5、股 12、弦 13 是吗？”

“是的，”三人同时回答说。

“现在你们不妨来算勾是 6 的，看股和弦有哪些整数的解答。”

“大家分头来做吧。”

没有过几时，敏丹的纸上已算满了一大片：

设勾是 6，股是 b ，弦是 c 。

那末 $6^2+b^2=c^2$ ，即 $c^2-b^2=36$ 。

36 可分解成 1×36 、 2×18 、 3×12 和 4×9 等整数因数。

(1) 当 $(c-b)(c+b)=1 \times 36$ 时，

设 $(c-b)=1$ ， $(c+b)=36$ 。

那末 $b=\frac{36-1}{2}=\frac{35}{2}$ ， $c=\frac{36+1}{2}=\frac{37}{2}$ 。都不是整数，所以不行。

(2) 当 $(c-b)(+b)=2 \times 18$ 时,

設 $(-b)=2$, $(+b)=18$.

那末 $b = \frac{18-2}{2} = 8$, $c = \frac{18+2}{2} = 10$. 正好, 勾 6、股

8、弦 10.

(3) 当 $(c-b)(c+b)=3 \times 12$ 时,

設 $(c-b)=3$, $(c+b)=12$.

那末 $b = \frac{12-3}{2} = \frac{9}{2}$, $c = \frac{12+3}{2} = \frac{15}{2}$, 不行.

(4) 当 $(c-b)(c+b)=4 \times 9$ 时,

設 $(c-b)=4$, $(c+b)=9$.

那末 $b = \frac{9-4}{2} = \frac{5}{2}$, $c = \frac{9+4}{2} = \frac{13}{2}$, 不行.

“求出来了, 只有一个勾 6、股 8、弦 10, 再沒有別的了. 是不是呢?”

“是的,” 雪球連忙接应說, “我求出的也是勾 6、股 8、弦 10.”

“守进呢?” 敏丹問.

“我还没有做完呢! 那因数用 1×36 的不行, 我算出它的股是 $\frac{35}{2}$, 弦是 $\frac{37}{2}$, 对不对呢?”

“对的, 可它不是整数啊! 只有分解成 2×18 时才行,” 敏丹高兴地說. “分解成 3×12 、 4×9 的也都不行, 因为股总是二因数差的一半, 弦总是二因数和的一半. 如果因数一个是奇数, 一个是偶数, 那差的一半或和的一半总不会得整数. 所以就不必去試了.”

“不要你講, 讓我自己做,” 守进說.

“好, 这类問題你們可以再繼續做下去,” 他哥哥說. “如勾

是7时,求整数的股和弦;如勾是8时,求整数的股和弦;再勾是9时,勾是10时……。

“这里要提一下,刚才我們做的二个例子,都只有一組整数的勾股弦数。但有的还有好多組解答。象勾是100时,就有勾100、股2499、弦2501,勾100、股1248、弦1252,勾100、股621、弦629,勾100、股240、弦260,勾100、股105、弦145,勾100、股75、弦125,⊖等等。”

“有这样多組嗎?”雪球惊奇地問。

“解答的組数也的确是一个值得研究的問題。好吧,明天我們再来討論吧。”

⊖ 依周髀算經“勾广三,股修四,徑隅五”和“勾亦广,广,短也”;“股亦修,修,長也”,那末勾不該比股長,这里只把勾和股看成是兩個直角边,不分長短。