高等学校教学用书

弹性力学

曲庆璋 梁兴复 编

GAODENG
XUEXIAO
JIAOXUE
YONGSHU

冶金工业出版社

高 等 学 校 教 学 用 书

弹性力学

青岛建筑工程学院　曲庆璋　梁兴復

冶 金 工 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

弹性力学/曲庆璋，梁兴復编.—北京：冶金工业出版社，1997
高等学校教学用书
ISBN 7-5024-1965-9

Ⅰ.弹… Ⅱ.①曲… ②梁… Ⅲ.弹性力学-高等学校-教材 Ⅳ.O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 22155 号

出版人　卿启云（北京沙滩嵩祝院北巷 39 号，邮编 100009）
怀柔东茶坞印刷厂印刷；冶金工业出版社出版；各地新华书店发行
1997 年 5 月第 1 版，1997 年 5 月第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16；11.75 印张；281 千字；179 页；1-1200 册
15.10 元

前　　言

《弹性力学》主要是根据高等学校土建类及机械类等专业弹性力学课程教学要求编写的，同时也增添了一部分研究生所需弹性力学的内容。在编写过程中，注意了以下几方面：

(1) 本书对物理量和方程除分量记号外，还引入张量记法，这有利于读者阅读近代文献。

(2) 采用从一般到特殊，从简到繁的讲授方式，便于读者掌握弹性理论的完整体系和内在规律。

(3) 充分运用学生已学过的高等数学知识或在此基础上不难掌握的数学知识，使得理论的阐述和论证更加严密和简洁。

全书共分 12 章，分别对弹性力学的一般理论及平面问题、扭转问题、轴对称问题、空间问题、变分原理等做了详细的介绍。本书第 1、7、8、9、10 章由梁兴復执笔，其余各章由曲庆璋执笔。

在编写过程中，曾蒙西安交通大学匡震帮教授和西安建筑科技大学梅占馨教授给予热情的鼓励和指导；大连理工大学孙焕纯教授和匡震帮教授详细地审阅了本书初稿，提出很多宝贵建议，使编者受益匪浅；本书的有些内容和讲法得益于大连理工大学唐立民教授所讲授的“弹性力学”课程，使编者终生受用。曲蕾同志提供和收集了一些有价值的参考资料，在此谨向他们表示衷心的感谢。

目　录

1 绪　　论

1.1 弹性力学同相邻学科的关系

弹性力学（或称弹性理论）是变形体力学的一个分支，而变形体力学又是古典力学中的一个分支学科。理论力学是研究质点、质点系、刚体及理想液体和气体机械运动的学科。它是对实际物体或物体系的总体运动性质和规律的最简单的、也是最基本的抽象。至今这种抽象对研究物体或物体系的总体运动（包括运动的特殊状态——静止状态）的很多问题仍有很重要的意义。但是由于工程实践的需要及自然科学的进一步发展的需要，要求有新的抽象模型，使之更接近于固体、液体、气体等的更真实的实际运动情况。这样就出现了一些不同的力学学科。如果把物体抽象为一个理想弹性体，就是本书《弹性力学》的研究对象。

弹性力学与材料力学（结构力学）同属变形体力学，都是研究理想弹性体在外力、温度以及其它物体作用下，物体或几何不变物体系内部的相对运动规律，即变形状态或相应的内力状态的变化规律。但是应将弹性力学看作是材料力学的继续和发展，它们之间有着密切地联系，既有相同之处，也有很大的区别。相同点在于：

（1）它们的部分研究内容是相同的，就是研究物体在外部因素（如外力，其它物体的作用、温度等）作用下，物体（工程结构）内部的应力和变形情况。据此做出强度和刚度判断，以保证结构设计的经济与安全。所以它们对解决许许多多水利、建筑、桥梁、机械、汽车、造船、航空、航天等工程上强度和刚度问题是十分重要的。

（2）基本假设有相同之处（如连续介质假设等）；研究方法都是从力的平衡条件、几何变形和物理关系三个方面出发进行研究的。

它们之间的区别在于：

（1）材料力学研究内容要比弹性力学广泛。材料力学除了对构件进行应力和变形分析，用以做强度和刚度判断之外，还涉及到塑性、疲劳、振动、稳定、蠕变等许多问题。

（2）研究对象不同，材料力学只研究细长杆的变形体力学问题，而弹性力学是研究板、块的一部分变形体力学问题，例如高梁、半平面、水坝、孔洞的应力集中等。从数学观点来看，材料力学只处理一维问题，最终归结为求解常微分方程。而弹性力学主要是研究二维和三维问题，最终归结为求解耦联的偏微分方程组。所以弹性力学问题要比材料力学问题复杂得多，困难得多。

（3）材料力学有关于变形的几何假设——平面假定，而弹性力学却无此假定。所以应用弹性力学方法可以解决材料力学所不能解决的问题。例如非圆截面杆的自由扭转问题，当然这实际上是做为二维问题求解的。其次，还应当认识到，材料力学是用个别方法解个别的问题，而弹性力学具有统一的方程。

用材料力学的理论和方法，曾解决了大量的工程问题，并将继续在结构分析和工程设计中发挥作用。但是在工程中也出现了一些问题和事故，如国外巨大的铁桥虽然是按规范建造，但却发生了惊人的倒塌；远洋船甲板常常发生龟裂和裂缝；某大型客轮同小船相撞

折断而沉没，又如我国水压机横梁的裂缝甚至断裂，大型轴的断裂，轧钢机轧辊的断裂等。这些事故用材料力学初等理论和方法，不但不能解决，也不能解释。另外在工程设计中，也有大量问题是不能用材料力学的初等理论来计算的。而用弹性力学的理论和方法是有可能来解释或解决这些问题的。当然有许多问题也是弹性力学理论所不能解释的。

1.2 弹性力学的产生和发展

弹性是物体的基本属性。从远古时代开始，例如原始人所用的斧和射箭的弓，至到近代的摩天大楼、大型客机、宇宙飞船等，它们都利用了物体的弹性。不同之处在于前者是依据经验和几代人的摸索而获得的，而现代的结构、建筑则是以精确、严密地数学计算为根据的。

如果说人类利用物体弹性的历史，可以追溯到远古年代去的话，那么研究这种弹性性质，并探讨由它产生的一系列变形体力学的科学基础的第一次尝试，至今却只有几百年的历史。这就是意大利数学家伽利略（Galileo）的尝试，他在 1638 年发表的著作《关于两种新科学的叙述与数学证明》中，第一次提出梁的弯曲问题及强度计算概念。当时他是试图解决船只结构及水闸问题。其后 40 年，于 1678 年英国科学家虎克（Hooke）发表了力与变形成正比的虎克定律。实际上，他是在 1660 年就发现了这一定律，并利用它发明了弹簧以代替旧时钟用的重力摆，但为了发明的专利权，他延迟到 1678 年才发表。虎克是与牛顿同时代的人，他也曾独立阐述万有引力定律，1662 年英国伦敦皇家协会成立时，他被任命为第一干事。

1680 年马略特（Mariotte）给出了梁的应力分布和确定中性轴的位置。

1705 年伯努利（Bernoulli）给出了梁变形几何假设（平面假设）和弯曲公式。他是瑞士一个著名数学家和科学家家族的成员。

1738 年欧拉（Euler）和丹尼尔·伯努利（Daniel · Bernolli）在俄国彼德堡科学院发表著作，他们得出梁的方程至今仍在应用。欧拉出生于瑞士，他是著作最多的数学家，是 John Bernoulli 的学生，长期在彼德堡科学院工作。一生写书和论文 886 件，直到一目甚至双目失明也从未停止过写作。牛曼（Newman）曾称他为“数学家的英雄”。1757 年欧拉又给出了压杆稳定公式。

1776 年法国科学家库伦（Coulomb）完成矩形截面梁弯曲的完整理论，并给出圆轴的扭转理论（1784 年）。

1807 年英国科学家杨（Young）给出了弹性模量。至此构成了材料力学的大部分内容。

这一理论的形成经过了 150～160 年的时间，它反映了 17、18 世纪资本主义开始兴盛时期，机械、运输、军事等生产技术上的需要。但是到 18 世纪末工业革命以后，工厂的发展及交通运输的进一步发展，提出了各种各样更加复杂的强度和应力分析问题，例如应力集中问题、板件的应用伴之而来的应力分析问题等等。这时材料力学所依据的方法和理论就不适用了，例如它利用平面假设把二维问题简化为一维问题，但是很显然，即使对杆件问题也不是都服从这一假设，如非圆截面杆的扭转问题。另外前面也提到了，材料力学是用个别方法解决个别问题，如导演扭转问题公式所用的方法，不同于导演弯曲问题公式所用的方法。为了建立更一般、更概括、更深入细致地应力分析理论和方法，就产生了弹性力学。

1821 年法国工程师、桥梁专家纳维尔（Navier）通过对物体弹性的研究，从牛顿关于物质构造的概念出发，第一个建立了弹性体平衡和运动微分方程。1822 年著名数学家柯西(Couchy)引进了弹性理论中关于一点应力的概念，把一点附近的变形通过六个应变分量表示出来，并导出运动方程。这些方程式建立了应力分量与体积力，惯性力的关系。并假设一点的主应力方向与变形主轴方向相重合。1828 年著名数学家泊松（Poisson）又进一步推进，完善了弹性力学的基本方程。至此奠定了数学弹性力学的基础。这一理论的建立同当时牛顿力学的影响和高等数学的发展是分不开的。在同一时期，法国籍工程师拉梅(Lame）和克拉伯龙（Clapeyron）为了把纳维尔的理论应用到建筑问题上，而发展了这一理论。

在 1822～1828 年间，柯西和泊松曾根据旧的分子理论，证明各向异性体有 15 个弹性系数，而各向同性体只有 1 个弹性系数。泊松并导出无论什么材料泊松比都是¼。其后圣文南（Saint－Venant）也支持这一派理论。而在 1838 年格林（Green）却从能量原理出发，证明各向异性体和各向同性体的弹性系数各为 21 个和 2 个。这两派理论及他们的追随者，曾有过长期的争论。而物理学家们则企图用实验来解决这一纠纷。魏塞姆用金属空心圆柱受拉量测容量变化来测定泊松比，建议用⅓代替¼。其后，俄国著名物理实验专家库柏弗通过扭转实验，得到剪切弹性模量，以及通过弹性模量 E、剪切模量 G、泊松比 ν 三者的关系得出的泊松比也不是¼。以后牛曼和他的学生克希霍夫（Kirchhoff）也相继用反光镜实验，得出钢的泊松比是 0.294，而铜则为 0.387。显然这些科学家用实验得出的结果，都说明泊松的理论是不正确的，但是他们却又在不同程度上有所保留，认为他们各自所用的实验材料并不完全是各向同性的。不过越来越多的实验证明，泊松对各向同性体的单一弹性系数理论是不正确的。特别是从近代物质构造观点提出的论据，是与多常数理论相符合的，于是格林从能量观点出发导出的应力应变关系就得到了普遍的承认。

在上述争论期间的 1852 年拉梅出版了第一部关于弹性理论的系统著作。该书已成为一部经典著作，至今仍不失其光辉。

但是，同其它科学一样，当时建立的普遍方程离解决工程实际问题还相差很远。所以弹性理论建立之初，与其说是为了改造世界（解决工程实际问题）莫不如说是为了认识世界。因为当时虽然有了弹性力学普遍方程，但却还没有一个完善的解法。直到 1856 年，被认为最出色的弹性力学家圣文南（Saint－Venant）用弹性力学方法解决了柱体自由扭转和弯曲问题，此后弹性力学才开始逐渐和工程问题密切起来。从而弹性力学方法也就日趋完善了。例如 1862 年艾雷（Airy）给出一个应力函数用于解决平面问题，1882 年赫兹(Hertz)解决了接触问题等等。圣文南的贡献不仅仅在于他第一次用弹性力学方法，解决了工程中这一重要问题，更重要的在于当时人们还在对弹性系数的数目争论不休时，把弹性力学基本方程应用到实际问题中，结果与实验符合，从而首次对弹性力学的基本理论作了十分重要的肯定。到今天由于近代科学技术的高度发展，对应力分析要求更加精确，弹性力学的各种解法层出不穷，弹性力学专著的大量出现，使得弹性力学已经成为各种应力分析问题十分重要的工具了。

1.3 经典弹性力学的基本假设

弹性力学同所有的力学学科一样，它们的研究对象都是从自然界和实际工程中抽象出

来的理想模型。在建立这种理想模型时必然要做某些假设。弹性力学将引入如下假设。

1.3.1 连续性假设

连续性假设认为物体是由连续介质组成。连续介质概念来自数学，它认为任意两个实数间总有另外的不同实数连续集。所以它是数学上高度理想化的概念。采用这一假设就可以把物体抽象成为一个空间几何体，而诸如位移、应变、应力等物理量都作为空间点的函数定义在这个几何体上。

这个假设另一个含义就是认为物体在整个变形过程中始终保持连续，原来相邻的两个任意点，变形后不会产生开裂或重迭现象。这样就可以认为物体中位移、应变、应力等物理量也是连续的，能用坐标的连续函数来表示，可以应用解析的数学工具。

实际上，所有物体都是由分子、原子等粒子组成。但是这些粒子的大小及它们之间距离同物体的尺寸相比是很微小的。所以可以不考虑物体内这些粒子构造，而认为是连续介质。根据这个假设所得结果与实验结果是相符的。

应当指出，该假设不是弹性力学所独有的，在诸如塑性力学、粘弹性力学、粘塑性力学、理想流体力学等等学科中都普遍采用连续性假设。

1.3.2 均匀各向同性假设

均匀各向同性假设认为物体内各点在任意方向都具有相同的物理性质。这样物体的弹性系数不随坐标及方向而变化。但是，例如钢材是由晶体组成，而晶体本身是各向异性的，不过由于晶体很微小而排列又不规则，按其材料的平均性质，可以认为钢材是各向同性的。

此外，还有各向异性材料（如木材、复合材料、地壳结构等），但仍保留均匀性假设（不同点具有相同物理性质），这属于各向异性体弹性力学。

1.3.3 完全弹性假设

完全弹性假设认为物体在外加因素除去后，能恢复其原来的形状和大小，而没有任何残余变形。对应于一定的温度，存在着应力和应变之间一一对应的单值函数关系，且与时间无关、与历史无关。

这里所说的“单值函数关系”可以是线性的，也可以是非线性的。本书主要讨论应力应变成线性关系、同时假定材料服从虎克定律的情况，即线弹性假设。基于这个假设的弹性理论称之为线性弹性理论。在应力小于弹性极限时，大多数工程材料是可以认为服从虎克定律的。

满足上述三个假设的物体，称之为理想弹性体。本书把所研究的对象，都视为理想弹性体，全部的分析就是建立在这种力学模型基础上。

1.3.4 小变形假设

小变形假设认为在外加因素作用下，物体因变形而产生的位移同物体本身的几何尺寸相比是很微小的。因而应变分量和转动分量都远小于1，且是同一量级。这时可以使问题大为简化，例如在研究物体平衡条件时，可以不考虑物体由于变形而产生的尺寸和位置改变的影响。在进行变形分析和建立物理方程时，可以忽略应变分量和转动分量的二次及更高次项，使得基本方程是线性的。

1.3.5 自然状态假设

为简单起见，在弹性力学中还采用自然状态假设。自然状态假设认为物体在加载前及卸载后都处于无初始应力的自然状态。即不考虑诸如残余应力、装配应力等初始应力。

如果仅依据上述基本假设，对物体中的应力和变形进行分析，这属于“数学弹性力学”的研究范围，也是本书所研究的内容。除上述基本假设外，在某些条件下为了简化问题还要引入某些补充假设，例如对薄板力学和薄壳力学问题引入直法线假设。这属于“应用弹性力学”的范畴。而对非线性问题的分析，又要考虑几何非线性和物理非线性，可以组合为各种不同的非线性问题。此外还有边界条件的非线性问题——接触问题。

1.4 弹性力学的内容和方法

这里将介绍弹性力学的基本理论（基本方程），以及各种具体问题的解法。

建立弹性力学基本方程，同材料力学等一样，要从三个方面出发，也就是静力学方面、几何方面及物理关系。但是在弹性力学里，不同于材料力学中常采用的截面法，而假设物体是由无数个内部平行六面体微单元和无数个表面四面体微单元所组成。在进行静力分析和变形几何分析时，则从研究这些微单元体出发。根据这些微单元体的受力状态和平衡条件，可得到内部点的平衡方程和边界上的应力边界条件。但未知应力数总是多于平衡方程数，因此它是超静定的。为保证物体变形后，各微单元体之间的协调性，就导出了变形协调方程。而物理关系则由虎克定律得出。

在材料力学、结构力学中，计算超静定结构给出三种基本方法，即位移法、力法和混合法。相应地在弹性力学中也有三种基本方法，即按位移求解（建立以位移分量为基本未知函数的偏微分方程组）、按应力求解（建立以应力分量为基本未知函数的偏微分方程组）以及混合求解（同时以某些位移分量和应力分量为基本未知函数）。

弹性力学基本方程是耦联的偏微分方程组，求解它们在数学上是相当的困难。所以在求解时常用所谓“逆法”（颠倒法），就是先假定一个解，反过来验证它们是否满足所有偏微分方程和边界条件，如满足则是问题的解答，而且是唯一的。还有所谓“半逆法”，就是先假设一部分解答，另一部分在解题过程中求出。但是这些方法只能用来解一些较简单的问题。对于更加复杂的实际问题，往往采用近似方法，如差分法、变分直接法、各种限制误差法、伽辽金法、加权残数法等。由于过去计算工具不发达，这些近似方法只能解决小规模问题。但当电子计算机出现之后，以及有限单元法、边界元法、半解析的样条函数法等相继问世，产生了新的力学学科——计算力学。它使得弹性力学问题的求解，产生了革命性的变化。

对于二维问题（如平面问题、扭转问题等），由于恰普雷金（Чаплыкин）、克罗索夫（Колосов）、木什海里斯维里（Мусхельщвили）等人引入复变函数理论，把平面问题和扭转问题的理论解范围扩大了。尤其是用来求解有孔洞的多连通域问题更是独树一帜。这是用其它方法很难解决的。应当指出，我国的一些科学家，在弹性力学复变函数方法的研究中，也取得了很多的重要成果，解决了大量工程实际问题。该方法已成为用理论求解弹性力学问题精确解的有效工具。

其它还应当提到的理论解法，如积分变换方法以及用各种特殊函数求解等等。尽管如此，应当说还只有少数问题才能得到精确解。尤其对于空间问题更是如此。因为在空间问题中，尽管也给出各种一般解，但它们并不是真正解决了什么具体问题，而仅仅是把空间问题的解，归结为寻求某些典型函数。

2 应力理论

2.1 应力概念、应力矢量及应力理论的两个基本问题

对变形体力学来说，关心的是物体在外力作用下，处于平衡状态时其内力的分布情况。这里所说的内力永远是指物体中无外力作用时粒子处于平衡状态时的内力以外的所谓“附加内力”。而平衡是本章的基本条件。

根据连续性假设，可以假想将物体截开显示其内力，还可以从物体内取一个微小单元体，当微元体无限缩小时，就能用数学分析中的无穷小概念来处理一点的内力状态，因此可以方便地利用解析的数学工具。

假想将物体截为两部分如图 2-1，将一部分拿走则代替被拿走部分，必然在另一部分上有力的作用，这就是内力。根据牛顿第三定律，作用在截开处两个原来相连面上的内力是大小相等方向相反的，而且作用在未截开前的同一点。为度量内力的强度，提出“应力”概念。将截面上某一点附近单位面积上的内力，定义为该点在给定面上的“应力”，并用它来

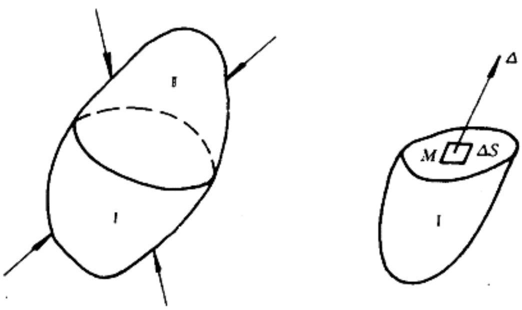


图 2-1

度量内力的强度。如果采用严格的数学中的极限概念来定义应力，即在 I 部分截面上某一点 M 邻域取一微小面积 ΔS，其上作用的内力合成为一个合力 $\Delta \boldsymbol{P}$，比值$\dfrac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta S}$当 ΔS 趋于零时的极限，即为该点该面上的应力 $\boldsymbol{p}$。

$$\boldsymbol{p} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta S} \tag{2-1}$$

从上述应力的定义可以看出，应力不仅取决于点的位置，而且与过该点的面的方向有关。由于内力 $\Delta \boldsymbol{P}$ 是矢量，所以在某一点给定面上的应力也是一个矢量—— “应力矢量”。

这种把截面单元之间的作用力认为可以合成一个合力的假定称为 Euler－Cauchy 应力原理。这样定义的应力称为 Cauchy 应力。但是对有些材料（如磁性材料），在某些情况下通过截面单元的传递作用要用一个力和一个力偶来表示，这种看法属于 Voigt 应力原理。这

种原理认为在截面给定点处，除应力矢量 $\boldsymbol{p}$ 外，还定义如下应力偶矢：

$$\boldsymbol{m}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{M}}{\Delta S} \tag{2-1)a$$

这里 $\Delta\boldsymbol{M}$ 表示单元 ΔS 内的力所合成的力偶。一般情况下，对常用工程材料可以不考虑应力偶矢，而采用 Cauchy 应力。这里介绍的就是 Cauchy 应力理论。

下面进一步说明给定面上某点的应力 $\boldsymbol{p}$ 是一个矢量。$\boldsymbol{p}$ 可以用 x_k（x_1，x_2，x_3）直角坐标系中的三个分量（p_1，p_2，p_3）来唯一确定（见图 2-2）。而

$$p_k=|\boldsymbol{p}|\cos(p,x_k)=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_k$$

式中，$\cos(p,x_k)$ 表示应力 $\boldsymbol{p}$ 同 x_k 坐标轴的夹角余弦，而$\boldsymbol{e}_k$表示 x_k 轴方向的单位矢量。应力 $\boldsymbol{p}$ 还可以用另一个直角坐标系 x'_i（x'_1，x'_2，x'_3）（相对原坐标系旋转了一个角度）中的三个分量（p'_1，p'_2，p'_3）来唯一确定，即

$$p'_i=|\boldsymbol{p}|\cos(p,x'_i)=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}'_i$$

式中，$\boldsymbol{e}'_i$ 为 x'_i 坐标轴方向的单位矢量。但是不管坐标系如何变化（转动），应力 $\boldsymbol{p}$ 在某一个方向 ξ 上的投影，应是一个不变量（见图 2-2）

$$H=p_1\xi_1+p_2\xi_2+p_3\xi_3=p'_1\xi'_1+p'_2\xi'_2+p'_3\xi'_3 \tag{2-2}$$

式中，ξ_k（$k=1$，2，3）表示 ξ 方向单位矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 在坐标系 x_k（x_1，x_2，x_3）第 k 个坐标轴上的投影（分量）；ξ'_i 为 $\boldsymbol{\xi}$ 在另一个坐标系 x'_i（x'_1，x'_2，x'_3）第 i 个坐标轴上的投影（分量）。下面分别称这两个坐标系为原坐标系和新坐标系。

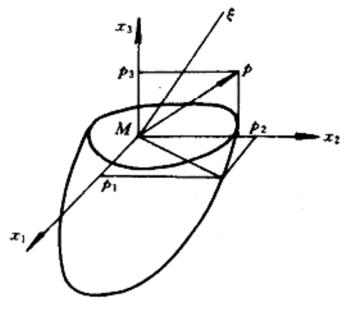


图 2-2

现在将原、新两个坐标系中任意两个坐标轴之间的夹角余弦（坐标变换系数）记为

	x_1	x_2	x_3
x'_1	l_{11}	l_{12}	l_{13}
x'_2	l_{21}	l_{22}	l_{23}
x'_3	l_{31}	l_{32}	l_{33}

表中 l_{ik}表示变换后新坐标系的某一坐标轴 x'_i，同变换前原坐标系的某一坐标轴 x_k 的夹角余弦。如果引入各坐标轴的单位矢量，则有

$$l_{ik}=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k$$

根据矢量的三个分量在不同坐标系中的变换关系

$$\xi'_i=\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{e}'_i=(\xi_1\boldsymbol{e}_1+\xi_2\boldsymbol{e}_2+\xi_3\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}'_i=\xi_k\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}'_i=l_{ik}\xi_k \tag{2-3}$$

$$\xi_k=\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{e}_k=(\xi'_1\boldsymbol{e}'_1+\xi'_2\boldsymbol{e}'_2+\xi'_3\boldsymbol{e}'_3)\boldsymbol{e}_k=\xi'_i\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}_k=l_{ik}\xi'_i \tag{2-3)a$$

式中采用了一种简化记法，凡式中某一项出现两个相同符号的指标，如（2-3）式中的指标 k 及（2-3）a 式中指标 i，称为“哑指标”，它意味着按此指标变程（在三维空间中即为 1、2、3）求和。这种求和约定称为爱因斯坦（Einstein）约定。因此对哑指标的符号可以进行代换，但在同一项中不同对的哑指标必须采用不同的符号。例如

$$l_{ik}\xi'_i=\sum_{i=1}^{3}l_{ik}\xi'_i=\sum_{j=1}^{3}l_{jk}\xi'_j=l_{jk}\xi'_j=l_{1k}\xi'_1+l_{2k}\xi'_2+l_{3k}\xi'_3$$

在用指标符号给出的公式中，例如（2-3）式中的指标 i，在同一项中只有一个，没有重复称

为“自由指标”。在同一公式中，不同项对应的自由指标必须用同一个符号。如（2-3）式等式两端的指标i，它意味着当$i=1$、2、3时，共有三个公式，即

$$\xi'_1=l_{11}\xi_1+l_{12}\xi_2+l_{13}\xi_3$$
$$\xi'_2=l_{21}\xi_1+l_{22}\xi_2+l_{23}\xi_3$$
$$\xi'_3=l_{31}\xi_1+l_{32}\xi_2+l_{33}\xi_3$$

以后除另加说明外，凡遇有拉丁字母的指标均意味着它的变程为3（三维问题），而用希腊字母表示的指标它的变程为2（二维问题）。

回到不变量（2-2）式，代入式（2-3）a，则

$$H=p_k\xi_k=p'_i\xi'_i=p_kl_{ik}\xi'_i \tag{2-2)a$$

于是

$$p'_i=p_kl_{ik} \tag{2-4}$$

同理可得

$$p_k=p'_il_{ik} \tag{2-4)a$$

可见给定面上某点的应力，它的三个分量在坐标变换时满足（2-4）式或（2-4）a式。这就是矢量分量在坐标变换时所遵守的规律。这进一步说明了给定面上某点的应力是一个矢量，而不变量（2-2）式是一次式。

从上面分析可以看出，用应力矢量来度量某一点的内力强度，不能离开过这一点的面。但是过一点有无数个面，这样自然会提出，知道过该点几个面上的应力矢量后，才能够求出过此点任一个面上的应力矢量这样一个问题。这就是怎样来度量一点应力的问题。例如用一个标量可以完全确定立方体的长或宽或高，还可以确定温度等等。用一个矢量（等同三个标量）可以完全确定一个力、速度等。那么用什么样的量来确定一点的应力状态呢？这就是本章要回答的第一个问题。其次要回答的问题就是在物体内不同点之间应力变化要服从什么规律呢？

2.2 应力互换定理

为了研究一点的应力状态，首先讨论过一点的任意两个面上应力矢量的关系。为此在处于平衡状态的物体内任一点A截出一微小四面体$ABCD$，见图2-3。当该四面体无限缩小时，它的四个面就可以看作为过点A的四个微分面。现在来考察ABC及ABD这两个微分面上的应力矢量$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$之间的关系，为此将四面体$ABCD$投影到与棱AB垂直的π面上，得到$\triangle A'C'D'$。这时$\triangle ACD$的面心O及$\triangle BCD$的面心都投影到π面上为O'点，且它就是$\triangle A'C'D'$的面心。而$\triangle ABC$及$\triangle ABD$的面心O_1及O_2的投影为O'_1、O'_2两点，且在$A'C'$和$A'D'$的三分点上。于是得到

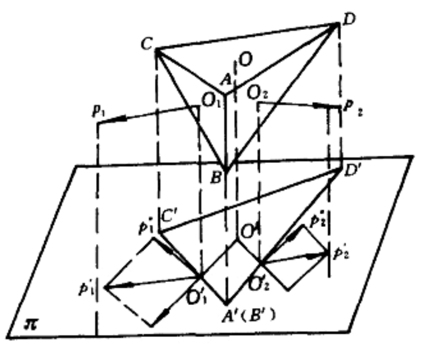


图 2-3

$$\frac{O'O'_1}{O'O'_2} = \frac{A'D'}{A'C'} \tag{a}$$

而$\triangle ABC$的面积dS_1，及$\triangle ABD$面积dS_2之比等于其公共底边AB上各自高之比。即

$$\frac{dS_2}{dS_1} = \frac{A'D'}{A'C'} \tag{b}$$

由式（a）和（b）可以得出

$$dS_1 \cdot O'O'_1 = dS_2 \cdot O'O'_2 \tag{c}$$

由于$ABCD$为微小四面体，因此每个微面上的应力矢量都可以看为均匀分布，其合力作用在各自微面的面心点上。另外作用在四面体$ABCD$上的力应满足平衡条件，为此取对OO'轴的力矩平衡条件。面ACD、BCD上应力矢量的合力过OO'轴，所以只有ABC及ABD面上的应力矢量$\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$对OO'轴有矩。$\boldsymbol{p}_1$在π面上的投影为p'_1，而p'_1的垂直于$O'O'_1$的分量为p''_1。$\boldsymbol{p}_2$在π面上投影p'_2垂直于$O'O'_2$的分量为p''_2。而p'_1，p'_2的另一个分量过O'点，所以力矩平衡条件为

$$p''_1 dS_1 O'O'_1 = p''_2 dS_2 O'O'_2$$

由式（c），因此有

$$p''_1 = p''_2 \tag{2-5}$$

即“过一点任意两个相交微分面上的应力矢量，在另一个微分面法线方向的投影互等”——应力互换定理。它还可以表示为

$$\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{\eta}_1 \tag{2-5a}$$

式中$\boldsymbol{\eta}_1$、$\boldsymbol{\eta}_2$分别为两个微分面外向法线方向的单位矢量。

在上面的推导中，未计及体积力是因为体积力是与微小四面体的体积dV成正比，而面力与微面积dS成正比，但微小体积dV是较微面积dS高一阶的微量，可以忽略，同样惯性力也是高阶微量。由上述应力互换定理，可以导出如下两个推论。

推论 1：对过一点互相垂直的两个微面，应用应力互换定理，就得到在材料力学中就已熟知的剪应力互等定理。

推论 2：现在考察微分面转动时，面上应力的变化。

在图 2-4（a）中，面Ⅰ上的应力矢量分解为与面Ⅰ垂直的应力分量σ_1（法向应力），及同面Ⅰ相切的应力分量τ_1（切向应力）。当面Ⅰ转动一个微小角度$d\theta$得面Ⅱ，其上的应力分量为$\sigma_2=\sigma_1+d\sigma_1$、$\tau_2=\tau_1+d\tau_1$，而$d\sigma_1=\frac{\partial\sigma_1}{\partial\theta}d\theta$、$d\tau_1=\frac{\partial\tau_1}{\partial\theta}d\theta$。于是夹角为$d\theta$的微分外表面上的应力分量如图 2-4（$b$）所示，应用互换定理于这两个微分面，则

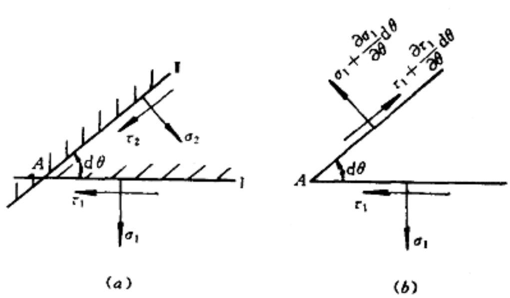


图 2-4

$$-\left(\sigma_1+\frac{\partial\sigma_1}{\partial\theta}d\theta\right)\cos d\theta-\left(\tau_1+\frac{\partial\tau_1}{\partial\theta}d\theta\right)\sin d\theta$$

$$= -\sigma_1 \cos d\theta + \tau_1 \sin d\theta$$

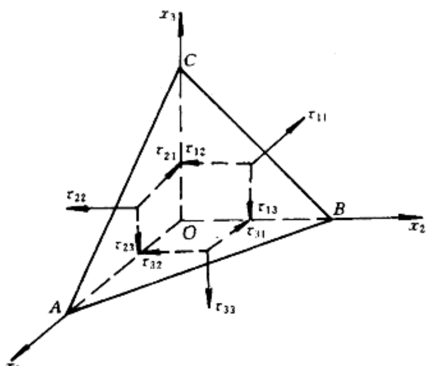
由于 $d\theta$ 很微小，可以令 $\cos d\theta \approx 1$、$\sin d\theta \approx d\theta$，于是得

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \theta} = -2\tau_1 \tag{2-6}$$

因此可以看到，当面绕点旋转时，在切向应力 $\tau=0$ 的面上法向应力 σ 取极值，该面称为“主平面”。于是在主平面上切向应力为零，而法向应力取极值。

2.3 一点的应力状态——应力张量

根据应力互换定理可知，过某点一个面上的应力矢量，它的某一个分量可以由过该点另一个面上的应力矢量求出。但是一个应力矢量要由坐标系中三个分量才能完全确定，所以要确定一个面上的应力矢量，必须已知过该点另外三个面上的应力矢量。于是可以在直角坐标系中过某点 O 截取如图 2-5 所示的一个微小四面体 $OABC$，它的三个面与坐标面重合，而另外一个斜面 ABC 的外向法线为 n。在四面体的三个坐标面上的应力矢量分解为沿坐标轴 x_1、x_2、x_3（即 x、y、z）方向的三个分量，共有九个应力分量。这些应力分量用两个下标表示如图 2-5（a），第一个指标代表该应力分量所在面的法线方向，而第二个指标代表该应力分量的作用方向（指向）。例如 τ_{ij} 表示该应力分量作用在法线方向为坐标轴 x_i 的面上，而作用方向为 x_j 坐标轴方向（i，$j=1$、2、3）。这三个应力分量中，有两个为切向应力或称剪应力，还有一个为该面的法向应力或称正应力。它们的正负是这样规定的：当应力分量作用面的外向法线方向同坐标轴正方向一致时，应力分量作用方向同坐标轴正方向一致时为正；当外向法线方向同坐标轴正方向相反时，应力分量作用方向也同坐标轴正方向相反时为正。反之为负。这个规定对正应力与材料力学中传统的“拉为正，压为负”概念是一致的。而对剪应力则与材料力学的规定是不同的，这一点应注意。而 ABC 面（称 n 面）上的应力矢量 $\boldsymbol{p}$ 的三个分量 p_k（p_1，p_2，p_3），则以沿坐标轴正方向为正，反之为负，见图 2-5（b）。在图 2-5 上所表示的应力分量均为正。



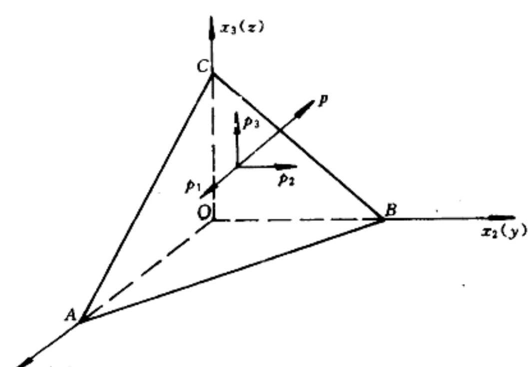


图 2-5

对上述四面体 n 面上应力矢量 $\boldsymbol{p}$ 的三个分量，可以通过互换定理用另外三个坐标面上的应力分量来表示，即