中等專業学校教学用書

測量誤差原理

苏联 恩·斯·彼特罗夫著

煤炭工業出版社

中 等 專 業 学 校 教 学 用 書

測量誤差原理

苏联 恩·斯·彼特罗夫著

袁 文 伯譯

苏联煤礦工業部教育司审定
作为中等採礦学校'礦山測量'專業教学用書

煤 炭 工 業 出 版 社

內 容 提 要

本書論述測量誤差原理的基本問題和測量平差計算的一般概念，用实例說明运用測量誤差原理来解决礦山測量和地形測量工作中所發生的实際問題。本書是中等專業学校'礦山測量'專業的教材，也可作为礦山測量和地形測量实际工作人員参考之用。

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

苏联 Н. С. ПЕТРОВ 著

根据苏联国立煤礦技术書籍出版社（УГЛЕТЕХИЗДАТ）
1953年哈尔科夫第一版翻譯

115

測 量 誤 差 原 理

袁 文 伯 譯

*

煤炭工業出版社出版（社址：北京東長安街煤炭工業部）
北京市書刊出版業營業許可証出字第084号

北京市印刷一厂排印　　新华書店發行

*

开本78.7×109.2公分1/32・印張3 1/8・字數75,000

1954年11月北京第1版

1956年8月北京第4次印刷

統一書号：15035・78　印数：7,181—9,210　定价：(10)0.50元

目　錄

序　言

第十九次黨代表大會關於第五個五年計劃的指示規定了蘇聯國民經濟所有各部門的進一步發展，蘇聯人民的物質幸福、衛生健康和文化水平的飛躍增長。第五個五年計劃意味着我們祖國在由社會主義走向共產主義的道路上邁進了新的一大步。

蘇聯在國民經濟全面發展的同時也發展了蘇維埃科學。蘇維埃科學幫助蘇聯人民更完全地開發和更好地利用天然的資源和力量來改善社會主義生產。

由於社會主義生產的不斷增長和改善，因此就需要對有些部門的知識作更詳盡的研究，這些知識由於某些原因在從前還不曾廣泛應用。

本書所討論的測量誤差原理就可以作爲這樣的一個例子，這方面的知識已成爲現代地形測量和礦山技術測量所不可缺少的部分了。

由於複雜工程和水工技術結構建設的巨大規模，由於採礦工業，特別是煤礦工業的發展，對於地形測量和礦山測量的工作提出了新的要求。

當應用於現代規模巨大的水工技術結構的和其他複雜工程結構的建築時，或者應用於現代機械化的煤礦，其巷道延長很遠時，地形測量和礦山測量不但應該很好地完成測量工作，而且還要在足夠精度的意義上估量這些測量工作的結果。

假使在從前，礦山技術測量的活動基本上是局限於礦井巷道延長不大的簡單測量工作，那末在現在，由於礦井巷道的延長、巷道的快速掘進、迎面相遇的工作面的巷道掘進等等，在測量工作中考慮誤差的累積影響是具有特別重要意義的。

在現代的採礦技術水平，採礦工作的規模和速度的條件下，充實的和足夠程度的測量誤差原理的知識，顯然是礦山技術測量

所必需的和不可缺少的了。

測量誤差原理是實用的專業課程，老早就已很好地建立起來了。但是現在關於測量誤差原理的書籍都是專供高等學校用的教科書和參考書，可供中等專業學校學生用的書還是很難找到。

所以，爲中等專業學校的學生編寫這樣的教材正是迫切需要的；這種教材要適應於培養礦山技術測量人員的測量誤差原理的教學大綱和所需要的水平。

本書供礦業中等專業學校礦山測量專業的學生用，它是按照蘇聯煤礦工業部教育司所審定的測量誤差原理的教學大綱編寫的。

本書研究測量誤差原理的基本問題和平差計算的一般概念；這些知識都是爲學習「礦山測量」和「礦山三角測量」等專業課程所不可缺少的。在這些課程中將要學習怎樣估計測量工作最後結果的誤差和用最小二乘法來研究礦山三角測量的平差方法。

在論述測量誤差的基本問題以後，本書接着研討了一些簡單例題；爲了培養學生有能力運用測量誤差原理來解決礦山測量和地形測量工作中所發生的實際問題，這顯然是必要的。

本書論述測量誤差原理問題的先後次序是根據邏輯的順序性和測量實際需要的各種理論問題的協調原則。

所有對於本書的批評意見，作者都十分感謝和歡迎。

科學技術博士符·符·巴甫洛夫教授担任本書原稿的審校工作，作者致以深切的謝忱；科學技術碩士維·阿·羅曼諾夫爲本書原稿評閱，亦深感謝。

第一章　測量誤差

§1.測量誤差的一般概述

在進行地形測量和礦山測量工作的過程中，要完成線或角度的測量工作，但更常遇到的是要同時做這兩種工作。

任何測量工作都是用同類量的單位來和所測量的量比較而定其數值。例如，當測量經緯儀導線的邊時，就是要想法確定出相鄰兩點之間的直線段的實際數值，用捲尺或輕便捲尺的長度單位表明之。當測量多邊形的水平角時，也就是要想法確定出多邊形相鄰兩邊的水平投影之間的角的實際數量，用經緯儀的度盤上的分劃角度的單位表明之。

由於我們的感官和測量時所用的工具和儀器並不是完美無缺，進行測量時的環境也並不是永恆不變，以及其他一些原因，所以測量的量的眞値是不可能求得的；也就是說，任何量的測量是不會絕對精確的。所以我們只可以在某種程度上接近所求量的眞値而已❶。

測量的接近度或精度是用測量的誤差來加以鑑定的。

測量誤差的意義就是所測量的量的測定值（又稱觀測値）和其眞値之間的差數。這個眞値與測定値之間的差數叫做測量的眞誤差。

假定用 L 表示某量的長度的眞値，用 l 表示其測定値（圖1），那末，測量的眞誤差 δ 可以用下面的等式表明之。

$$\delta = L - l. \tag{1}$$

誤差的量 δ 可以是正號或負號，決定於測定値 l 是小於或大於眞値 L。

測量的誤差愈大，則測量的精度愈低；反之，誤差愈小，則

---

❶ 任何量的眞値的意義就是在測量時所測定的量的實際精確（眞的）値。

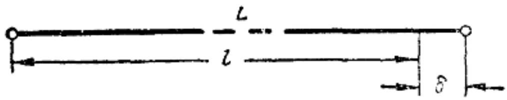

圖 1

測量的精度愈高。

測量誤差的數值首先是決定於測量所用的工具或儀器的精度和測量的方法。

假定地面上的一條線的長度是用脚步測量的，那末所得的誤差要比用捲尺測量同一線的結果大些。因此，為了提高測量的精度（減低誤差），就必須採用較精密的儀器和更完善的測量方法。

測量的精度也可以在一定的範圍內用增加重複測量次數的方式來加以提高。

在進行地形測量和礦山測量工作時，最重要的是要有能力確定每一個別測量的誤差，測量結果的誤差，和用間接方法（間接測量）所求得的數值的誤差。研究如何確定誤差的方法是測量誤差原理的目的。

測量誤差原理的任務就在於研究如何確定測量誤差的和測定值函數誤差的方法。

在談到研究誤差的分類問題和確定測量誤差的方法以前，我們先來討論關於絕對誤差和相對誤差的概念。

以前曾經說過，任何一個量的眞值和測定值之間的差數叫做測量的眞誤差。這個差數的數值，以測量的單位表明之，通常叫做絕對誤差。絕對誤差無論何時都是名數，用長度、角度或其他單位表明之。測量的絕對誤差通常用字母 m 表示。

但是，根據絕對誤差的數量值還是很難判斷出測量的精度。例如，測量兩條線的長度：一條線長度 100 公尺，誤差 ± 1 公分；另一條線長度 2 公尺，誤差 ± 1 公厘；那末，如按照這些絕對誤差的數值而論，就很難說兩個測量的那一個是做得比較精密

些。

為了更容易地判斷出個別測量的精度和比較其結果，最好是採用測量的相對誤差。測量的相對誤差等於絕對誤差數值與其測定值之比，通常以 f 表示之。

在所討論的例題中，長度測量的相對誤差是等於絕對誤差 m 除以所測量的線的長度 l 而得的商數。

線長度的測量相對誤差的數值可以用公式表示：

$$f=\frac{m}{l}. \tag{2}$$

分子 m 和分母 l 的因次是相同的； 所以相對誤差 f 是一個抽象的不名數，最好用分子等於 1 的分數表示之，即 $f=\frac{1}{\left(\frac{l}{m}\right)}$。

因此，相對誤差 f 說明了下面的事實，即測量的絕對誤差是組成測定長度的怎樣部分。

應用公式（2）可以求得上述例題的兩個相對誤差， 分別得出：

1） 100 公尺長度的相對誤差是

$$f_1=\frac{1\text{公分}}{100\text{公尺}}=\frac{1}{10\,000};$$

2） 2 公尺長度的相對誤差是

$$f_2=\frac{1\text{公厘}}{2\text{公尺}}=\frac{1}{2\,000},$$

即 f_2 大於 f_1。

由此可見，100 公尺長的線是測量得比 2 公尺長的線更精密些。

為了判斷測量的結果，不但要用相對誤差，而且有時也要用絕對誤差。例如，在判斷多邊形角度測量的精度時就要用絕對誤差或用多邊形的角度閉合差值（不符值）。角度測量的相對誤差是不必計算的，因為角度的誤差和角度的大小沒有關係。

反而言之，多邊形的邊長度測量的精度，多半是按照長度測

量的相對誤差來判斷的，或者按照多邊形頂點座標的增量的相對誤差來判斷的。由於這些原因，容許誤差的標準可以用絕對值或相對值來決定。

前面曾經說過，角度測量的相對誤差是不必計算的，但是有些時候用抽象的不名數來表示角度誤差的數值是更有利些。爲此目的，可以把角度誤差的值 m_β 除以等於一弧度的固定角度的值 ρ。在 $\frac{m''_\beta}{\rho''}$ 的比中，角度誤差 m_β 和弧度值 ρ 必須是用同一個角度單位；此時，角度誤差用抽象的不名數來表示，這個不名數表明了角度誤差比單位弧度所小的倍數。

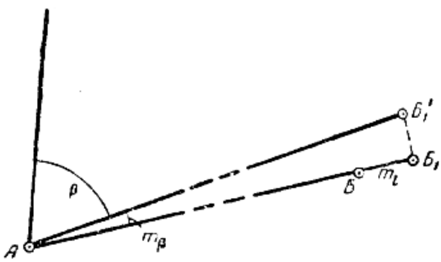

圖 2

應當指出，線長度的相對誤差可以作爲縱向的相對誤差；用弧度表示的角度誤差可以作爲橫向的相對誤差，和線的長度無關。實際上，假定 β 角測量的結果有誤差 m_β，這角的一邊 AB 的長度測量結果有誤差 m_l（圖 2），那末，由於線誤差 m_l 的影響 B 點將沿所測線的方向移動到 B_1 點的位置；又由於角度誤差 m_β 的影響 B_1 點又將在垂直於 AB 線的方向上移動到 B_1' 點的位置。爲了要從 B 點的位置誤差的觀點來判斷長度和角度的測量精度，就必須要確定長度測量的相對誤差，及用弧度表示的角度誤差。當 AB 線的長度 $AB=40$ 公尺時，令 $m_\beta=\pm0.5'$，及 $m_l=\pm1$ 公分。

長度 AB 的測量相對誤差 f_l 是

$$f_l=\frac{m_l}{AB}=\frac{1\text{公分}}{40\text{公尺}}=\frac{1}{4\,000}.$$

此間 f_l 是在 B 點位置的縱向相對誤差。

角度測量的相對誤差 f_β，亦即角度誤差($m_\beta=0.5'$)除以一弧度的分的數目（$\rho'=3438'$）所得的商數，是 B 點位置的橫向相對誤差。

$$f_\beta=\frac{m_\beta}{\rho'}=\frac{0.5'}{3438'}=\frac{1}{6876}.$$

比較所求得的誤差結果可以指出，在這個例題的情況中，B 點位置在垂直於 AB 線方向的測定比沿 AB 線方向的要精密些。

由此可見，測量誤差是在測量的過程中發生的。測量是由測量的絕對誤差或者相對誤差的數值來判斷其精度。

§2.測量誤差的分類

測量誤差分爲三類：

1． 粗差是由於測量錯誤或計算錯誤而發生的。其發生的原因是由於疏忽大意或用不正確的測量方法的結果。例如，在測量一條長度很大的直線時，可能數錯了捲尺的數目，在測量角度時可能讀錯了度盤上的整分格等等。粗差歪曲了測量的結果，並使以後的測量工作遭受不利。

在測量誤差原理中不研究粗差問題。測量工作必須要這樣限定，就是要消除了粗差的發生。爲了避免粗差，最好對同一個量進行重複的（校正的）而彼此相互獨立的測量。

如同以後所要說明的，進行重複測量還可以保證測量的更高精度。

2． 固定誤差或系統誤差，主要是由於測量所用的工具不够完善而發生。

此外，系統誤差的發生也可能是由於外面的環境條件所引起的，例如，溫度對於測量工具和儀器的影響或觀測者的個性特點等。

在一定的條件之下，系統誤差無論在數量上或在符號上一般都是比較固定的；因此，這些誤差是容易估算出來並須在測量的結果上加以改正或者用適當的觀測組織使其完全消除。用不準確的捲尺或輕便捲尺在長度測量中所發生的誤差就是系統誤差的例子。測量捲尺的實際長度通常是和其名義上的長度（即捲尺所標明的長度）不盡相符。比較測量捲尺的長度和標準量器（原器）的長度而定其更正量。在測得的長度上引入更正即可消除因捲尺或輕便捲尺短於或長於標準量器而發生的系統誤差。

系統誤差有時可以用適當的觀測組織而使其消除。例如，假使用竪盤的兩個位置來進行角度測量，經緯儀的視準軸誤差就可以免除；假使用兩個游標讀數的平均數作爲最後值，經緯儀游標盤的偏心差就可避免。

系統誤差，也和粗差一樣，在測量誤差原理中不加討論。

3．偶然誤差，偶然誤差是隱微莫測的，是由於我們感覺器官的缺點和儀器的誤差而引起的；這些誤差既不能在數值上加以測定，也不能用適當的觀測方法使其消除。屬於這類的有：(1)讀數誤差，如角度測量時讀游標，長度測量時讀捲尺，水平測量時讀水平尺；(2)觀測誤差，由於我們眼睛的缺點和望遠鏡的放大倍數不足，因而使觀測物的像的線條混混不够清晰，如此所引起的觀測誤差亦屬於偶然誤差。

偶然誤差的來源是極其多方面的。偶然誤差的發生不但是由於觀測者的感覺器官和其所用的儀器有缺點，而且測量進行時候的條件，觀測者的經驗癖愛及其精神上和生理上的各種情况都是偶然誤差的原因。

偶然誤差的影響在測量結果中是無法免除的，因此，偶然誤差的數量和正負號都不能估算。

由此說來，測量的偶然誤差是不能計算出來的，也是不能免除的；測量結果的精度基本上是決定於偶然誤差。

根據這樣理由，在測量誤差原理中只研究測量的偶然誤差問題。所有誤差原理的結論都是根據這樣的假設，就是測量的粗差

和系統誤差都已全部消除了。因此，爲了使實際測量所得的結果不與理論的結論相矛盾，那末，在測量中必須不允許有任何粗差存在：所有系統誤差必須由測量結果中消去，或者要在求得的測量結果中使系統誤差在數值上遠比偶然誤差爲小。

§3.偶然誤差的基本性質

從偶然誤差的特性觀念，得出其下列這些基本性質，可以根據經驗加以確立。

性質Ⅰ　正的偶然誤差和負的偶然誤差出現的可能性相等。

實際上，我們可以希望當測量長度時捲尺的讀數，或測量角度時游標的讀數，比實際數值大或小的機會是相等的。因此，就沒有根據去假定在多次的測量中正誤差將會遇到比負誤差多，或者，相反地，負誤差會比正誤差多。因此，假設正誤差和負誤差出現的可能性相等顯然是正確的。

假定，任何一個量的眞值是 L，測量了 n 次：測量所得到的結果是 $l_1, l_2, l_3, \cdots\cdots l_n$ 。

這些觀測値量値 l_i 離開眞值 L 的眞誤差 δ_i 求得如下：

$$
\begin{aligned}
L-l_1&=\delta_1\\
L-l_2&=\delta_2\\
L-l_3&=\delta_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
L-l_n&=\delta_n
\end{aligned}
$$

在一系列測量的眞誤差 $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \cdots\cdots \delta_n$ 中，按照偶然誤差的性質Ⅰ，正誤差和負誤差的個數是相同的，而且測量的次數愈多，這個性質愈能實現。

性質Ⅱ　等值的正誤差和負誤差出現的可能性相等。

實際上，例如讀游標或捲尺時，我們沒有根據去判定（假定系統誤差的影響已經消除出去），偶然誤差 $+\delta$ 的出現會比誤差 $-\delta$ 容易些，假定一個量經多次測量是用同一儀器，同一觀測者和在相同的外在條件之下進行的。那末，這就有充分的根據來判

定，數值相等而記號相反的誤差出現的可能性是相等的；而且測量的次數愈多，偶然誤差的這種性質也就愈明顯。

性質Ⅲ　小的偶然誤差比大的偶然誤差更容易出現；而且在一定的測量條件之下，大的偶然誤差不會超過一定的極限數值。

這種偶然誤差的性質是非常明顯的，也和前面的二條性質一樣，是可以用多次的經驗研究加以證實的。

應當指出，前面所列舉的這些偶然誤差的性質只在同精度測量中是正確的。

當每一個測量都是用同一儀器，同一觀測者，和在同樣的外在條件（天氣，溫度，光線等等的情況）之下所完成的，這樣的測量就叫做同精度測量（觀測）。

根據Ⅰ及Ⅱ二條偶然誤差的性質，我們可以相信下述假設的正確性。這個假設在誤差原理中非常重要。

當測量的次數無限制地增大時，同一個量的同精度測量的偶然誤差的算術平均數將接近於零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\delta_1+\delta_2+\delta_3+\cdots+\delta_n}{n}=0.$$

我們可以簡單地用方括號［ ］來表示任何量的和。現在可以寫出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\delta]}{n}=0. \tag{3}$$

實際上，假定許多測量的全部誤差都相加起來，那末正差與負差將互相抵消，不管誤差的數目怎樣增大，但是誤差的總和仍是一個比較不大的有限數。最後，當 $n\to\infty$ 時，$\frac{[\delta]}{n}$ 的數值將接近於零爲極限。

假定 $[\delta]$ 之值顯然是不接近於零，那末，就可能是由於系統誤差的影響所引起的；因爲這些系統誤差在觀測時還不會加以消除。在這種情況下，必須查明系統誤差的來源並設法加以消除。

假定測量的次數（誤差的數目）等於 n，總和 $[\delta]=\Delta$，那末

系統誤差的數值將等於$\frac{A}{n}$。

§4.算術平均值

假定對同一個量做了多次的同精度測量，那末很自然地就會發生這樣的問題：採用怎樣的值作爲最後的測量結果呢？

假定由 n 次測量所得的這個量的値爲 $l_1, l_2, l_3 \cdots\cdots l_n$，其眞值等於 L。

在這種情況下，並不是採用測定値中的任何一個値 l_i 作爲測量結果，而是採用全部測量的算術平均値作爲測量的結果；算術平均値即等於全部測定値的總和除以測量次數而得的商數，即

$$X = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_n}{n}. \tag{4}$$

用方括號的方式來表示總和的簡單符號，可以寫成

$$X = \frac{[l]}{n}. \tag{4a}$$

此間　X 爲測量結果（全部測定値的算術平均値）；

$[l]$ 爲某一個量 L 的 n 次測定値的總和；

n 爲測量次數。

作爲測量結果的算術平均値 X 最接近於這個量的眞値 L。

這是可以根據下面的論斷而加以相信的。

因爲偶然誤差 δ_i 是等於所測量的量的眞値 L 和其測定値 l_i 之間的差數（圖 1），即 $\delta_i = L - l_i$，因此，所測量的量的眞値 L 可以用下式表示之：

$$L = l_i + \delta_i.$$

這樣，以測定値 l_i 和偶然誤差 δ_i 來表示眞値 L，並把所有這些數値相加起來，便得

$$L = l_1 + \delta_1$$
$$L = l_2 + \delta_2$$
$$L = l_3 + \delta_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L = l_n + \delta_n$$

$$\overline{nL = [l] + [\delta]}$$

把右邊和左邊的和都除以 n，則得

$$L = \frac{[l]}{n} + \frac{[\delta]}{n}. \tag{46}$$

假定，$n \to \infty$，那末，根據偶然誤差的性質可以判定，$\frac{[\delta]}{n} = 0$。此時，(46)式可以寫成下面方式

$$L = \frac{[l]}{n},$$

即是說，假定測量的次數是無限增大的時候，所測量的「量」的眞值是等於全部測定值的總和除以測量次數所得的商。

事實上，我們不能對任何一個量做無限次數的測量，因此，實際上是不可能得到所測量的「量」的眞值的。

在測量時，通常都只能做有限次數的測量，因此用測量的次數 n 來除其總和 $[l]$ 所得的商數 X 並不等於這個量的眞值 L，只是或多或少地接近眞值 L 的一個 X 值而已。這個算術平均值 X 就是所測量的「量」的最或是值。而且，測量的次數做得愈多，那末算術平均值也就愈接近於眞值 L。

這樣說來，測量重複的次數愈大，那末，算術平均值 X 對於所測量的「量」的眞值的接近度亦將愈高。由此得出一條法則：測量做的次數愈多，則測量的結果 X 愈接近於所測量的「量」的眞值 L。因此，測量誤差亦將愈小。

根據以上所述，我們得出結論：算術平均值是所測量的「量」的最或是值，並作爲測量的最後結果。

現在我們來研究算術平均值的計算方法，在任何的多次測量中都要發生這樣的問題。

1．假定要尋求 2.5；2.6；2.7；2.9 及 3.0 這些數的算術平均值。