北京市社会科学理论著作出版基金资助出版

素朴集合论

刘壮虎 著

北京大学出版社
北　京

图书在版编目(CIP)数据

素朴集合论/刘壮虎著. —北京：北京大学出版社，2001.10
ISBN 7-301-05113-1

Ⅰ.素… Ⅱ.刘… Ⅲ.集论 Ⅳ.0144

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 046321 号

书　　名：**素朴集合论**
著作责任者：刘壮虎
责 任 编 辑：李昭时
标 准 书 号：ISBN 7-301-05113-1/B·0211
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　编辑室 62752032
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850 毫米×1168 毫米　32 开本　9.875 印张　257 千字
2001 年 10 月第一版　2001 年 10 月第一次印刷
定　　价：18.00 元

前　　言

自从 G.Cantor 创立集合论后，这门学科有了很大的发展，已经成为现代数学和现代逻辑的基础之一，成为数学和逻辑领域的工作者一门必不可少的基础知识。

Cantor 最初提出的集合的概念，是素朴和直观的。自从发现集合论悖论后，人们致力于将素朴和直观的集合概念严格化，以避免悖论，公理集合论就是这种努力的产物。虽然公理集合论在研究集合论本身有着极其重要的作用，但作为数学和逻辑的原始概念之一的仍然是素朴和直观的集合概念。

本书用素朴的观点介绍集合论的基本内容。本书不以公理集合论为框架，不把所有的概念都归结为集合。因为从素朴的观点看，集合论中有些概念和集合概念同样基本，所以在本书中对它们的意义和作用作直观的描述，便于理解这些概念的实质。也不把数(自然数、整数、有理数、实数等)归结为集合，而把数的集合作为集合的主要例子来加深对集合的理解。类似地，也不把数的性质归结为集合的性质。特别地，自然数的数学归纳法(或等价地为最小数原理)是先于集合论的更为基本的原理。

集合论的内容是比较抽象的。本书对每个重要概念都作了尽量多的直观解释，并举了一定数量的具有代表性的例子，以帮助读者熟悉这些概念和加深对它们的理解。

集合论中有些定理是比较深刻的，它们的证明也较难。对于这些定理，本书都作了详尽的直观解释，对这些定理证明的思路也作了一定的分析，作者希望通过这样的解释和分析，使读者能够了解这些定理的意义并能更好地掌握证明方法。

本书前六章是集合论的基本内容。第一章集合的基本概念，

包括子集和幂集、集合的运算、卡氏集和集合族等；第二章映射，映射是集合论中和集合同样重要的基本概念；第三章关系，主要讨论两种重要的二元关系——等价关系和偏序关系；第四章基数，第五章序数，第六章选择公理，这三部分是集合论中最为深刻的内容，从概念的理解到定理的证明都有一定的难度。

本书后三章是一些特殊的内容。第七章简单介绍在现代逻辑中有广泛应用的两类集合族——集域代数和超滤；第八章从技术角度讨论如何将映射和数归结为集合；第九章从素朴和直观的角度讨论集合论悖论，这样的讨论肯定不是深刻的，也不是集合论悖论的解决方案，但能使读者对集合论悖论有一定的了解。

本书附有大量习题，它们是本书的有机组成部分，不可忽略。这些习题主要有三类，一类是基本的训练，另一类是正文的定理证明中所省略的内容，还有一类是正文中没有提到的具有一定重要性的概念和结果。

在本书的编写过程中，得到了王宪钧教授、晏成书教授的指导和帮助。本书的初稿曾由康宏逵先生审阅，并提出了许多宝贵的意见，部分章节的结构就是根据这些意见重新安排的。本书的二稿曾作为北京大学哲学系逻辑专业“素朴集合论”课程的试用教材，哲学系逻辑教研室的同志和逻辑专业学生关于此课程的许多意见，对于本书的最后定稿也有很大的帮助。在此本人表示衷心的感谢。

作　者

2000 年 10 月于燕北园

第一章　集合的基本性质

1.1　集合的概念

在日常生活中，在逻辑、数学以及其它科学的研究中，我们经常遇到一类对象，这类对象是某些东西的总体。例如人类这个概念的外延就是所有具体的人的总体，动物这个概念的外延就是所有具体的动物的总体，又如自然数、整数、实数都是具有某种性质的数的总体，三角形、正方形、多边形都是某种几何图形的总体。把这类对象最一般的性质抽象出来就是集合。

集合，简单地说就是一堆东西的总体，其中每个东西称为这个集合的元素，这样的集合概念是素朴的和直观的，我们可以通过对具体集合的认识和对集合性质的讨论来加深对它理解。

以后在使用人类、动物等概念时、总是将它们当作集合来看待。除了以上提到的集合外，我们再来看几个例子。

1.1.1 例　太阳系的行星是水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星的总体。

1.1.2 例　书，纸，笔分别是所有具体的书，所有具体的纸和所有具体的笔的总体。

我们将什么东西都没有也看做一堆东西的总体，从而它就是一个集合。这样的集合称为空集。

有的集合只有一个元素，但这个集合和它惟一的的元素是不同的。这个元素只是一个东西，而这个集合是一堆东西的总体，只不过这堆东西只有一个。如地球的卫星是一个集合，它只有一个元素月亮。地球的卫星和月亮是不同的。

以后一般用英文大写字母 A, B, C, X, Y, Z 表示集合，用英文小

写字母 a, b, c, x, y, z 等表示集合的元素。常用的特殊集合用专门的记号，如用英文大写黑体字母 **N**, **Z**, **Q** 和 **R** 分别表示自然数、整数、有理数和实数。

1.1.3 定义 属于 a 是 A 的元素称为 a 属于 A，记为 $a\in A$，a 不是 A 的元素称为 a 不属于 A，记为 $a\notin A$。$\in$ 称为属于关系。

为了简便起见，将 $a\in A$ 且 $b\in A$ 简记为 a, $b\in A$。更一般地，将 $a_1\in A,\cdots, a_n\in A$ 简记为 $a_1,\cdots, a_n\in A$。

以下是属于关系的几个例子。

1.1.4 例 金星 $\in$ 太阳系的行星。月亮 $\notin$ 太阳系的行星。

1.1.5 例 $3\in\mathbf{N}$，$\frac{2}{3}\in\mathbf{Q}$，$\sqrt{2}\in\mathbf{R}$。$\frac{2}{3}\notin\mathbf{N}$，$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$。

集合由它的元素惟一确定，不涉及其他因素。因此要描述一个集合，只要描述这个集合的元素就行了。有两种描述集合的方法，一种是列举集合的所有元素，用 $\{a_1,\cdots, a_n\}$ 表示，如太阳系的行星可表示为

{水星, 金星, 地球, 火星, 木星, 土星, 天王星, 海王星, 冥王星},

又如

{真, 假}、{李白, 杜甫}、$\{1, 2\}$、$\{0, 1,\cdots, n-1\}$

等。另一种是刻画集合中元素的性质，用 $\{x \mid x$ 有性质 $\phi\}$ 来表示，如

$\{x \mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $x\leq 0\}$、$\{x \mid x^2-3x+2=0\}$

等。

集合是个很一般的概念。任何东西都能放在一起作为一堆东西，所以组成集合的元素没有任何限制。集合的元素本身可以还是一个集合，如在集合

{书, 纸, 笔}

中，元素书、纸、笔也是集合。集合的元素可以是具体的，如

{金星, 水星}、{李白, 杜甫}

等，也可以是抽象的，如

{真, 假}，$\{1, 2\}$

等。甚至在一个集合中，可以有些元素是具体的，有些元素是抽象的，如

$$\{1, 2, \text{金星}, \text{水星}\}、\{\text{李白}, \text{杜甫}, \text{真}, \text{假}\}$$

等。集合和它的某些元素可以组成新的集合，如

$$\{1, \{1, 2, 3\}\}，\{\text{金星}, \text{水星}, \text{太阳系的行星}\}$$

等。

每个集合都有确定的元素，但刻画集合的确定性并不一定需要知道它们的元素。集合的确定性表现在：

任何一个东西是或者不是这个集合的元素，但不能既是又不是这个集合的元素。

这样，对于属于与不属于来说就有：

任给 x，并非 $x \in A$ 当且仅当 $x \notin A$。

从集合的确定性要求看，日常生活中使用的某些概念不能简单地看作集合的，如青年、新鲜的苹果等。如果需要将这样的概念作为集合来使用，必须给它们划出明确的界限。

1.1.6 定义 集合的相等 A 和 B 有同样的元素称为 A 和 B 相等，记为 $A = B$。因为集合由它的元素惟一确定，所以两个集合相等就是说它们是同一个集合。

如果 $A = B$，则 x 是 A 的元素当且仅当 x 是 B 的元素。如果 x 是 A 的元素当且仅当 x 是 B 的元素，则 A 和 B 就有同样的元素，所以 $A = B$。

因此可以用属于关系将 $A = B$ 表示为：

任给 x，$x \in A$ 当且仅当 $x \in B$。

由“当且仅当”的含义，也可以将 $A = B$ 表示为：

任给 x，如果 $x \in A$ 则 $x \in B$，如果 $x \in B$ 则 $x \in A$。

A 和 B 不相等记为 $A \neq B$。如果 $A \neq B$，则 B 中有元素不属于 A 或 A 中有元素不属于 B。反之如果 B 中有元素不属于 A 或 A 中有元素不属于 B，则 $A \neq B$。所以 $A \neq B$ 的条件是：

存在 x，$(x \in B$ 且 $x \notin A)$或$(x \in A$ 且 $x \notin B)$。

集合和它的描述方法无关。如

$$\{金星, 水星\} = \{x \mid x \text{ 是离太阳比地球离太阳近的行星}\},$$

$$\{1, 2\} = \{x \mid x^2-3x+2 = 0\},$$

$$\mathbf{N} = \{x \mid x\in\mathbf{Z} \text{ 且 } x\geq 0\}$$

等。在列举集合元素时和次序无关，如

$$\{0, 1, 2\} = \{2, 0, 1\},$$

$$\{金星, 水星\} = \{水星, 金星\}$$

等。也和重复列举无关，如

$$\{书, 纸, 笔\} = \{书, 纸, 笔, 纸\},$$

$$\{1, 2, 1, 3, 2\} = \{1, 2, 3\}$$

等。

如果两个集合都没有元素，则它们就有同样的元素。这就是说任何空集都相等，实际上只有一个空集，以后将这惟一的空集记为$\varnothing$。

如果$A \neq \varnothing$，则称A是非空集合。

习题 1.1

1.1.1 判断下列元素是否属于所指集合。

(1) 哈尔滨，北京，东京，浙江。集合是中国的城市。

(2) 1，2，$\{1,2\}$，$\{1,2,3\}$。集合是$\{1, \{1,2,3\}\}$。

(3) 地球，哈雷彗星，北极星，天王星。集合分别是恒星，太阳系的行星，太阳系的天体。

1.1.2 指出下列集合是否相等。

(1) $\{1, \{1,2\}\}$、$\{1,1,2\}$和$\{1,2\}$。

(2) $\{1, \{1,2,1\}, 2\}$和$\{1, 2, \{1,2\}\}$。

(3) $\{x \mid x\in\mathbf{N} \text{ 或} -x\in\mathbf{N}\}$和 $\mathbf{Z}$。

(4) $\{x \mid x\in\mathbf{Z} \text{ 且 } x\leq 3\}$和$\{0, 1, 2, 3\}$。

1.2 子集和幂集

给定一个集合，它的一部分元素能组成一个集合。这样的集合的特征是：它的每个元素都是原集合的元素。

1.2.1 定义 子集 如果 B 的元素都是 A 的元素，则称 B 是 A 的子集，也称 B 包含于 A，记为 $B \subseteq A$ (图 1.2.1)。$\subseteq$ 称为包含关系。

用属于关系可以将 $B \subseteq A$ 表示为：

任给 x，如果 $x \in B$ 则 $x \in A$。

如果 $B \subseteq A$，则所有不属于 A 的元素都不会属于 B。反之，如果所有不属于 A 的元素都不属于 B，则 $B \subseteq A$。所以 $B \subseteq A$ 也可以表示为：

任给 x，如果 $x \notin A$ 则 $x \notin B$。

B 不是 A 的子集记为 $B \nsubseteq A$。

如果 $B \nsubseteq A$，则 B 中有元素不属于 A。反之，如果 B 中有元素不属于 A，则 $B \nsubseteq A$ (图 1.2.2)。所以 $B \nsubseteq A$ 可以表示为：

存在 x，使得 $x \in B$ 且 $x \notin A$。

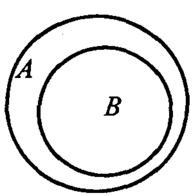


图 1.2.1 $B \subseteq A$

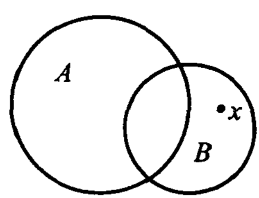


图 1.2.2 $B \nsubseteq A$

空集没有元素，所以对任何集合都可以说空集的元素都是这个集合的元素。因此空集是任何集合的子集，即：

任给集合 A，都有 $\varnothing \subseteq A$。

另外，任何非空集合都不是空集的子集，所以：

如果 $A \subseteq \varnothing$，则 $A = \varnothing$。

显然，集合 A 的元素都是集合 A 的元素，所以任何集合都是它自己的子集，即：

任给集合 A，都有 $A \subseteq A$。

如果 $B \subseteq A$ 且 $B \neq A$，则称 B 是的 A 的真子集。

和属于关系类似，为了简便起见，将 $B_1 \subseteq A, \cdots, B_n \subseteq A$ 简记为 $B_1, \cdots, B_n \subseteq A$。

为了熟悉子集的概念，我们来看子集的一些例子。

1.2.2 例 鱼是动物的子集。

三角形不是正方形的子集。

1.2.3 例 $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$，$\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$，$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$。

$\mathbf{R} \nsubseteq \mathbf{Q}$，$\mathbf{Q} \nsubseteq \mathbf{Z}$。

A 是集合，集合 $\{x \mid x \in A$ 且 x 有性质 $\phi\}$ 是 A 中所有具有性质 ϕ 的元素组成的 A 的子集，这是很常见的一种子集。

1.2.4 例 $\mathrm{n} \in \mathbf{N}$，所有比 n 小的自然数组成的集合

$\{x \mid x \in \mathbf{N}$ 且 $x < \mathrm{n}\}$

是 $\mathbf{N}$ 的子集，这个集合记为 $\mathbf{N}_\mathrm{n}$。它们有以下三个性质：

(1) $\mathbf{N}_0 = \varnothing$。因为没有比零小的自然数。

(2) 当 $\mathrm{n} \leq \mathrm{m}$ 时有 $\mathbf{N}_\mathrm{n} \subseteq \mathbf{N}_\mathrm{m}$。证明如下：

任给 x，如果 $x \in \mathbf{N}_\mathrm{n}$，则 $x < \mathrm{n}$，由 $\mathrm{n} \leq \mathrm{m}$ 和 $x < \mathrm{n}$ 得

$x < \mathrm{m}$，

由 $\mathbf{N}_\mathrm{m}$ 的定义得

$x \in \mathbf{N}_\mathrm{m}$。

这就证明了

任给 x，如果 $x \in \mathbf{N}_\mathrm{n}$ 则 $x \in \mathbf{N}_\mathrm{m}$，

因此 $\mathbf{N}_\mathrm{n} \subseteq \mathbf{N}_\mathrm{m}$。

(3) 当 $\mathrm{n} \neq \mathrm{m}$ 时有 $\mathbf{N}_\mathrm{n} \neq \mathbf{N}_\mathrm{m}$。证明如下：

如果 $\mathrm{n} < \mathrm{m}$，则

$$n\in\mathbf{N}_m \text{ 且 } n\notin\mathbf{N}_n,$$

如果 $m<n$，则

$$m\in\mathbf{N}_n \text{ 且 } m\notin\mathbf{N}_m,$$

在两种情况下都有

$$\text{存在 } x\text{，使得}(x\in\mathbf{N}_m \text{ 且 } x\notin\mathbf{N}_n)\text{或}(x\in\mathbf{N}_n \text{ 且 } x\notin\mathbf{N}_m),$$

因此 $\mathbf{N}_n\neq\mathbf{N}_m$。

1.2.5 例 任给 $a, b\in\mathbf{R}$，开区间

$$(a, b)=\{x \mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } a<x<b\}$$

和左开右闭区间

$$(a, b]=\{x \mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } a<x\leq b\}$$

都是 $\mathbf{R}$ 的子集。左开右闭区间有以下两个性质：

(1) 当 $b\leq a$ 时，不存在满足 $a<x\leq b$ 的实数 x，所以$(a, b]=\varnothing$。

(2) 当 $a\leq c$ 且 $d\leq b$ 时有$(c, d]\subseteq(a, b]$。

证明如下：

任给 x，如果 $x\in(c, d]$，则 $c<x\leq d$，由 $a\leq c$ 和 $c<x$ 得

$$a<x,$$

由 $d\leq b$ 和 $x\leq d$ 得 $x\leq b$，所以

$$a<x\leq b,$$

再由$(a, b]$的定义得

$$x\in(a, b]。$$

这就证明了

$$\text{任给 } x\text{，如果 } x\in(c, d]\text{则 } x\in(a, b],$$

因此$(c, d]\subseteq(a, b]$。

开区间也有类似的性质。

1.2.6 例 $\mathbf{Z}^+=\{x \mid x\in\mathbf{Z} \text{ 且 } x>0\}$，

$\mathbf{Q}^+=\{x \mid x\in\mathbf{Q} \text{ 且 } x>0\}$，

$\mathbf{R}^+=\{x \mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } x>0\}$

分别是正整数的集合，正有理数的集合和正实数的集合。

子集有以下基本性质。

1.2.7 定理 A, B, C 是任意集合。

(1) $\varnothing \subseteq A$，$A \subseteq A$。

(2) 如果 $B \subseteq A$ 且 $A \subseteq B$，则 $A = B$。

(3) 如果 $C \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则 $C \subseteq A$。

证 (1) 前面已有说明。

(2) 任给 x，如果 $x \in B$，则由 $B \subseteq A$ 得

$$x \in A,$$

如果 $x \in A$，则由 $A \subseteq B$ 得

$$x \in B。$$

因此 $A = B$ (图 1.2.3)。

任给 x，如果 $x \in C$，则由 $C \subseteq B$ 得

$$x \in B,$$

由 $x \in B$ 和 $B \subseteq A$ 得

$$x \in A。$$

因此 $C \subseteq A$ (图 1.2.4)。■

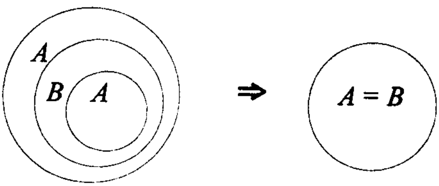


图 1.2.3

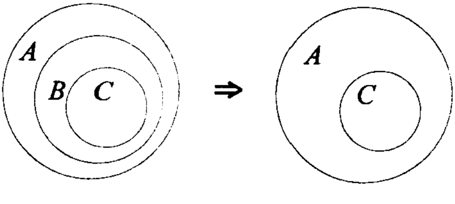


图 1.2.4

定理 1.2.7 的(2)可用来简化集合相等的证明，要证明 $A = B$，只需证明 $B \subseteq A$ 且 $A \subseteq B$ 就行了。

定理 1.2.7 的(3)称为包含关系的传递性。由于传递性，以后将 $C \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 简记为 $C \subseteq B \subseteq A$。

一个集合有许多子集，所有这些子集可以组成一个集合。

1.2.8 定义 幂集 集合 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集，记为 $\mathscr{P}(A)$，即 $\mathscr{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$。所以：

$$X \in \mathscr{P}(A) \text{ 当且仅当 } X \subseteq A。$$

因为 $\varnothing \subseteq A$ 且 $A \subseteq A$，所以 $\varnothing, A \in \mathscr{P}(A)$。这说明了幂集不会是空集。特别地，空集 $\varnothing$ 的幂集 $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ 不是空集，它有一个元素 $\varnothing$。

以下是幂集的两个例子。

1.2.9 例 $\mathscr{P}(\{\text{真},\text{假}\}) = \{\varnothing, \{\text{真}\}, \{\text{假}\}, \{\text{真},\text{假}\}\}$，

$\mathscr{P}(\{0, 1, 2\}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$。

习题 1.2

1.2.1 判断下列集合是否是所指集合的子集。

(1) 西瓜，南瓜，苹果，荔枝，仙人掌。集合是水果。

(2) $\{1\}$，$\{2\}$，$\{1, 2\}$，$\{1, 3\}$。集合是 $\{1, \{1, 2, 3\}, 3\}$。

(3) $\{x \mid x^2+3x+2 = 0\}$，$\{x \mid 2x^2+3x+1 = 0\}$，$\{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ 且 } x \geq 5\}$。集合分别是 $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ 和 $\mathbf{Q}$。

1.2.2 任给 $a \in \mathbf{R}$，令 $\mathbf{Q}_a = \{x \mid x \in \mathbf{Q} \text{ 且 } x < a\}$。证明：

(1) 如果 $a \leq b$，则 $\mathbf{Q}_a \subseteq \mathbf{Q}_b$。

(2) 如果 $a \neq b$，则 $\mathbf{Q}_a \neq \mathbf{Q}_b$。

(3) 任给 $a \in \mathbf{R}$，都有 $\mathbf{Q}_a \neq \varnothing$ 且 $\mathbf{Q}_a \neq \mathbf{Q}$。

1.2.3 $a, b \in \mathbf{R}$。证明：如果 $a \leq c$ 且 $d \leq b$，则 $(c, d) \subseteq (a, b)$。

1.2.4 求 $\{1, \{1, 2\}\}$ 的幂集。

1.3 集合的交和并

两个集合的公共元素能够组成集合，如女大学生就是女人和大学生这两个集合的公共元素所组成的集合。两个集合的所有元素能够组成集合，如动植物就是动物和植物这两个集合的所有元素组成的集合，一般地引进以下概念。

1.3.1 定义 集合的交　集合 A 和 B 的公共元素组成的集合称为集合 A 和 B 的交，记为 $A\cap B$。$A\cap B$ 是由既属于 A 又属于 B 的元素所组成，所以有：

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}(\text{图 } 1.3.1)。$$

用属于关系表示就是：

$$x\in A\cap B \text{ 当且仅当}(x\in A \text{ 且 } x\in B)。$$

如果 x 不属于 $A\cap B$，则 x 必定不属于它们中的一个。反之如果 x 不属于它们中的一个，则 x 就不属于 $A\cap B$。所以：

$$x\notin A\cap B \text{ 当且仅当}(x\notin A \text{ 或 } x\notin B)。$$

如果 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 和 B 不交(图 1.3.2)。$A\cap B=\varnothing$ 是说：任给 x，都有 $x\notin A\cap B$，由 $x\notin A\cap B$ 的条件，$A\cap B=\varnothing$ 可表示为：

$$\text{任给 } x\text{，都有 } x\notin A \text{ 或 } x\notin B。$$

如果 $A\cap B=\varnothing$，则 A 的元素都不属于 B。反之如果 A 的元素都不属于 B，则 $A\cap B=\varnothing$。所以 $A\cap B=\varnothing$ 也可以表示为：

$$\text{任给 } x\text{，如果 } x\in A \text{ 则 } x\notin B。$$

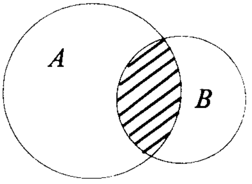


图 1.3.1　A∩B

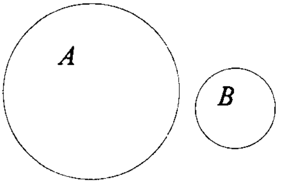


图 1.3.2　A∩B = ∅

1.3.2 定义　集合的并　集合A和B的所有元素组成的集合称为集合A和B的并，记为$A \cup B$。$A \cup B$是由属于A或属于B的元素所组成，所以有：

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\} \text{(图 1.3.3)。}$$

用属于关系表示就是：

$$x \in A \cup B \text{ 当且仅当}(x \in A \text{ 或 } x \in B)。$$

如果$x \in A \cup B$，则从$x \notin A$能得到$x \in B$。反之如果从$x \notin A$能得到$x \in B$，则$x \in A \cup B$。所以又有：

$$x \in A \cup B \text{ 当且仅当(如果 } x \notin A \text{ 则 } x \in B)。$$

如果$x \notin A \cup B$，则x既不能属于A也不能属于B。反之如果x既不属于A也不属于B，则$x \notin A \cup B$。所以：

$$x \notin A \cup B \text{ 当且仅当}(x \notin A \text{ 且 } x \notin B)。$$

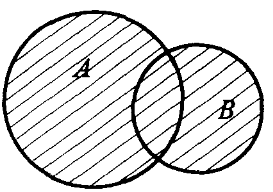


图 1.3.3　A∪B

我们通过例子来熟悉集合的交和并的概念。

1.3.3 例　菱形∩长方形 ＝ 正方形，

奇数∪偶数 ＝ 整数。

1.3.4 例　$\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$，

$\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$。

1.3.5 例　$(-1, 1] \cap (0, 2] = (0, 1]$，

$(-1, 1] \cup (0, 2] = (-1, 2]$。

一般地，如果$a \le c \le b \le d$，则

$(a, b] \cap (c, d] = (c, b]$，

$$(a, b]\cup(c, d] = (a, d],$$

理由如下：

任给 x，$x\in(a, b]\cap(c, d]$ 当且仅当 ($a<x\leq b$ 且 $c<x\leq d$)

当且仅当 $c<x\leq b$

当且仅当 $x\in(c, b]$。

任给 x，$x\in(a, b]\cup(c, d]$ 当且仅当 ($a<x\leq b$ 或 $c<x\leq d$)

当且仅当 $a<x\leq d$

当且仅当 $x\in(a, d]$。

1.3.6 例 A 是集合，令

$$B = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x \text{ 有性质}\phi\},$$

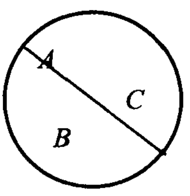
和

$$C = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x \text{ 没有性质}\phi\},$$

则有

$$B\cap C = \varnothing，B\cup C = A。$$

这是无矛盾律和排中律在集合论中的一种体现(图 1.3.4)。



$B\cap C = \varnothing$

$B\cup C = A$

图 1.3.4

集合的交和并都是用两个集合去形成一个新的集合，它们都称为集合的运算。

集合运算和包含关系有以下关系。

1.3.7 定理 A, B, C 是任意集合。

(1) $A \subseteq A\cup B$，$B \subseteq A\cup B$。

(2) $A\cap B \subseteq A$，$A\cap B \subseteq B$。

(3) 如果 $B \subseteq A$ 且 $C \subseteq A$，则 $B \cup C \subseteq A$。

(4) 如果 $C \subseteq A$ 且 $C \subseteq B$，则 $C \subseteq A \cap B$。

证 (1)(2)显然。它们是说两个集合都是它们的并的子集，两个集合的交是它们中任一个的子集。

(3) 任给 x，如果 $x \in B \cup C$，则当 $x \in B$ 时，由 $B \subseteq A$ 得

$$x \in A,$$

当 $x \in C$ 时，由 $C \subseteq A$ 得

$$x \in A,$$

所以在两种情况下都有

$$x \in A。$$

因此 $B \cup C \subseteq A$ (图 1.3.5)。

(4) 任给 x，如果 $x \in C$，则由 $C \subseteq A$ 得

$$x \in A,$$

由 $C \subseteq B$ 得

$$x \in B,$$

所以

$$x \in A \cap B。$$

因此 $C \subseteq A \cap B$ (图 1.3.6)。■

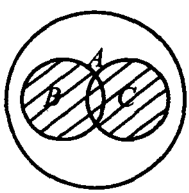


图 1.3.5

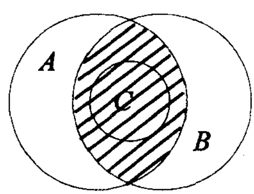


图 1.3.6

可以将定理 1.3.7 的(3)和(4)作以下推广。

1.3.8 定理 A_1, A_2, B_1, B_2 是任意集合。

(1) 如果 $B_1 \subseteq A_1$ 且 $B_2 \subseteq A_2$，则 $B_1 \cup B_2 \subseteq A_1 \cup A_2$。