[德] H·翁勃豪恩 著

自动控制工程（第二册）

吴启迪 黄圣乐 译

同济大学出版社

REGELUNGSTECHNIK II

TONGJI UNIVERSITÄT VERLAG

自动控制工程

（第二册）

［德］H·翁勃豪恩　著
吴启迪　黄圣乐　　译

同济大学出版社

内 容 提 要

《自动控制工程》原是德国波鸿鲁尔大学自动化专业教材，全书分三册。第一册为线性反馈控制系统；第三册为过程辨识、自适应控制和最优控制。本书为第二册，内容包括：状态空间中的连续系统，线性离散系统和非线性控制系统的分析与综合。

本书不仅详尽地讨论了通过极点配置来综合系统状态控制器的方法，同时也讨论了使用观测器重构状态的问题；书中还指出，在设计有限调节时间的控制系统时，可以利用数字控制系统中特别有代表性的特点；最后讨论了在实际应用中十分重要的波波夫稳定性判据。

本书可供理工科大学自动化专业作为教材，也可供工程技术人员参考。

责任编辑　李炳钊
封面设计　李志云

自动控制工程
（第二册）
［德］H·翁勃豪恩　著
吴启迪　黄圣乐　　译
同济大学出版社出版
（上海四平路1239号）
新华书店上海发行所发行
上虞科技外文印刷厂排版
吴县人民印刷二厂印刷
开本：787×1092　1/16　印张：11.5　字数：282 千字
1991年4月第一版　　1991年4月第一次印刷
印刷：1—2700　定价：2.70元
ISBN7-5608-0748-8/TP·14

前　　言

"自动控制工程"第二册将继续按照第一册所提出的宗旨，把控制工程问题作为一种方法论来进行论述。因此，素材的选择偏重于现代控制方式实现时所必需的分析和综合方法。主要包括研究状态空间控制系统的基本方法和数字控制系统的基本知识。作为控制工程师也还必须掌握表达非线性控制系统的方法，因为许多工程系统包含有非线性元件，而通常用的线性化在此一般不能再适用。本书材料囿于普遍使用的控制工程课程的范围，广泛适用于目前大学和工科大学工程科学学生使用。但本书并不仅仅是面向学生的，也可供在工业实践中工作的工程师使用，只要他们感兴趣于将控制工程方法应用来解决实际问题。本书内容除用于讲课外也考虑到用于自学。因此，本书内容根据教学法观点也进行了选择，为了加深理解引入了许多数值例子。

本册包括三个部分。第一部分讨论状态空间中的线性连续系统。在这部分中首先讨论了时域和频域中状态方程解的问题。然后在介绍了一些矩阵理论中的重要基本关系之后给出了单变量系统最重要的规范形式。作为系统特性，给出了能控性和能观测性概念，并由此过渡到详细描述状态空间中的综合问题。这里特别详尽地讨论了通过极点配置来综合单变量和多变量系统状态控制器的方法，同时也涉及到使用观测器重构状态的问题。

在第二部分首先讨论了线性离散系统描述的理论基础，在引入z变换之后定义了离散系统的传递函数。这可使离散系统的稳定性分析以较简单的方式进行。同时为离散控制系统综合问题的考虑提供了更充分的余地。在设计有限调节时间的控制系统时，可以利用数字控制系统中特别有代表性的特点。本部分最后讨论了状态空间中离散系统的处理方法。

第三部分讨论非线性控制系统的分析与综合。书中指出，对于非线性系统还没有像线性系统中那样普遍适用的理论，而只有一些通常用于分析稳定性的方法，本书仅讨论其中最重要的一些方法，例如描述函数和相平面表达是两个重要而经过考验的方法。相平面方法被证明对于继电器系统和简单时间最优控制系统的综合特别有效。李雅普诺夫稳定性理论可同时适用于线性与非线性系统，是一种相当普遍的研究方法，这里阐述了这一理论中重要的基本概念。最后讨论了在实际应用中十分重要的波波夫稳定性判据。

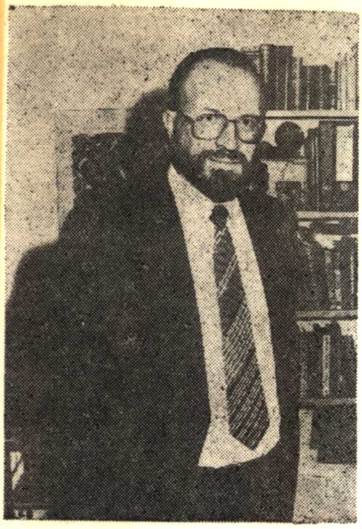
在第二册中，出于教学法的考虑，我的愿望也是，所选择的内容应使读者能够查找到所有重要的中间步骤和各自的线索。诚然，第一册是理解本册的前提。而且，读者应当具有矩阵运算的基础知识，也即工程师在数学基础课程中一般应学过的知识。

本书是在我从 1976 年起在波鸿鲁尔大学所讲授的同名课程讲义的基础上写成的。我的学生和同事一直鼓励我将讲义整理为教科书。在此我对他们表示感谢。我十分感谢我现在和

以前的同事蔡斯克博士、施密特博士、博提格、达斯图赫、鲁斯特、莱依、哈塞和西比尔斯基等先生，他们提出了改进的建议，仔细复核了例题，并审核了本书原稿，从而使本书达到了目前的水平。我也感谢菲维克出版社的合作。特别感谢施密特女士十分耐心和仔细地整理打印了全部印刷底版。我还要感谢福勃·勒希特小姐十分细致地绘制了插图。

H· 翁勃豪恩

1983年1月于波鸿



作　者　简　介

H·翁勃豪恩，1935生于斯图加特。1960年毕业于斯图加特理工学院机械工程系自动化专业。1961年至1962年在电子工程和数学领域完成专门进修。1961年至1974年在斯图加特理工学院任教。1964年获博士工程师学位。1969年获自动控制“Privatdozent”称号。1971年为斯图加特理工学院副教授。1975年受聘为波鸿鲁尔大学电子工程系电气自动化专业教授，曾任系主任。

H·翁勃豪恩在自动控制领域造诣很深，是大量学术论文的作者。现任C-TAT,OCAM，AT等有影响的自动控制杂志的编辑和顾问，是IFAC及其他国际自动化组织(VDE,GMR,DFG)成员、评委和主持人。

1986年，H·翁勃豪恩被聘为同济大学电气工程系顾问教授。

目　　录

1. 线性连续系统的状态空间法

从数学的角度来看，动态系统的状态空间表达在最简单的情况下就是将一个 n 阶微分方程化为一个等价的 n 元一阶微分方程组。从大约1957年以来，将这种方法应用于解决控制工程问题，使控制理论有了重大发展，于是控制理论就分为“现代”和“经典”两种方法。这个重大发展的原因主要在于当时首次问世的数字计算机，它使人们能够广泛地应用状态空间法，并使极为复杂的问题数字求解成为可能。尤其是在处理多输入-多输出系统、非线性以及时变系统时，状态空间法更能显示出其优越性。此外，这种系统描述法也能在时域中简明地表述动态最优化问题，这类问题部分可求得解析解，部分则只能求得数值解。

应用状态空间法的第二个重要的原因是动态系统状态这一概念的根本含义。从物理上看，动态系统的状态是由系统中储能元件所储能量所决定的，只要知道任意时刻 $t=t_0$ 系统的状态，则其后所有时刻的系统状况均可确定。当然，首先须知道外部作用量的影响，如已知输入量的时间特性。一个包含 n 个储能元件的系统，可由 n 个状态变量来表示，这 n 个状态变量可组成一个状态向量。而相应的 n 维向量空间，则称为状态空间，在此空间中的每一点则表示一个状态，而每个系统状态改变则可由部分轨迹来表示。与经典法相比，状态空间法使我们有可能对系统及其内部结构进行更深入的分析。

在本章内限于篇幅仅介绍状态空间法的一些最重要的基础知识。因此下面的讨论仅限于线性时不变系统。

1.1 状态空间表达

在给出线性连续系统的一般状态空间表达式之前，首先举一简单的例子说明如何将一个二阶微分方程变换成二元一阶微分方程组，并用一个方框图来进行解释。图1.1.1表示了一个机械阻尼振荡系统，m 为物体质量，d 为阻尼系数，c 为弹簧系数，$u(t)$ 为外加作用力。以位移 $y(t)$ 作为输出量，则可列出微分方程

$$m\ddot{y}(t)+d\dot{y}(t)+cy(t)=u(t), \tag{1.1.1 a}$$

可写成

$$\ddot{y}(t)=\frac{1}{m}[u(t)-d\dot{y}(t)-cy(t)], \tag{1.1.1 b}$$

由此式可得到系统方框图。图中对 $\ddot{y}(t)$ 进行二次积分，可得相应的反馈量 $y(t)$ 和 $\dot{y}(t)$。显然，可取积分环节的输出量为状态变量 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，并在式(1.1.1)中进行变量代换

$$x_1(t)=y(t) \tag{1.1.2 a}$$

$$x_2(t)=\dot{y}(t). \tag{1.1.2 b}$$

这两个状态变量也直接有其物理意义：$x_1(t)$为位移，表示弹簧势能的大小，而 $x_2(t)=\dot{y}(t)$则为速度，是物体动能的量度。至此，我们便可从方框图中或直接从方程式中得出要求的一阶微

分方程组

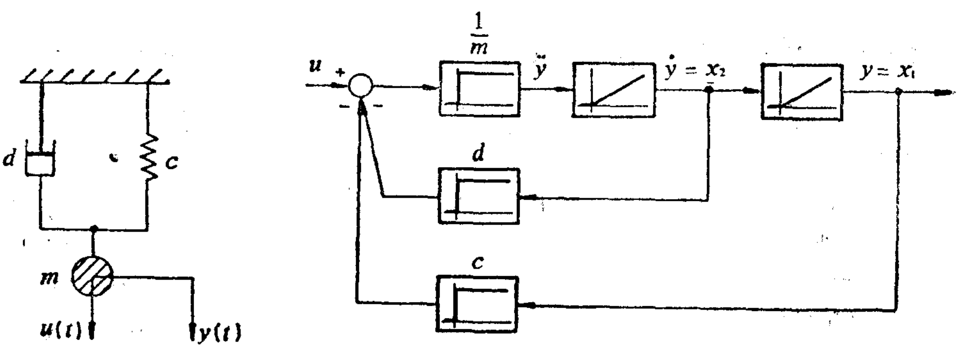


图 1.1.1 用二阶振荡微分方程表示的机械振荡系统(a)和其相应的方框图(b)

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t) \tag{1.1.3 a}$$

$$\dot{x}_2(t)=-\frac{c}{m}x_1(t)-\frac{d}{m}x_2(t)+\frac{1}{m}u(t). \tag{1.1.3 b}$$

若以矩阵形式来表示,则可得:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{c}{m} & -\frac{d}{m}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}u(t) \tag{1.1.4}$$

或者

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}u(t) \tag{1.1.5}$$

其中

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{c}{m} & -\frac{d}{m}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}.$$

输出量可由(1.1.2 a)式给出,并可用向量形式表示

$$y(t)=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) \tag{1.1.6}$$

其中

$$\boldsymbol{c}^T=[1\quad 0].$$

在此要说明的是，本节以后的讨论中，均以"小写黑体"字母表示向量，而以"大写黑体"字母表示矩阵,而矩阵或向量的上标 T,代表它们的转置。

在所讨论的例子中,我们涉及的是仅有一个输入 $u(t)$ 及一个输出 $y(t)$ 的系统,即单变量系统。对于有 r 个输入 $u_1(t),\cdots,u_r(t)$ 及 m 个输出 $y_1(t),\cdots,y_m(t)$ 的多变量系统,我们只要以向量 $\boldsymbol{u}(t)$,$\boldsymbol{y}(t)$(其元素为 $u_i(t)$,$y_i(t)$)代替 $u(t)$ 和 $y(t)$ 即可,这样就得到一个 n 阶线性时不变动态系统状态空间描述的一般形式如下:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{1.1.7 a}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \tag{1.1.7 b}$$

其中

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad 为状态向量$$

$$\boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \quad 为输入或控制向量$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \quad 为输出向量$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\ \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{bmatrix} \quad 为(n\times n)系统矩阵$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11}\cdots b_{1r} \\ \vdots \quad\ \vdots \\ b_{n1}\cdots b_{nr} \end{bmatrix} \quad 为(n\times r)输入或控制矩阵$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11}\cdots c_{1n} \\ \vdots \quad\ \vdots \\ c_{m1}\cdots c_{mn} \end{bmatrix} \quad 为(m\times n)输出或观测矩阵$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} d_{11}\cdots d_{1r} \\ \vdots \quad\ \vdots \\ d_{m1}\cdots d_{mr} \end{bmatrix} \quad 为(m\times r)联接矩阵$$

式(1.1.7 *a*)是一个(用矢量表示的)状态微分方程，或简称为状态方程.它表达了一个系统的动态特性。如果选输入向量 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{0}$，那么就可得齐次方程

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t), \\ \boldsymbol{x}(t_0)&=\boldsymbol{x}_0, \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

它表达了系统的固有特性,可称为自治系统。可见，系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 包含了反映系统固有特性的全部信息，例如系统稳定性的全部信息。相应地,控制矩阵 $\boldsymbol{B}$ 只能描述系统外部激励即输入量的作用方式。

式(1.1.7 *b*)称为输出方程或观测方程。从本质上看，此式通过 $\boldsymbol{C}$ 矩阵构成状态变量的线性组合(纯静态)，从而在输出变量与状态变量之间建立关系。某些系统还存在联结矩阵 $\boldsymbol{D}$，通过它把输入量的作用成比例地直接加到输出中去。这种系统也被认为是具有跃变能力的系统。

上述这些关系可从图 (1.1.2) 的方框图上或信号流图上明显看出，该图是按照方程(1.1.7*a*、*b*)得到的。

还必须指出,这种状态描述法对于线性时变系统也同样适用[1.1],只不过这时矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 中至少有一个元素是时间的函数。因此式(1.1.7 *a*,*b*)就变为更一般的形式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{1.1.9 a}$$

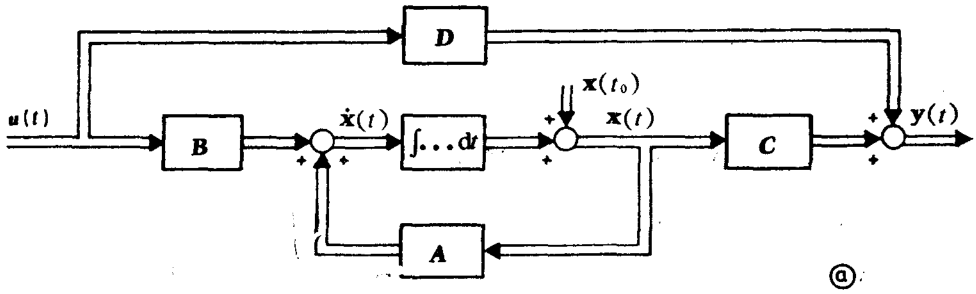
$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t). \tag{1.1.9 b}$$

在 3.7 节中我们将会用到线性或非线性，时不变或时变动态系统的最一般的状态描述形式。它同样也可分为状态方程和输出方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}_1[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t] \tag{1.1.10 a}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{f}_2[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t] \tag{1.1.10 b}$$

这里 $\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2$ 分别是任意的 n 阶和 m 阶线性或非线性向量函数。



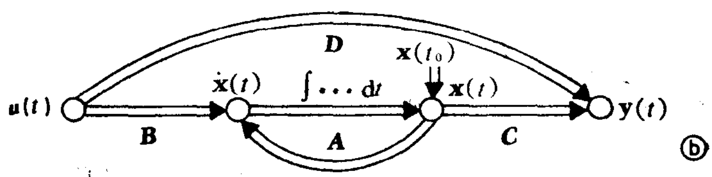


图 1.1.2　由方程(1.1.7 a、b)表示的多变量系统的方框图(a)和信号流图(b)

1.2　时域中状态方程的解

1.2.1　基本矩阵

首先考虑一个一阶系统，其状态方程是一标量微分方程

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bu(t) \tag{1.2.1}$$

设 $t_0=0$ 时的初始值为

$$x(0)=x_0$$

通过拉普拉斯变换可由式(1.2.1)得

$$sX(s)-x_0=aX(s)+bU(s),$$

并得到

$$X(s)=\frac{1}{s-a}x_0+\frac{1}{s-a}bU(s) \tag{1.2.2}$$

经拉普拉斯反变换，直接得到方程(1.2.1)的时域解：

$$x(t)=\mathrm{e}^{at}x_0+\int_0^t \mathrm{e}^{a(t-\tau)}bu(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2.3}$$

因此，对于式(1.1.7 a)所对应的向量状态方程的情况，可确定其解的表达具有相同的结构，而仅将标量用式(1.1.7 a)所对应的向量或矩阵来代替。经纯粹形式上的变化即可得

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2.4}$$

而现在的问题是如何定义矩阵指数函数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。当然，跟标量形式一样，它必须满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \tag{1.2.5}$$

如把这个 e 函数作为无穷级数用于矩阵函数(1.2.5)，这条件也应得到满足。

由此得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\boldsymbol{A}^2\frac{t^2}{2!}+\boldsymbol{A}^3\frac{t^3}{3!}+\boldsymbol{A}^4\frac{t^4}{4!}+\cdots\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k\frac{t^k}{k!}.\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

可以证明，此级数对所有矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在 $|t|<\infty$ 时绝对收敛。因此，可以把级数中的每一项对时间求导，得到：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2t+\boldsymbol{A}^3\frac{t^2}{2!}+\boldsymbol{A}^4\frac{t^3}{3!}+\cdots\\&=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\boldsymbol{A}^2\frac{t^2}{2!}+\boldsymbol{A}^3\frac{t^3}{3!}+\cdots\right)\\&=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\end{aligned}$$

式(1.2.5)的条件由此得到满足，而式(1.2.6)可作为函数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 的定义来使用。

为证明式(1.2.4)的有效性，可把其改写为

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0+\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

并考虑式(1.2.5)，可得其导数：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau+\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\&=\boldsymbol{A}\left[\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t).\end{aligned}$$

因此可以证明，式(1.2.4)的解系满足状态微分方程式(1.1.7 a)。

通常，式(1.2.4)也可写成

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1.2.7}$$

其中，矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \tag{1.2.8}$$

称为基本矩阵或转移矩阵，它在状态空间方法中起着很重要的作用。因为有了基本矩阵后，只要知道 $t_0=0$ 时系统的初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 及输入向量的时间函数，由式(1.2.7)可很方便地计算出系统在任何时刻 t 的状态。式(1.2.7)中的 $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0$ 一项为状态方程的齐次解，也可称为系统的固有运动或自由响应。式中的第二项为方程的特解，即由系统外部激励所决定的强迫响应。

应当注意，如果初始时刻 $t_0\neq0$，仅须对 (1.2.7)式作形式上的变形，即将自变量 t 换成 $t-t_0$，并把 t_0 作为积分下限：

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau。\tag{1.2.7 a}$$

例 1.2.1

已知状态方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$$

其相应的基本矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的解析式为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}(3\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-3t}) & (6\mathrm{e}^{-2t}-6\mathrm{e}^{-3t})\\ (-\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t}) & (-2\mathrm{e}^{-2t}+3\mathrm{e}^{-3t})\end{bmatrix}.$$

(求得 $\boldsymbol{\Phi}(t)$此形式的方法将在 1.4 节和 1.5 中阐述)。

现要由式(1.2.7)求出对于给定的初始条件,在阶跃激励 $u(t)=1,t\geqslant 0$ 时,状态向量的时间响应。首先可求出,$[\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}u(\tau)]$,这一项恰为矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)$ 的第二列,由此得到方程的解

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}(3\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-3t})(6\mathrm{e}^{-2t}-6\mathrm{e}^{-3t})\\ (-\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t}-2)\ (\mathrm{e}^{-2t}+3\mathrm{e}^{-3t})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$$
$$+\int_0^t\begin{bmatrix}6\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}-6\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}\\ -2\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}+3\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau$$

解矩阵相乘及积分后得

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}15\mathrm{e}^{-2t}-12\mathrm{e}^{-3t}\\ 6\mathrm{e}^{-3t}-5\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-3\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-3t}\\ \mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}1+12\mathrm{e}^{-2t}-10\mathrm{e}^{-3t}\\ 5\mathrm{e}^{-3t}-4\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}$$

如果设 $\boldsymbol{x}_0=\mathbf{0},u(t)=t,t\geqslant 0$, 同样也可确定该系统的斜坡响应。这时

$$\boldsymbol{x}(t)=\int_0^t\begin{bmatrix}6\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}-6\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}\\ -2\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}+3\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}\end{bmatrix}\tau\,\mathrm{d}\tau$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}t-\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t}-\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t}\\ \dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}.$$

1.2.2 基本矩阵的性质

由式(1.2.8)可知,对于时不变系统,其基本矩阵有如下一些性质:

a) $\boldsymbol{\Phi}(0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\cdot 0}=\boldsymbol{I}$(单位矩阵)。 (1.2.9)

b) $\boldsymbol{\Phi}(t)$必可逆,且下式成立:

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})^{-1}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(-t)}=\boldsymbol{\Phi}(-t).\tag{1.2.10}$$

c) $\boldsymbol{\Phi}^k(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}tk}=\boldsymbol{\Phi}(kt)$. (1.2.11)

d) $\boldsymbol{\Phi}(t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_2)=\boldsymbol{\Phi}(t_2)\boldsymbol{\Phi}(t_1)$

$$= e^{A(t_1+t_2)}$$

$$= \boldsymbol{\Phi}(t_1+t_2), \qquad (1.2.12\,a)$$

由此可推出

$$\boldsymbol{\Phi}(t_i - t_j) = \boldsymbol{\Phi}(t_i)\cdot\boldsymbol{\Phi}(-t_j) = \boldsymbol{\Phi}(t_i)\cdot\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_j)$$

因此有

$$e)\ \boldsymbol{\Phi}(t_2-t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1-t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t_2-t_0). \qquad (1.2.12\,b)$$

当给定的 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 不是解析形式时，上述性质将最能显出其在应用中的优点。例如，如果已确定 $t=T$ 时矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(T)$的数值形式，则借助于式(1.2.11)，至少可以很容易地求出任意离散时刻 $t_k=kT$ 时式 (1.2.7)的齐次解。

注意，对时变系统来说，也有一个由初始时刻 t_0 决定的基本矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$，它一般不能用指数函数表示。与时不变系统的 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 相似，它也有类似性质：

a) $\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_0) = \boldsymbol{I}$,

b) $\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_0) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0,t_1)$,

c) $\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t_2,t_0)$.

同样，由式(1.2.7)也可得时变系统的解

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

不过，这个方程几乎不可能再用解析法求解，而只能用数值法。

1.2.3 权矩阵或权函数矩阵

在研究控制系统时，我们不仅对状态变量随时间变化的过程感兴趣，而且也考虑输入量 $\boldsymbol{u}(t)$与输出量$\boldsymbol{y}(t)$之间的关系。

现在，还是再来看一下时不变系统，并选定 $t_0=0$ 为初始时刻。把式(1.2.4)中 的 $\boldsymbol{x}(t)$代入输出方程

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$

则得：

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}e^{At}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{C}e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t). \qquad (1.2.13)$$

现将$(m\times r)$矩阵

$$\boldsymbol{G}(t) = \boldsymbol{C}e^{At}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\delta(t) \qquad (1.2.14\,a)$$

或者

$$\boldsymbol{G}(t-\tau) = \boldsymbol{C}e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\delta(t-\tau) \qquad (1.2.14\,b)$$

代入方程(1.2.13)。由于 δ 函数的卷积性质，所以式

$$\int_0^t \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \qquad (1.2.15)$$

成立。因此由式(1.2.13)最终可得：

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}e^{At}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{G}(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau。 \qquad (1.2.16)$$

容易看出(特别是当 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{0}$ 时)，上式可看作杜哈美尔卷积积分的推广。所以矩阵

$$G(t)=C\Phi(t)B+D\delta(t) \tag{1.2.17}$$

也可看成是标量形式的权函数 $g(t)$ 的推广形式。因此 $G(t)$ 便称为权矩阵，也可称为 r 个输入量与 m 个输出量间的权函数矩阵。

例 1.2.2

系统的状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=[1\quad 0]x$$

$$x(0)=0,$$

其基本矩阵为

$$\Phi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix}(3e^{-2t}-2e^{-3t}) & (6e^{-2t}-6e^{-3t})\\ (-e^{-2t}+e^{-3t}) & (-2e^{-2t}+3e^{-3t})\end{bmatrix}.$$

由式(1.2.17)及 $D=0$，便可求出权矩阵

$$G(t)=[1\quad 0]\begin{bmatrix}(3e^{-2t}-2e^{-3t}) & (6e^{-2t}-6e^{-3t})\\ (-e^{-2t}+e^{-3t}) & (-2e^{-2t}+3e^{-3t})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=6e^{-2t}-6e^{-3t}.$$

由于这儿给出的是一个单变量系统，因此求出的权矩阵为一标量，与权函数 $g(t)$ 完全一致。

1.3 频域中状态方程的解

在频域中求解状态方程需要利用与时间有关的向量及矩阵的拉氏变换。为此需要用下述的一些表达形式

$$\mathscr{L}\{u(t)\}=U(s)\ \text{及}\ \mathscr{L}\{G(t)\}=G(s). \tag{1.3.1}$$

此处拉氏变换应理解为对矩阵中每个元素进行变换。

为求得转移矩阵 $\Phi(t)$，先对状态方程式(1.1.7 a)和式(1.1.7 b)进行拉氏变换：

$$sX(s)-x(0)=AX(s)+BU(s) \tag{1.3.2}$$

$$Y(s)=CX(s)+DU(s). \tag{1.3.3}$$

式(1.3.2)也可写为

$$(sI-A)X(s)=x(0)+BU(s)$$

或者

$$X(s)=(sI-A)^{-1}x(0)+(sI-A)^{-1}BU(s), \tag{1.3.4}$$

因为 $(sI-A)$ 非奇异，所以可逆。

上述这个关系为 $t_0=0$ 时式(1.2.7)的拉氏变换，因而是状态方程的频域解。右边第一项表示系统的自由响应(固有特性)，第二项表示系统的强迫响应。比较式(1.2.7)及式(1.3.4)，可直接求得转移矩阵

$$\Phi(t)=\mathscr{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} \tag{1.3.5}$$

或者