論二階混合型線性偏微分方程

F. 特 里 谷 米

科 學 出 版 社

內容提要

在應用和理論方面，混合型偏微分方程具有重要的意義。本書是第一部論述混合型方程的著作，著者對具有代表意義的所謂特里谷米方程的一個定解問題進行了深入而細緻的研究。近十年來，由於應用方面的迫切需要，混合型方程已成爲近代偏微分方程研究的主要方向之一，它所涉及的範疇十分廣闊。本書是這方面的研究的起點；因而是一部必讀的經典著作。

論二階混合型線性偏微分方程

Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto

原著者　特　里　谷　米

翻譯者　邱佩璋　王光寅

出版者　科　學　出　版　社

北京朝陽門大街117號

北京市書刊出版業營業許可證出字第061號

印刷者　上海啓智印刷廠

總經售　新　華　書　店

1957年3月第一版　書號：0722　印張：5 3/4

1957年3月第一次印刷　開本：850×1168 1/32

(滬)0001--4270　字數：150,000

定價：(11)1.20元

俄譯本譯者序言

意大利數學家 F. 特里谷米 (F. Tricomi) 的"論二階混合型線性偏微分方程" (1923) 是這一領域裏第一個有系統地進行研究的工作,我們願意把它以俄文譯本介紹給讀者;直到現在,它還不失爲基本的創作,是研究這類方程的數學家所必須精通的.

這篇文章論述了關於兩個獨立變數的方程,這方程的類型在平面的一部分內是橢圓的,而在另一部分是雙曲的,並且假定方程的係數是連續的,有足够多階的連續微商.

特里谷米證明,在相當"廣泛"的意義之下,這種類型方程,無論怎樣,它的極其廣泛的任意一個方程,都可化成形式

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}+$$
$$+c(x,y)z+d(x,y)=0. \tag{1}$$

以後,特里谷米專門研究了把方程 (1) 裏的低階項丢掉,而得到方程 (1) 的典型

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \tag{2}$$

有關這方程的某些結果,達布 (G. Darboux) 在他的"曲面論講義"裏就已得到.

特里谷米在他的文章裏表述了形如(1)的方程的邊界問題,對於這類型的方程,這種邊界問題所起的作用就像狄黎希萊 (Dirichlet) 問題對於橢圓型方程一樣.

所謂"特里谷米"問題,可以陳述如下:

給定域 D,圍成 D 的曲線是: 1)弧 L,弧 L 在"橢圓型"半平面 $y>0$ 之內,並且以"變型線" $y=0$ 上的兩點 A 和 B 爲端點; 2)特

徵線 AC 和 BC (當然在"雙曲型"半平面 $y<0$ 之內).

在橢圓型半平面的弧 L 和特徵弧 AC 上給定未知函數 z 的邊界值.

特里谷米在極廣泛的條件下，證明了所考慮的問題的解的存在性和唯一性.

問題的解決歸之於積分方程. 在此,下列奇異積分方程起着很大的作用:

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{*1}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{y-x}-\frac{1}{y+x-2xy}\right)\varphi(y)dy=f(x). \quad (3)$$

(這裏,積分取歌西的主值,這是用積分號上的星號來表示的).

特里谷米以明顯的形式解決了方程(3). 正如它所闡明的,方程有特徵值的連續譜;然而,在非齊次方程(3)的解的無窮簇中可以選出一個足以解決特里谷米問題的解來.

特里谷米把他的問題僅僅作為狄黎希萊問題的自然的推廣而提出的,至於這問題對數學物理的應用他什麼也沒有提. 而譯者發現特里谷米問題以及其它相似的問題,對氣體動力學,確切地說,對於亞聲速和超聲速的混合定常氣流的理論,有很重要的應用.

要說明這一點,我們回憶一下查普雷金 (C. Чаплыгин) 在他的論文[1] "論氣體射流" 裏給出了的平面的平行定常氣流的方程，其形式是:

$$K(\sigma)\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}=0, \quad (4)$$

這裏, ψ 是流函數, K 和 σ 是流速函數,這兩個流速函數在亞聲速時都是正的而在超聲速時都是負的; θ 是速度向量的傾斜角.

因此,方程(4)在亞聲速時是橢圓型的,在超聲速時是雙曲型的. 它可以化成方程(1).

查普雷金在"論氣體射流"裏對方程(4)研究了兩個問題，即，從平面壁的容器出來的自由射流的流程問題以及自由射流向薄板（或尖端)的撞擊問題. 這射流的寬度可以變成無限.

查普雷金證明，在流速到處保持低於聲速的時候，兩個問題都可以化成方程 (4) 的狄黎希萊問題. 然而，對亞聲速和超聲速混合流程，他沒有能提出這些問題. 譯者在論文“論亞聲速和超聲速的混合流程的查普雷金問題”[16]中證明了：從平面壁的容器裏出來的超聲速(在容器內的速度當然是亞聲的)的射流的流程問題可化成特里谷米問題. 充分寬的超聲速射流向尖端上撞擊的問題，在尖端之前有亞聲速的區域形成的時候，可以化成和特里谷米問題同類的新的問題[1].

現在來談下面的問題：在弧 L (見前面)靠近點 A 的一段上，已知 $\psi = 0$；在特徵弧 AC 上，也已知 $\psi = 0$，在弧 L 的其餘部分有線性齊次關係式

$$P \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} + Q \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \tag{5}$$

這裏 P, Q 是沿着弧的這一部分而變化的係數. 這個問題是齊次的，因此其解在至多相差一個常數因子的意義之下是確定的.

我們已經證明了這兩個問題的唯一性定理. 存在性定理還沒有得到證明；現在，對於這些問題我們還在繼續工作[2].

在另一篇論文“關於拉瓦 (Лаваль) 管的理論”[17]中，我們證明了，同時運用查普雷金和特里谷米的工作的結果和方法，可以得到有關拉瓦管之構造理論的具有實際意義的結果.

拉瓦管就是這樣的一種噴管，它起初是收縮的，然後擴張開來. 在每秒鐘氣體有一定的排量時，確切地說，有最大可能的排量時，在切面最狹的地方流速將等於相應的區域的聲速(所謂臨界速度). 在拉瓦管收縮的部分速度是亞聲的，在擴張的部分是超聲的. 在管子不擴張的部分，管內氣流速度總保持爲亞聲的.

拉瓦管是得到均勻定常超聲速氣流的唯一的工具，因此，在超聲速風洞，火箭和蒸汽渦輪裏，它起着基本的作用.

---

1) 也可看文章[27].

2) 關於近似的超聲速射流問題，А.А. Ильина 在她的尚未發表的一篇論文中，證明了存在性定理.

拉瓦管理論上一個基本問題是：對於已知形狀的噴管，要求最大排量的氣流，在一般情況下，這個問題還沒有解決．當噴管收縮部分的管壁是平面並且滿足某些補充條件時，在最簡單的情况下，該問題實質上無異於從具有平面壁的容器裏出來的超聲速射流的流程問題，而按照上面的論據可以化成特里谷米問題．在一般情况，要解決這問題必須先解決下列推廣了的特里谷米問題．

在橢圓型區域的弧 L 上以及在雙曲型區域內某個非特徵弧 AD 上給定邊界值，同時 AD 上任意一點的切線的傾角小於相應的特徵線的傾角（在此，假定方程已化成（1）式），D 點在特徵線 BC 上，域的周界乃是由弧 L, AD 以及特徵弧 BD 所構成．

甚至對於方程（2），這個問題也還沒有解決．

氣體動力學裏的另外一些最迫切的問題的解決和特里谷米一類問題也同樣有密切的關係．與此有關的特別是飛機的速度接近聲速時，圍繞機翼的流動的問題．

雖然特里谷米的工作被卓越的學者阿達馬（Hadamard）以及不久以前去世的霍姆格蘭（E. Holmgren）所注意，但是直到現在數學家們對於特里谷米所提出的有效的和有意義的問題並沒有給以充分的注意．

特里谷米以後，在這些問題上系統地工作的有意大利數學家瑪麗亞・切布拉麗奥（M. Cibrario）以及看來是受霍姆格蘭影響的瑞士數學家斯芬・格勒斯泰特（S. Gellerstedt）．

切布拉麗奥（見文獻）在一系列文章中對混合型微分方程的分類作了補充，並且解決了關於下列方程的某些問題：

$$\left.\begin{aligned} y^{2k}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=0,\\ x^{2k}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=0,\\ x^{2k+1}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=0.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

對於特殊形式的區域，霍姆格蘭簡化了下列方程的特里谷米問題的解法：

$$y^m \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \tag{7}$$

在此，他利用了這方程的基本解(具有對數的奇異性). 他明確地給出了這個基本解.

格勒斯泰特在他的博士論文（寫於 1935）裏解決了下列方程的特里谷米問題：

$$y^m \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - cz = F(x, y), \tag{8}$$

這裏的區域和特里谷米所取的一樣，並且他簡化了方程(2)的解法. 在以後的工作中，他繼續研究方程(7)，提出了並且解決了某些新的邊界問題.

在特里谷米和格勒斯泰特的研究中，橢圓型半平面的區域(區域的一部份邊界在變型線上)上的兩個邊界問題起着極其重要的作用，這兩個問題就是狄黎希萊問題和混雜邊界問題，在這混雜問題中，在變型線上給出解的法微商，而在周界的其餘部分給出解的數值. 在解決這第二問題時，這兩位作者都假定曲線 L（即位於半平面 $y>0$ 的區域的一部分邊界）沿特殊形式的曲線接近 x 軸. 在論文“論方程 $y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 之理論”[18]中，我們已能取消這個限制.

關於一般形式的方程(1)我們知道得還很少. 在我們的論文“論起始值在變型線上的橢圓——雙曲混合型方程的歌西問題”[15]中，解決了形如(1)的一般方程的在標題中所說過的問題. 在此，達布給出的關於方程(2)的公式得到了推廣.

和特里谷米第一篇基本的文章一起，我們收集了他的論文“再論方程 $y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$”[5]，“方程 $y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 的進一步研究”[4]以及他在 Bolgona 國際數學會(1928 年)上就同一題目所作的演

說的一部分[6]；這些論文包括着基本文章的重要的補充.

基本文章的前三章和第四章的一部分以及“再論方程…”的一部分是我自己譯的,其餘全是伊林娜 (A.A. Ильина) 翻譯出來而由我校訂的. 我對她參與這項工作表示感謝.

我們希望特里谷米文章的譯本的出版會引起較廣泛的數學家們以及空氣動力學家們對於這個極其有意義的並且迫切的題目的探討發生興趣.

在書末援引了混合型方程以及亞聲速和超聲速混合流程方面的參考文獻.

我們也在參考文獻中援引了一系列和特里谷米的工作無關而是論述亞聲速和超聲速混合流程的文章. 從其中一些文章中可以找到近似解，這些近似解可以化成聲波方程的解或者用疊代法 [(19),(20)] 得到，在另一些文章 [(21),(22),(23),(24)] 中，給出了一些特殊情況的解. 最後還有一些文章用幾何的以及定性的方法[(25),(26)]來研究流程. 同樣應該注意關於奇異積分方程的工作[28]，特里谷米正是把他的問題化成為這種奇異積分方程的研究.

目　　錄

第 三 章

方程(E)的某幾類特殊解的研究

第 四 章

對於橢圓半平面中的閉曲線的存在性定理

第 五 章

一般的存在性定理；並且將它化爲積分方程

第　六　章

存在性定理的證明所依歸的積分方程的變形

第　七　章

前一章中所獲得的積分方程的反演

引　言

到現在爲止，在二階偏微分方程理論中遵循着兩個不同的研究方向，在一方向中，假定所考慮的函數都是實的，而在另一方向中却不這樣假定.

特別是在數學物理方面的應用，其中第一個方向最爲重要，這個方向應歸功於黎曼 (Riemann)，他在他的著名的 "Inaugural dissertation"(1851年)中用一個現在看來是不嚴格的方法，證明了在給定的域的邊界上取預先給定的數值的調和函數的存在性和唯一性.

隨後出現了大量的論文[1]，在這些論文中，不僅在極廣泛的假設

---

1) 在 Encyklopaedie der Math. Wissen, **II**, No.5, 4—5 (1904) 中有下列二節討論到這個問題，在這二節中可以找到大量的參考文獻:

Burkhardt H. and Meyer W.F. "Potentialtheorie" **II**-A-76.

Sornmerfield A., "Randwertaufgabe in der Theorie deren Partieldifferentialgleichungen", **II**-A-7C.

也可參考，Volterra V. "Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux derivées Partielles, Protesseies á Stockholm", Upsala, 1906.

較後的工作有:

在橢圓型方程方面——

Picard. Ann Scientifique de l'École Norm. Seep. (3) **23**, 509—516 (1906).

在雙曲型方面——

Goursat. Ann. Fac. Toulouse (2)**5**, 405—445 (1903); (2)**6**, 117—144(1904); (3)**7**, 129—143(1909).

Picone. Rend Circ. Mat. Palermo **30**, 349—376 (1910 II); **31**, 133—139(1911 I); **32**, 188—190 (1911 II).

Fubini Atti Acc Torino **40**, 616—631 (1905).

在抛物型方面——

Holmgren. Acchiv foer Math. Aster Och Fysik **2**,**3**,**4**,**7** and Comptes Rendus Ac. Paris **145** (Dec 30, 1907).

Levi, Eugenio Elia, Ann. di Matem. (7) **14**, 187—264 (1907—1908).

之下充分嚴格地證明了黎曼的結果，而且，在適當限制下，黎曼的結果被推廣到滿足橢圓型方程的函數，而橢圓型方程要比拉普拉司方程普遍得多.

此外，類似地研究了確定二階方程(不僅是橢圓型而且是雙曲型和拋物型的二階方程)解的所需條件. 在這一分析裏，基本的著名的結果是畢加(Picard)和勒維(E.E. Levi)所找到的.

以後，我們只限於研究二個變數的情況. 上述傳統的三種類型(橢圓型，雙曲型和拋物型)遠不能包括所有二階線性偏微分方程. 在一般情况下，方程在平面的一部分有虛的特徵線(即橢圓型)，而在另一部分有實的特徵線(即雙曲型)，直到現在，對於這種一般類型的方程——我們稱爲混合型方程[1)]——的研究，就我所知，完全被忽視了，本文完全是研究這類方程的，我希望能用這篇文章來說明這種忽視是不合理的.

特別，在現在這篇文章裏，完全從黎曼的觀點出發，對一域上的混合型方程(此方程在該域的一部分是橢圓型的，在另一部分是雙曲型的)，要找出足以確定它在這一域上的解的條件. 爲此，在第一章之後，立刻仿照橢圓型方程論的發展過程，我便限於方程

$$y\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{E}$$

的研究，這方程可以看作混合型方程中的典型，猶如拉普拉司(Laplace)方程 $\Delta z=0$ 可以看作橢圓型方程的典型一樣.

對於方程 (E)，僅用上述工作中所採用的方法不能完全解决我們所說的問題，必須廣泛而系統地運用積分方程論這一分析裏的有力的工具. 在這類問題的研究中，如果沒有積分方程理論，就難以深入一步，我認爲這樣的斷言不會是錯誤的.

現在來作較詳細的介紹，首先，在第一章中先把混合型方程化爲標準型. 然後建立了某種情况下的一個唯一性定理，在這種情况中，

1) 這名字歸於伏爾泰拉，在上面所引的書的第一課裏他談到了這個方程.

在橢圓型半平面內的任意一根曲線以及其他的半平面內的一段特徵線所構成的某一開路徑上給出了方程(E)的解的數值.

解的唯一性既經證明,我們就轉而證明上述的解的存在性定理,爲此,我首先研究了方程(E)的某些重要的特解. 然後,就橢圓型半平面上的一個閉路的準備情況證明了解的存在性,這閉路以x軸(即方程的變型線)的一段爲它的一部分.

從而我找到了$\tau(x)$和$\nu(x)$之間的一個基本關係式,這裏$\tau(x)$和$\nu(x)$分别表示方程(E)的任意一個解以及此解對y的微商在x軸上所取的值. 由此,再運用一個證明唯一性定理時就已經得到的關係式,便得到一個關於$\nu(x)$的積分方程. 這積分方程的反演問題和確定方程(E)的滿足邊界條件的解的問題是等價的,關於這種解的唯一性已經證明了. 現在,一切乃歸之於證明所得到的積分方程的可解性. 最後二章便是研究這個問題,在其中第一章把方程化成某個二類弗雷德伙爾姆奇異方程(和尋常的積分不同,我們得到一個發散的積分,在歌西意義下我們考慮其主值),在最後一章對這個方程的解作了討論.

至於用的方法,我想提起注意的只是在第IV章裏的方法,用此方法我證明了關於包含x軸上一線段爲其一部分的特殊閉路徑的存在性定理. 實際上,這方法以非常簡單的形式給出了所要尋求的解,這方法的基礎在於把已給的邊界值所決定的任意一個函數展開成微分方程的特解的級數.

此外,最後一章第一節關於弗雷德伙爾姆奇異方程的詳細的討論有其獨立的興趣. 正如我們在那裏所指出的,讀者可以注意到這個討論使我們能彌補了最近研究這類方程的法國作家所遺留下的很大的缺陷.

最後,還要提起讀者注意的是:在第一章中,由於那裏討論的方程的特殊性,所研究的函數可能會產生奇點,這是我沒有加以仔細考察的. 這一章結果的眞正價值是在於:混合型方程,一般可以用實的變換化爲標準型. 換句話說,我並不否認在某種特殊情況進行這種

演化是有許多困難的，這些困難需要個別加以克服的.

這項研究中所得到的主要結果的簡述，已經以同樣的標題發表過[1].

1) Rend. R. Acc. dei Lincei (5) **XXX** (2), 495—498(2nd Sem. 1921).

第　一　章

化混合型方程爲標準形式

§ 1.1 兩個獨立變數的二階線性偏微分方程的分類

我們來研究二個獨立變數 x 和 y 的最普遍的二階線性偏微分方程

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+D\frac{\partial z}{\partial x}+$$
$$+E\frac{\partial z}{\partial y}+Fz+G=0, \tag{1.01}$$

這裏 $A, B, \cdots, G$ 是 x 和 y 的已知函數.

如果像平常那樣把變數 x 和 y 解釋作平面上點的笛卡兒直角坐標,那麽我們知道下面微分方程所代表的曲線具有重要的意義

$$A\,dy^2-2B\,dx\,dy+C\,dx^2=0, \tag{1.02}$$

把 $\frac{dy}{dx}$ 解出來,這個方程變爲兩個方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A},$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A}. \tag{1.03}$$

這兩個方程所定出的曲線稱爲方程(1.01)的特徵線[1],相應於這兩個方程,這些特徵線分爲兩個曲線簇,每個曲線簇有一個參變數,而且在平面上任意一點,一般地說,每簇必定有一根而且祇有一根曲線經

1) 關於特徵線的理論以及這個概念在非線性方程和階數高於二的方程方面的推廣可參閱 E. Goursat, "Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des second ordre", Paris (1896—98) 和 J. Hardmard, "Leçons sur la propagation des ondes,……"chs. IV 和 VII 及 Note 1. Paris (1903).