# 漫谈数学分析中的曲线与曲面

范秋君　编

高等教育出版社

# 漫谈数学分析中的曲线与曲面

范秋君　编

高等教育出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

漫谈数学分析中的曲线与曲面/范秋君编.—北京:
高等教育出版社,2001
ISBN 7-04-008481-3

Ⅰ.漫… Ⅱ.范… Ⅲ.①数学分析-曲线-数学理论②数学分析-曲面-数学理论 Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第55201号

漫谈数学分析中的曲线与曲面
范 秋 君 编

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | | |
| 社 址 | 北京市东城区沙滩后街55号 | 邮政编码 | 100009 |
| 电 话 | 010-64054588 | 传 真 | 010-64014048 |
| 网 址 | http://www.hep.edu.cn | | |
| 经 销 | 新华书店北京发行所 | | |
| 印 刷 | 北京人卫印刷厂 | | |
| 开 本 | 850×1168 1/32 | 版 次 | 2001年12月第1版 |
| 印 张 | 3.625 | 印 次 | 2001年12月第1次印刷 |
| 字 数 | 80 000 | 定 价 | 4.30元 |

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

# 前　言

曲线和曲面通常是几何学研究的对象，却与数学分析密切相关．本书不想过多去重复数学分析、微分几何等一些课程中有关曲线曲面的内容，而是应用微分几何、数学分析、拓扑学的有关知识综合阐述在曲线、曲面中与数学分析关系密切的两方面问题：一是对曲线与曲面概念作既直观有趣味性，又有数学严谨性的论述；并且给出常用的正则曲线、简单曲线、正则曲面的精确定义与它们的特性，及其在数学分析中的作用．二是对数学分析教材中关于曲线的求长，能求面积平面区域的边界曲线的特征，曲面面积、曲面定向性、空间区域作图法等几个专题作一介绍．

本书不仅向读者展现了各种各样、千姿百态的奇特曲线与用拓扑方法构造的各种形象的曲面，并从中去捕捉曲线、曲面的本质特性，而且回答了在数学分析中往往容易被人们所忽视而又应该谨慎思考的几个问题．例如，是否每条分布在有限范围内简单封闭曲线都可求长？在平面上任意一条封闭曲线是否总能把平面分成内外两个区域？如果它能分内、外两个区域，那末其中有界内部区域是否总存在面积？如何理解曲面定向的精确含义？曲面面积能否用它的内接多面形面积的极限来定义？

本书可作为大学生的课外读物，也可作为教师讲授数学分析课程时的教学参考资料．全书分为曲线与曲面两章，每章各节基本上自成体系，因此读者可以按章节顺序阅读，也可选择感兴趣的章节阅读．

在1993年8月举行的“分析与函数论教材建设组”的工作会议上，与会专家王斯雷、江泽坚、刘玉琏、陈文忠、张锦豪、秦卫平、徐森林诸教授审阅了本书的初稿，并进行了讨论．徐森林教授综合了专家们的意见，对本书提出详细而具体的修改意见，而后又在百

忙中对本书正式稿从内容到文字进行了认真细致的审查.在此,对上述诸位专家,特别是徐森林教授表示衷心的感谢.

欧阳光中教授以及全国高师数学分析研讨会副理事长邝荣雨和林安浩两位同志对本书的编写和出版给予很大支持.高教出版社文小西同志对本书的定稿与出版给予很大的支持.另外本书的编写还得到四川师大赵明方老师的帮助.在此,对他们一并表示衷心的感谢.

作　者

1994.12

# 目　　录

# 第一章　曲　　线

本章第 1 节从不同角度论述了曲线是什么,第 2 节介绍有关平面区域面积的两个问题,第 3 节讨论有关平面曲线可求长的几个问题.

## §1　曲线是什么

曲线是什么? 初一想,你会认为这是一个非常容易回答的问题,因为在日常生活中,到处都呈现着一条条形态不一的曲线,室内外悬挂着的电线、车轮滚出的痕迹、各种建筑物上的轮廓线等等.可以说,人们对曲线是再熟悉不过了,但当需要你用精确的语言描述曲线的一般特征时,你又可能会感到一时难以回答.本节就来回答这个问题.首先介绍历史上曲线定义的逐步演变过程,其次列举了在历史上出现的几条有趣的奇特曲线,最后介绍常用的两类曲线——正则曲线与简单曲线.

### 1.1　曲线概念的历史发展过程

自古迄今,很多数学家都在思考:曲线是什么? 力求得到一个精确的,便于进行数学研究的,具有一般性的曲线定义.本段着重介绍从欧几里得对平面曲线的直观描述到近代乌雷松用点集论描述的最一般的曲线定义这一历史发展的过程.

公元前 3 世纪,欧几里得在他的著作《几何原本》中,用直观描述的方法定义曲线为"有长无宽";曲线为"表面的边界",这样的定义在一定程度上反映出曲线的特征,但它对曲线的数学研究毫无用处.特别是当后来出现一些奇特曲线,例如出现了面积为正数的曲线,还出现了可以作为三个区域的公共边界的曲线,这些曲线的

出现，与人们通常直观认为的曲线应是它的面积为零无宽度的平面图形，而且曲线也应是且只是两个区域的公共边界不相符合．同时它也使人们对“无宽”及“边界”的含意模糊了，因此需要寻找曲线的确切定义．

笛卡儿(1596—1650)在平面上建立坐标系，使曲线与方程相对应，然后用代数方程来研究曲线，这时也就产生了笛卡儿的曲线定义：

**凡坐标适合方程 $F(x,y)=0$ 的点的全体称为这方程所确定的曲线．**

这定义包括了许多曲线，例如方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示以原点为中心、$R$ 为半径的圆周；方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 表示以原点为中心，半短轴长为 $b$，半长轴长为 $a$ 的椭圆周；以及所有的代数曲线．而且这个曲线定义已经摆脱了直观性描述，有了确切的数学含义，并能按此定义来研究曲线．然而在那时也发现有些曲线根本不能用方程 $F(x,y)=0$ 来表示，或即使可以用方程来表示，但是很难用它来研究曲线．例如阿基米德的螺线(见图 1.1)，它是某点沿半直线匀速运动，同时半直线又绕一定点以等角速度转动所画的曲线．如果取一个定点 $O$ 为极点，半直线的初始位置为极轴，$r$ 表示动点 $M$ 到点 $O$ 的距离，$\varphi$ 表示转动着的半直线与 $x$ 轴正向的夹角，这样得到阿基米德螺线的方程是：

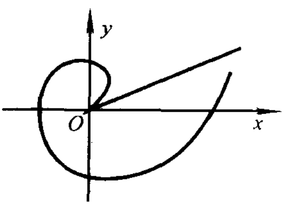

图 1.1

$$r=a\varphi,$$

且有
$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\arctan\frac{y}{x}.$$

把 $r$ 与 $\varphi$ 代入方程得阿基米德螺线的直角坐标方程：

$$\sqrt{x^2+y^2}-a\ \arctan\frac{y}{x}=0.$$

然而这个方程对于 $x$ 的每个数值都有无穷多个 $y$ 值与之对应,同样对于 $y$ 的每个数值也都有无穷多个 $x$ 值与之对应,所以难以用这个方程来研究阿基米德螺线.这又需要考虑曲线概念的新定义.

由于质点运动时描绘出曲线,即点动成线,因此很自然把曲线直观地定义为:曲线是点运动的轨迹,为把这个直观描述用数学式子表示出来,很容易想到轨迹上动点的位置是依赖于时间,于是就引入第三个变量时间 $t$,用 $t$ 的函数来表示曲线上点的坐标,

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t),$$

称此表示式为曲线的参数表示式.称 $t$ 为参数.

**例 1 阿基米德螺线**

按照上述阿基米德螺线的形成,取时间 $t$ 为参数,$v$ 为动点沿半直线移动的速度,$\omega$ 是半直线绕坐标原点,转动的角速度.曲线每点的坐标 $x$、$y$ 可表示为时间 $t$ 的函数

$$\begin{cases}x=vt\cos\omega t,\\ y=vt\sin\omega t,\end{cases}$$

这就是阿基米德螺线的参数表示式.

**例 2 圆周**(见图 1.2)

动点绕一定点作匀速转动,轨迹为圆周,动点与定点的距离为 $R$,定点为圆心,$\omega$ 为半径转动的角速度.如果取时间 $t$ 为参数,得到圆周的参数表示式是:

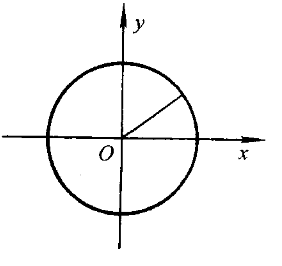

图 1.2

$$\begin{cases}x=R\cos\omega t,\\ y=R\sin\omega t.\end{cases}$$

有时也可以不取时间为参数，而用运动过程中其它一个几何量作为参数来表示运动中点的位置坐标．如若取动半径初始位置转过的角度 $\varphi$ 为参数，得圆周的另一参数表示式

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi. \end{cases}$$

**例3　摆线**(见图1.3)

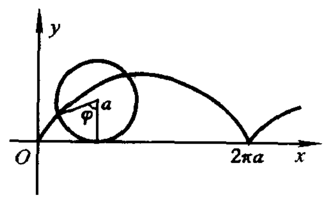


图1.3

半径为 $a$ 的圆，沿平面上一条直线作无滑动的滚动，圆周上一点的轨迹为摆线．

选直线为 $x$ 轴，取定点为使圆周上一点落在直线上的一个位置为原点．取参数为圆的滚动角 $\varphi$，得到摆线的参数表示式

$$\begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi), \\ y = a(1 - \cos\varphi). \end{cases}$$

在19世纪后半叶，基于这种用参数表示曲线的方法，法国数学家若尔当给出曲线的另一定义：

**如果平面上点的坐标是参数 $t$ 在区间[0,1]上所给定的连续函数**

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

**那末这些点的全体称为曲线．**

若尔当以最清晰的形式叙述的这个曲线定义与笛卡儿的曲线定义一样，有确切数学含义，而且一直被人们沿用到现在，只是他所定义的曲线又过分一般化了．1890年意大利数学家佩亚诺构造出一条曲线——佩亚诺曲线，他的这条由定义在[0,1]上的两个连续函数 $x = \varphi(t)$，$y = \psi(t)$ 表示的曲线却填满整个单位正方形，这就表明，出现在我们面前不是蔓延在平面上的一条“细长无宽”的曲线．因此又需要修正若尔当关于曲线的上述定义，使新定义的曲

线中，不出现类似于佩亚诺曲线的奇特情形.

19 世纪末当集合论发展起来的时候，许多数学对象都被看作是某种元素的集合. 同样，几何图形也被看作是具有某种性质的点的集合. 这样，许多数学问题都可以用集合论观点来论述. 特别，康托尔把曲线看作一个具有某种特性的平面点集，采用集合论来描述曲线的概念.

在论述用集合论来描述的平面上曲线的定义之前，有必要先引入集合论中某些概念，因为没有这些概念，就难以论述曲线的定义. 由于其中有些概念如开集、闭集、边界、极限点等在数学分析课程中已作介绍，不再重复. 这里重点论述连续统概念，它是以后考虑的基本对象，在曲线定义中起着根本作用.

**定义** 如果 $E$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中一个集合，把它任意分为两个非空子集 $A$ 和 $B$，至少在这两个子集的一个中，可以找到一点是另一子集的聚点，那末称集合 $E$ 是**连通集**. 否则称为**不连通集**.

由上述定义我们可以得到集合 $E$ 是不连通集的充分必要条件是：存在两个非空的闭集 $A$ 与 $B$，使得 $E=A\cup B$，且 $A\cap B=\varnothing$.

**例** $\mathbf{R}$ 上线段 $[a,b]$ 是连通集.

假设 $[a,b]$ 不是连通集，则存在两个非空闭集 $F_1$ 与 $F_2$，有 $[a,b]=F_1\cup F_2$，且 $F_1\cap F_2=\varnothing$.

假设 $b\in F_2$，那末 $F_1$ 必是由 $[a,b]$ 上小于 $b$ 的点所构成，$F_1$ 是有上界集，它必存在上确界，记为 $c$. $c$ 或属于 $F_1$，或者是 $F_1$ 的聚点，不论那种情形，$c$ 属于闭集 $F_1$.

如果 $c$ 不是 $b$ 点，那末大于 $c$ 的点便属于 $F_2$，因此 $c$ 是 $F_2$ 的聚点，因为 $F_2$ 是闭集，$c$ 属于 $F_2$. 如果 $c$ 点和 $b$ 点一致，$c$ 也属于 $F_2$. 所以任何情况下，$c$ 属于 $F_2$，则 $c$ 是 $F_1$ 与 $F_2$ 的公共点，这与 $F_1\cap F_2=\varnothing$ 矛盾. 于是证得线段 $[a,b]$ 是连通集.

根据连通集的定义可以证得全直线 $\mathbf{R}$、$\mathbf{R}$ 上任何区间、正方形、圆等等都是连通集.

由一点所构成的集合与空集都被认为是连通集.

**定义** $E$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中一个集合,如果它的一切无穷子集在 $E$ 中都有聚点,那末称 $E$ 为**列紧集**.

用闭区间套原理可以证明:线段$[a,b]$是列紧集.用类似方法也可证得正方形是列紧集.

在集合论中有下面结果:

$\mathbf{R}$、$\mathbf{R}^2$ 上的集合 $E$ 是列紧集的充要条件是$E$ 为有界闭集.

**定义** 称连通而又列紧的集合为**连续统**.

由上述定义可知,直线段、正方形都是连续统.另外根据点集论中结果:连续统的连续映象都为连续统.我们能证明像圆周、椭圆、双纽线等这样的集合都是连续统.

现在把思路回到论述曲线的定义上来,考虑一个平面点集必须具有什么样的一种性质,才能将它认作是位于平面上的一条曲线?

分析我们所熟悉的像直线段、圆周、椭圆、双纽线等这些平面曲线,把它们都看作是一个平面点集,由直观地看出,存在着共有特性:它们分布在平面上,都是连成一整段,不分割成一些孤立部分;另外,曲线上每个点又都不是孤立的一个点,与它任意接近处总还有曲线上的其它点.这些特征正从几何直观表明它们都是平面上的连续统.因此,自然而然地要在连续统中去找我们所要叫做平面曲线的东西.然而,如果定义曲线为平面上的连续统,这样在平面曲线中就要包括像正方形、圆盘等这种连续统,显然这是我们所不能承认的.那末平面上的连续统还应具有什么特性才能被称为是平面曲线?进一步分析圆盘和圆周、正方形和它的边界折线段的区别,圆盘、正方形内部的点在它的邻近都是集合的点,而圆周、折线段上的点在它的邻近处既有圆周、折线段上的点,也都有不属于它们的点.

综合以上分析,就有康托尔给出的曲线定义:

如果连续统 $c$ 具有以下性质:**对连续统 $c$ 的任意一点 $x$,如果任意给定正数 $\varepsilon$,在平面上总可以找到一点 $y$,它不属于连续统 $c$,**

而且与点 $x$ 的距离小于 $\varepsilon$，则称连续统 $c$ 为平面曲线. 我们把这个定义下的曲线称为**康托尔曲线**.

根据这个定义可直接推出：连续统 $c$ 为康托尔曲线的充分必要条件是：连续统 $c$ 不包含任何开子集.

显然，直线段、圆周、双纽线以及许多常见的平面曲线都是康托尔曲线. 而且康托尔定义下的曲线已排除了像佩亚诺曲线这种奇特曲线，但它也包括了让人们难以接受的有奇特性的曲线，其中一个精彩的例子就是波兰数学家谢尔平斯基所作的曲线，称它为谢尔平斯基地毯.

康托尔曲线定义与若尔当曲线定义同样具有确切的数学含义，而且成为后来研究曲线的依据. 然而，康托尔的曲线定义却不能搬到空间中来，即不能用作空间曲线的定义. 很显然，正方形作为空间一个点集，它不包含任何开集，且是一个连续统，但我们不能认为它是一条空间曲线，这需要人们去考虑，不管是对平面曲线还是空间曲线，能够有一个用点集论统一描述的曲线定义. 苏联数学家乌雷松(1898—1924)在 20 世纪 20 年代完成了这个工作，给出曲线的最一般定义.

乌雷松仍用点集论来描述曲线的定义，不过他是从另一个角度描述曲线作为点集所具有的特性，即考虑曲线的所谓量度数——维数. 一般认为在平面上或空间中的直线段、圆周都是 1 维的，正方形不管是在平面上还是在空间中都是 2 维的.

这里我们不去介绍一般维数概念，只给出点集的 1 维度的确切含义. 我们观察在直线段上任取一点 $x$，作这点的一个任意小邻域，此邻域是一个开集，如果 $x$ 是线段的内点，则此开集的边界是由两个点所构成. 如果 $x$ 是线段的端点，则此开集的边界是由一个点所构成. 于是说明直线上任一点的任一邻域的边界是不包含多于一个点所构成的连续统. 同样圆周上的任一弧段的边界也是两个点. 假设在圆周上任取一点，这点的任何一个小邻域是一段小开弧段，它的边界是由两个点构成，所以也是不包含多于一个点所

构成的连续统.可是圆盘与正方形却与它们不同,在圆盘内或正方形内任取一点,作这点的任意小一个邻域,这邻域是一个小开圆,它的边界是圆周,显然此圆周是包含多于一个点所构成的连续统.由此我们定义1维连续统为:

设点 $x$ 是连续统 $c$ 的一个点,如果存在点 $x$ 的一个任意小邻域,此邻域的边界不包含 $c$ 中任何由多于一点所构成的连续统,那末称连续统 $c$ 在点 $x$ 具有**维度1**.换句话说,如果对任意给定正数 $\varepsilon$,存在包含 $x$ 的开集,其直径小于 $\varepsilon$,而其边界不包含 $c$ 中任何多于一点所构成的连续统,那末称连续统 $c$ 在点 $x$ 具有维度1.

如果连续统 $c$ 在它的每一点都是1维的,称连续统 $c$ 具有维度1.

由上所述可见,线段、圆周都是1维连续统.现在我们可以给出乌雷松关于曲线的定义:

**1维连续统称为曲线**.

在乌雷松的曲线定义下,不论是平面上还是在空间中的直线段和圆周都是曲线,而正方形既不是平面曲线,也不是空间曲线.

至此,我们完成了陈述曲线概念的历史发展过程,那末不同的曲线定义所包含的曲线是否相同呢?答案是否定的,具体地说,有以下结论:

1° 如果若尔当曲线不是一条广义佩亚诺曲线,它必是一条康托尔曲线,这是因为我们可以证明若尔当曲线是一个连续统.(证明可参看鲁金著的《实变函数论》)反过来,康托尔曲线不一定是若尔当曲线.观察图1.4(a)与1.4(b)两条曲线.图1.4(a)中曲线是由一个圆周 $C$ 和在它里面旋转而无限地接近 $C$ 的螺线所组成.图1.4(b)中曲线是当 $x\neq0$ 时由方程 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 所确定的曲线再加上 $y$ 轴上一个闭线段$[-1,1]$.这两条曲线都是康托尔曲线,但不是若尔当曲线.严格的论证需要较多点集论知识,这里不再赘述,下面对图1.4(a)中曲线,粗略说明它不是若尔当曲线.假设它是若

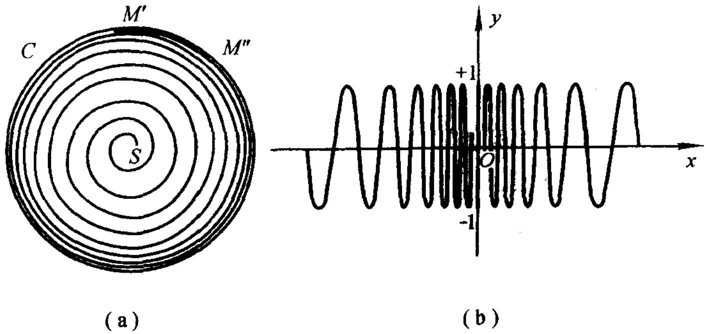


图 1.4

尔当曲线,其参数表示式为:$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$,其中 $\varphi(t)$、$\psi(t)$在$[0,1]$连续.由于闭集在连续映射下的逆象为闭集,所以圆周 $C$ 上的所有点的集合必与$[0,1]$中一闭集 $F$ 相对应,闭集 $F$ 不等于$[0,1]$,那末必有邻接 $F$ 的开区间$(a,b)\subset[0,1]$,它和螺线 $S$ 上点相对应.但点 $a$ 与点 $b$ 却与圆周 $C$ 上点相对应,如果现在让$(a,b)$内点 $t$ 趋于 $a$ 或 $b$,它的对应点$(\varphi(t),\psi(t))$应沿螺线趋向于圆周 $C$ 上的点,并以此点为极限,但由于函数 $\varphi(t)$、$\psi(t)$的连续性,这极限点属于螺线,由此产生矛盾.对图 1.4(b)中的曲线有类似情况,所以它们仍不是若尔当曲线.(严格证明可参看[1]中第四章)

2° 一般地,所有康托尔曲线都是乌雷松曲线,乌雷松的平面曲线都是康托尔曲线.

## 1.2 奇特的曲线举例

历史上在探讨曲线概念定义的过程中,出现了一些奇特的曲线,这些曲线确是某一种定义下的曲线,但它们的形态与奇妙的性质却让人感到惊讶,也难以想象它们是一条曲线.这里介绍几条,与君共赏.

## 一、佩亚诺曲线[1]

人们往往把平面曲线看成是点运动的轨迹,而且想象这条轨迹一定是蔓延在平面上的一条细长线条的形象,当若尔当给出曲线定义后,意大利数学家佩亚诺却指出:可以在区间[0,1]上选取这样的两个连续函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$,使坐标 $x$ 与 $y$ 适合方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

的全部点填满一整个正方形(包括其内点和边界点).这就是说,摆在我们面前的确是符合若尔当曲线定义的一条曲线,但这条曲线的点却填满整块正方形区域,已不是我们想象中一条"细长"的线条形象.

现在我们来看这条填满整个正方形的佩亚诺曲线是如何做出来的,它又怎样建立区间[0,1]到单位正方形的连续满映射.

事实上,佩亚诺曲线是分布在正方形内的一列曲折的密纹迷宫形的折线列的极限曲线.我们首先来作这一无穷多条折线列.

设 $Q$ 是单位正方形,把 $Q$ 分成四个相等正方形,记为 $Q_1^1$、$Q_2^1$、$Q_3^1$、$Q_4^1$,它们的下标号的选择必须使每一正方形与其前后相邻,即与其下标数相差 1 的两个正方形分别都有一条公共边(见图

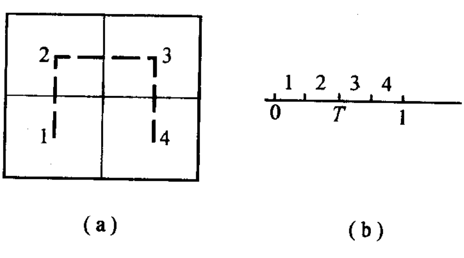


图 1.5