硕士研究生入学数学考试

焦点概念·性质·百题百分

徐 兵 编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书是针对全国硕士研究生入学数学考试中常见的高等数学的基本概念、基本性质，结合相关试题而编写的，以是非题形式出现。书中不仅解说了例题的正确与否，也给出了相关分析或反例。在大部分题目说明中，列举了近年来研究生入学考试中出现的相关试题，指出这些题目的求解关键是明确概念的哪些要素，或性质的哪些特征，或没有正确理解性质而导致的错误等。

本书是为参加硕士研究生入学数学考试的考生编写的，关于高等数学中的基本概念与基本性质的一本考试辅导书，适用于数学(一)至数学(四)的各类考生。本书有助于考生理解高等数学中的概念与性质，有助于考生提高研究生入学数学考试成绩。

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学数学考试焦点概念性质百题百分/徐兵编著. —北京:北京航空航天大学出版社,2001.10

ISBN 7-81077-098-5

Ⅰ.硕…　Ⅱ.徐…　Ⅲ.高等数学　研究生　入学考试—自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 056995 号

硕士研究生入学数学考试

焦点概念·性质·百题百分

徐　兵　编著

责任编辑　郑忠妹

责任校对　陈　坤

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100083)　发行部电话:(010)82317024　传真:(010)82328026

http://www.buaapress.com.cn

E-mail:pressell@publica.bj.cninfo.net

河北省涿洲市新华印刷厂印装　各地书店经销

*

开本:787×960　1/16　印张:6　字数:131 千字

2001 年 10 月第 1 版　2001 年 10 月第 1 次印刷　印数:5 000 册

ISBN 7-81077-098-5/O·007　定价:9.80 元

前　　言

提高全国硕士研究生入学数学考试成绩是考生的普遍愿望，正确地把握复习方向是提高成绩的重要环节。

通过对研究生入学考试试卷的分析，作者认为考生中失分的首要因素就是对基本概念和基本性质不清楚，特别是考生的填空题与选择题得分偏低，与命题的期望值相差较大。针对这个问题，作者分析了近十年研究生入学考试数学试题中关于高等数学的题目，针对概念与性质的题目对考生的影响作了研究，从中得出结论：

考生提高考试成绩的首要环节是理解基本概念，明确概念的要素，认清其实质；理解基本性质，明确性质的基本特征。

为此针对高等数学中的基本概念、基本性质编写了一些是非题，并解说了命题的正确与否，也给出了相关分析或反例。在一些题目中又加了说明，列举了近年来考试中的相关试题，指出这些题目的求解关键是明确概念或性质的哪些特征，或没有正确使用性质而导致的错误等。

为了使考生有感性认识，请先看几个试题的分析：

例 1(97303)[①]　若函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ ______。

此题求解的关键是明确：如果 $f(x)$在$[a,b]$上可积，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示一个确定值。因此只需令 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A$，则所给表达式可以化为 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+A\sqrt{1-x^2}$。将其两端在区间$[0,1]$上积分，可得

$$A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+A\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

积分后解出 A，可得 $f(x)$表达式。

如果又能明确定积分的几何意义，注意到被积函数$\sqrt{1-x^2}=y$ 可以化为 $x^2+y^2=1$，因此 $y=\sqrt{1-x^2}$表示圆心在原点的半径为 1 的上半圆周，可知 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 表示半径为 1 的$\dfrac{1}{4}$圆的面积，$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$，则问题易解。

例 2(00103)　$\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=$ ______。

此题可以利用定积分换元法求解，但是由于是填空题，如果注意到 $y=\sqrt{2x-x^2}$可表示为

---

① 97303 表示 1997 年研究生入学考试数学(三)试题，分值为 3，其余类推

$$(x-1)^2+y^2=1$$

可以知道$\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$表示半径为 1 的$\frac{1}{4}$圆的面积,易知积分值为$\frac{\pi}{4}$。

例 3(99303) 设 $f(x,y)$连续,且

$$f(x,y)=xy+\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中 D 是由 $y=0,y=x^2,x=1$ 围成的区域,则 $f(x,y)$等于

A. xy B. $2xy$ C. $xy+\frac{1}{8}$ D. $xy+1$

此题求解的关键是明确:若 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上可积,则$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$表示一个确定的常数。此值依赖于区域 D 与被积函数,不依赖于积分变元。

设$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$,可知 $f(x,y)=xy+A$,将上式两端在区域 D 上积分,可解得 A,进而求出 $f(x,y)$。

由上述试题可以得到启发,对于极限、三重积分、曲线积分、曲面积分的类似问题都可以仿上述方法解决。而且还可以推广到复杂的问题,如

1° 已知 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在,且 $f(x)=x^3+2\lim\limits_{x\to1}f(x)$,则 $f(x)=$ ______。只需令 $A=\lim\limits_{x\to1}f(x)$,问题化为:$f(x)=x^3+2A$,两端当 $x\to1$ 时,取极限,可求 A。问题可解。

2° 设 $f(x)=x^3+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int_1^2 xf(t)\mathrm{d}t$,则 $f(x)=$ ______。只需令 $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,$B=\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t$。则 $f(x)=x^3+A-2Bx$,将上式两端分别在[0,1]与[1,2]上取定积分,可得到两个关于 A,B 的一次方程,解联立方程可得 A,B,从而问题可解。

3° 设 $f(x,y)=xy+\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\iint_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D_1 为 $y=0,y=x^2$ 与 $x=1$ 围成的区域,D_2 为 $y=0,y=x$ 与 $x=1$ 围成的区域,则 $f(x,y)=$ ______。仿 2° 可令 $A=\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$B=\iint_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,问题可解。

由上面这几个例子可以领悟到要求考生理解概念的意义。下面的例题中还可以领悟到要求考生能明确定理或性质的前提条件的意义。

例 4(01103) 设函数 $f(x,y)$在点(0,0)附近有定义,且 $f'_x(0,0)=3,f'_y(0,0)=1$,则

A. $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$

B. 曲面 $z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$的法向量为(3,1,1)

C. 曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为(1,0,3)

D. 曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$(3,0,1)$

这个试题包含了三个性质：

函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$存在偏导数，并不一定能保证$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处可微分。因此A不正确。

函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$不可微分，则曲面$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$可能不存在切平面，可知B不正确。

一元函数$y=f(x)$在点x_0处可导，则曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$必存在切线，且切线斜率为$f'(x_0)$，切线向量为$(1,f'(x_0))$，可知C正确，D不正确。

例5(98105)　设正项数列$\{a_n\}$单调减少有下界，且$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，试问级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$是否收敛，并说明理由。

所给问题虽然为解答题，但求解的关键是明确判定交错级数收敛性的莱布尼茨定理的条件。由于$\{a_n\}$单调减少有下界，因此数列$\{a_n\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，由于$a_n\geqslant 0$，可知$a\geqslant 0$。若$a=0$，由莱布尼茨定理可知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛，与题设矛盾，因此$a>0$(这是求解本题的关键)。

例6(1)(98303)　设周期函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，周期为4，又$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{x}=-1$，则曲线$y=f(x)$在点$(5,f(5))$处的切线的斜率为______。

(2)(00207)　已知$f(x)$是周期为5的连续函数，它在$x=0$的某邻域满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+a(x)$$

其中$a(x)$是当$x\to 0$时比x高阶的无穷小，且$f(x)$在$x=1$可导，求曲线$y=f(x)$在点$(6,f(6))$的切线方程。

上述两题求解的关键是明确：可导的周期函数的导函数也是周期函数。

相仿，试题中曾出现过连续的周期函数的原函数周期性问题，以及诸如定积分、二重积分、三重积分、曲线积分、曲面积分的对称性问题，及关于坐标轮换的对称性问题等。

诸如前述各试题解题中，某些概念、性质或为解题的关键，或为解题的重要因素。作者在本书中将它们编为是非题，并给予适当解说。

本书中的有些命题可以进行纵向类比，以加强对知识的掌握。

作者希望本书能给考生以帮助，增强自信心，提高考生的数学成绩。

作　者

于北京航空航天大学

2001年7月

目　录

第一部分　是非题(判定命题正确与否)

一、函数、极限与连续性

命题 1　若 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 互为反函数,则 $f[g(x)]=x$。

命题 2　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 表示一个常数。

命题 3　若当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,$f(x)$ 为无界变量,则当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,$f(x)$ 必定为无穷大量。

命题 4　两个无穷大量之和必定为无穷大量。

命题 5　若 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 为无穷大量,则当 $x\to x_0$ 时,$e^{f(x)}$ 必定为无穷大量。

命题 6　若 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n\cdot v_n)=0$,则必定有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=0$。

命题 7　若对任意给定的 $\varepsilon>0$,数列 $\{u_n\}$ 中仅有有限多项不满足 $|u_n-A|<\varepsilon$,则数列 $\{u_n\}$ 必定以 A 为极限。

命题 8　若 $x\to x_0$ 时,$\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,且 $\gamma\to 0$,则必有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha-\beta}{\gamma}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'-\beta'}{\gamma}$$

命题 9　若数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A,则其任意子数列 $\{u_{n_i}\}$ 必定收敛于 A。

命题 10　若单调数列 $\{x_n\}$ 的某一子数列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于 A,则该数列必定收敛于 A。

命题 11　若数列 $\{x_{2n}\}$ 与 $\{x_{2n-1}\}$ 都收敛于 A,则数列 $\{x_n\}$ 必定收敛于 A。

命题 12　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$。

命题 13　若 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

命题 14　设对任意的 x,总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 必定存在。

命题 15　若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续,则必有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。

命题 16　若 $f(x)$ 在点 x_0 连续,则 $|f(x)|$ 在点 x_0 也连续。

命题 17　若 $|f(x)|$ 在点 x_0 连续,则 $f(x)$ 在点 x_0 也连续。

命题 18　初等函数在其定义域内必定为连续函数。

二、一元函数微分学

命题 19　导数的几何意义为:若 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$

处有切线，且切线的斜率为 $k=f'(x_0)$。

命题 20 若 $y=f(x)$在点 x_0 连续，则 $y=f(x)$在点 x_0 必定可导。

命题 21 若 $y=f(x)$在点 x_0 可导，则 $y=f(x)$在点 x_0 必定连续。

命题 22 初等函数在其定义区间内必定可导。

命题 23 若 $f(x)$在点 x_0 可导，则$|f(x)|$在点 x_0 必定可导。

命题 24 设 $f(x)$在点 $x=a$ 处可导，则$|f(x)|$在点 $x=a$ 不可导的充分条件是 $f(a)=0$，且 $f'(a)\neq 0$。

命题 25 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) = A$，则必定有 $f'(x_0) = A$。

命题 26 若 $f(x)$为(a,b)内的单调函数且可导，则 $f'(x)$在(a,b)内也为单调函数。

命题 27 若 $f'(x)$为(a,b)内的单调函数，则 $f(x)$也为(a,b)内的单调函数。

命题 28 若 $f(x)$为$(-a,a)$内的可导的奇(偶)函数，则其导函数 $f'(x)$也为$(-a,a)$内的奇(偶)函数。

命题 29 若 $f(x)$是以 T 为周期的可导函数，则其导函数 $f'(x)$也是以 T 为周期的函数。

命题 30 拉格朗日微分中值定理 $f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$，其中 ξ 必定为 x 的连续函数。

命题 31 若 x_0 为 $f(x)$的极大值点，则必定存在 x_0 的某邻域，在此邻域内，$f(x)$在 x_0 的左侧单调增加，在 x_0 的右侧单调减少。

命题 32 若 $f(x)$在点 x_0 有直至 n 阶导数，且

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

而 $f^{(n)}(x_0)\neq 0(n>2)$。则当 n 为偶数时，x_0 为 $f(x)$的极值点；当 n 为奇数时，x_0 不为 $f(x)$的极值点。

命题 33 若 $f(x)$在点 x_0 有直至 n 阶导数，且

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

而 $f^{(n)}(x_0)\neq 0(n>2)$。则当 n 为奇数时，点$(x_0,f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$的拐点。

命题 34 函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内的极大值必定大于 $f(x)$在(a,b)内的极小值。

命题 35 若 $y=f(x)$在点 $x=a$ 可导，则曲线 $y=f(x)$的过点(a,b)的切线方程为

$$y-b=f'(a)(x-a)$$

命题 36 若在(a,b)内有 $f'(x)>0$，则在(a,b)内 $f(x)$必定为单调增加函数。

命题 37 若 x_0 为 $y=f(x)$的极值点，则必有 $f'(x_0)=0$。

命题 38 若在(a,b)内 $y''>0$，则曲线 $y=f(x)$在(a,b)内为上凹的。

命题 39 若 x_0 为函数 $y=f(x)$的极值点，则点$(x_0,f(x_0))$必定不为曲线 $y=f(x)$的拐点。

三、一元函数积分学

命题 40　若 $f(x)$在$[a,b]$上可积分,则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示一个常数值,这个值与区间$[a,b]$有关,与函数 $f(x)$有关,但与积分变元无关。

命题 41　定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义为:其值为介于曲线 $y=f(x)$、x 轴与直线 $x=a$,$x=b$之间的曲边梯形的面积。

命题 42　定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的物理意义为:其值为

1° 在外力 $f(x)$的作用下,质点沿直线从 a 移动到 b,外力 $f(x)$对质点所作的功。

2° 密度为 $f(x)$的直线段杆$[a,b]$的质量。

命题 43　若 $y=f(x)$在$[a,b]$上可积分,将$[a,b]$$n$ 等分,在每个小区间 Δx_i 上任取一点 ξ_i,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 必定存在,且$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

命题 44　若 $f(x)$为连续函数,则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 必定可导。

命题 45　若 $f(x)$为$[a,b]$上的连续函数,则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 必定为 $f(x)$ 在该区间上的原函数。

命题 46　初等函数在其定义区间(a,b)内必定存在原函数。

命题 47　若 $f(x)$为连续的奇函数,则其原函数 $F(x)$必为偶函数。

命题 48　设 $f(x)$为连续函数,若对任意区间$[a,b]$都有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,则必有 $f(x)=0$。

命题 49　若 $f(x)$在$[a,b]$上可积,则$|f(x)|$在$[a,b]$上必定可积。

命题 50　若$|f(x)|$在$[a,b]$上可积,则 $f(x)$在$[a,b]$上必定可积。

命题 51　若 $f(x)$为连续函数,则必有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & f(x)\text{ 为奇函数}\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x & f(x)\text{ 为偶函数}\end{cases}$$

命题 52　若 $f(x)$是周期为 T 的连续函数,则对于任意常数 a 都有

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

命题 53　若 $f(x)$为$(-\infty,+\infty)$内的连续函数,则必有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & f(x)\text{ 为奇函数}\\ 2\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x & f(x)\text{ 为偶函数}\end{cases}$$

四、向量代数与空间解析几何

命题 54 空间平面在直角坐标系关于坐标轴的截距必定为非负数值。

命题 55 参数方程$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$在空间直角坐标系中总表示一条空间曲线。

五、多元函数微分学

命题 56 设 $u=f(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 存在偏导数，则$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}$的物理意义为：$u$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 对于 x 轴方向的变化率。

命题 57 若 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 可微分，则 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 必定连续。

命题 58 若 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 存在偏导数$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}$与$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}$，则 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 必定连续。

命题 59 设 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 存在偏导数$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，则 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 必定可微分，且

$$\left.\mathrm{d}z\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\mathrm{d}y$$

命题 60 设 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 存在连续偏导数$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，则 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 必定可微分，且

$$\left.\mathrm{d}z\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\mathrm{d}y$$

命题 61 若点 $M_0(x_0,y_0)$ 为 $z=f(x,y)$ 的极值点，则必有$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=0$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=0$。

命题 62 若$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=0$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=0$，则点 $M_0(x_0,y_0)$ 必为函数 $z=f(x,y)$ 的极值点。

命题 63 设 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 存在偏导数，则曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 必定存在切平面，且切平面方程为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(x-x_0)+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(y-y_0)=z-f(x_0,y_0)$$

命题 64 设 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 存在连续偏导数，则曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处必定存在切平面，且切平面方程为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(x-x_0)+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(y-y_0)=z-f(x_0,y_0)$$

命题 65　设 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 存在偏导数，则曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\y=y_0\end{cases}$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 的切线向量为 $(f'_x(x_0,y_0),0,1)$。

命题 66　若 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}$ 存在，则方向导数 $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}$ 存在，且

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta$$

其中 α,β 分别为 l 方向与 x 轴正向，y 轴正向的夹角。

命题 67　若 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 沿任意方向 l 的方向导数 $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}$ 都存在，则 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 必定可微分，也必定存在偏导数。

命题 68　若 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分，则 $f(x,y)$ 在该点沿任一方向 l 的方向导数都存在，且有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{P}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P}\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P}\cos\beta$$

其中 α,β 分别为方向 l 与 x 轴正向，y 轴正向的夹角。

六、多元函数积分学

命题 69　若 $f(x,y)$ 为有界闭区域 D 上的连续函数，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 必定为常数值。

命题 70　二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的几何意义为：其值等于以 D 为底，以 $z=f(x,y)$ 为曲顶的直曲顶柱体的体积。

命题 71　若 $f(x,y)$ 为区域 D 上的连续函数，区域 D 关于 y 轴对称，且 D_1 为区域 D 位于 y 轴右侧的子区域，则必有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0 & f(x,y)\text{ 为 } x \text{ 的奇函数}\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & f(x,y)\text{ 为 } x \text{ 的偶函数}\end{cases}$$

命题 72　若 $z=f(x,y)$ 为区域 D 上的连续函数，且 D 可以表示为

$$D: a\leqslant x\leqslant b,\quad \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$$

或

$$D: c\leqslant y\leqslant d,\quad \psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)$$

而 $\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$ 与 $\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$ 都不能计算出来，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 不存在。

命题 73 设 $f(x,y)$ 为连续函数，若对任意有界闭区域 D 都有 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，则必有 $f(x,y)=0$。

命题 74 设 $f(x,y,z)$ 为连续函数，若对任意有界闭区域 Ω 都有 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，则必有 $f(x,y,z)=0$。

命题 75 若 $f(x,y,z)$ 为有界闭区域 Ω 上的连续函数，则三重积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 必定为 常数值。

命题 76 三重积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的物理意义为：其值等于密度为 $f(x,y,z)$ 的空间形体 Ω 的质量。

命题 77 若 $f(x,y,z)$ 为区域 Ω 上的连续函数，区域 Ω 关于 Oxy 坐标面对称，Ω_1 为 Ω 位于 Oxy 坐标面上侧的部分，则必有

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\begin{cases}0 & f(x,y,z)\text{ 为 } z \text{ 的奇函数}\\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z & f(x,y,z)\text{ 为 } z \text{ 的偶函数}\end{cases}$$

命题 78 若 L 为分段光滑曲线段，$f(x,y)$ 为 L 上的连续函数，则曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 必定为常数值。

命题 79 曲线积分 $\int_{\widehat{AB}} f(x,y,z)\mathrm{d}s$ 的物理意义为：其值等于密度为 $f(x,y,z)$ 的空间曲线杆 $\widehat{AB}$ 的质量。

命题 80 若分段光滑曲线弧 L 关于 y 轴对称，$f(x,y)$ 在 L 上为连续函数，L_1 为 L 位于 y 轴右侧的弧段，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\begin{cases}0 & f(x,y)\text{ 为 } x \text{ 的奇函数}\\ 2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s & f(x,y)\text{ 为 } x \text{ 的偶函数}\end{cases}$$

命题 81 曲线积分 $\int_{\widehat{AB}} P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 的物理意义为：其值等于质点在外力 $\boldsymbol{F}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 作用下自点 A 沿曲线 $\widehat{AB}$ 移动到点 B 时，外力 $\boldsymbol{F}$ 对质点所作的功。

命题 82 若 D 为有界闭区域，C 为其边界曲线正向，则总有格林公式

$$\oint_C (P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

命题 83　若$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,则曲线积分$\int_{\widehat{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$必定与积分路径无关,可以选择平行于坐标轴的折线段作为积分路径以简化运算。

命题 84　若在区域 D 内总有$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,则对于 D 内任意一条封闭曲线 C,总有

$$\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$$

命题 85　若在单连通区域 G 内,$P(x,y)$,$Q(x,y)$有一阶连续偏导数,且 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 为函数 $u(x,y)$的全微分的充分必要条件为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在 G 内恒成立。此时 $u(x,y)$总可以表示为

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

或

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

或

$$u(x,y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x$$

其中(x_0,y_0)为 G 内任一确定点。

命题 86　若曲面 Σ 为分片光滑的,$f(x,y,z)$为 Σ 上的连续函数,则曲面积分$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 必定为常数值。

命题 87　曲面积分$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 的物理意义为:其值等于密度为 $f(x,y,z)$的空间曲面薄片 S 的质量。

命题 88　若曲面 Σ 关于 Oxy 坐标面对称,$f(x,y,z)$为 Σ 上的连续函数,Σ_1 为 Σ 位于 Oxy 坐标面上部的曲面,则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}0 & f(x,y,z)\text{ 为 } z \text{ 的奇函数}\\ 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S & f(x,y,z)\text{ 为 } z \text{ 的偶函数}\end{cases}$$

命题 89　曲面积分$\iint_\Sigma P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的物理意义为:其值等于以流速 $\boldsymbol{v}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\boldsymbol{k}$ 的液体在单位时间内穿过曲面 Σ 的流(通)量。

命题 90　若 Ω 为有界闭区域,Σ 为其边界曲面外侧,则总有高斯公式

$$\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

命题 91 斯托克斯公式：设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面，Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则，函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在包含曲面 Σ 在内的一个空间区域内具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

对于满足上述条件的任意曲面 Σ_1，Σ_2 都成立，即上述右端表达式中的 Σ 可能有许多个。

七、无穷级数

命题 92 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定发散。

命题 93 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 收敛，则必有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$。

命题 94 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 必定收敛。

命题 95 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 必定发散。

命题 96 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 必定收敛。

命题 97 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定收敛。

命题 98 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 必定收敛。

命题 99 若 $a_n \geqslant 0 (n=1,2,\cdots)$，且 $\{a_n\}$ 单调减少有下界，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 必定收敛。

命题 100 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 内可以逐项求导，即

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

其中 $|x|<R$，逐项求导后所得到的幂级数与原幂级数收敛域相同。

命题 101 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数在其收敛区间 $(-R,R)$ 内有任意阶导数。

命题 102 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上至多有有限个第一类间断点，且至多有有限个极值点，又

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots)$$
则 $S(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期的周期函数。

八、常微分方程

命题 103　若 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 为 n 阶线性微分方程
$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_n y = 0$$
的 n 个特解，则 $y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$ 为所给方程的通解，其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为任意常数。

命题 104　若 y_1,y_2,y_3 为二阶线性微分方程
$$y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x)$$
的三个特解，则 $y=C_1(y_2-y_1)+C_2(y_3-y_2)+y_1$ 必为所给微分方程的通解。

第二部分　命题的分析与说明

一、函数、极限与连续性

命题 1　若 $y=f(x)$与 $y=g(x)$互为反函数，则 $f[g(x)]=x$。

答案为：是。

分析　由反函数的定义可知命题正确。

说明　2001 年全国硕士研究生入学考试数学（二）试题："设函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，$f(0)=0$，且其反函数为 $g(x)$。若 $\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t = x^2\mathrm{e}^x$，求 $f(x)$。"

此题在求解运算中，反函数的上述性质是求解的重要环节：

等式两边对 x 求导可得

$$g[f(x)]f'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x$$

由于 $g(x)$与 $f(x)$互为反函数，因此有 $g[f(x)]=x$，故有

$$xf'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x$$

使问题易解，一些考生由于不熟悉这个性质，致使不再进一步运算。这是很可惜的。

命题 2　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 表示一个常数。

答案为：是。

分析　由极限的定义可知命题正确。

说明　如已知 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在，且 $f(x) = x^2 + 3x\lim\limits_{x\to 1} f(x)$，则 $f(x)=$______。

此题可以利用上述命题结论求解。令 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = A$，则 $f(x)=x^2+3Ax$，将上式两端在 $x\to 1$ 时取极限，可求出 A，进而求得 $f(x)$。

相仿，如已知 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 与$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 都存在，且 $f(x) = x^2 + 3x\lim\limits_{x\to 1} f(x) + 2x^3\lim\limits_{x\to 2} f(x)$，求 $f(x)$。可以设 $A = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$，$B = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$，则 $f(x) = x^2 + 3Ax + 2Bx^3$，将上式分别在 $x\to 1$ 与 $x\to 2$ 时取极限，可以得到含 A，B 的两个方程。解方程组可以得 A，B。从而得出 $f(x)$。

命题 3　若当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$为无界变量，则当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$必定为无穷大量。

答案为：非。

分析　如

$$f(x) = \begin{cases} x & x \text{ 为有理数} \\ \dfrac{1}{x} & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

当 $x\to 0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$ 为无界变量。但是 $f(x)$ 不为无穷大量。

说明　1° 若当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$ 为无穷大量，则当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$ 必定为无界变量。

2° 1998 年全国硕士研究生入学考试数学（二）试题："设数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot y_n=0$，则（　）。

A. 若 $\{x_n\}$ 发散，则 $\{y_n\}$ 必发散　　　B. 若 $\{x_n\}$ 无界，则 $\{y_n\}$ 必有界

C. 若 $\{x_n\}$ 无界，则 y_n 为无穷小　　　D. 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小"

所给试题实际难度仅为 0.36，考生中答错此题者，大都选择 B。这是由于考生对无界变量与无穷大量的区别不清楚而造成的结果。此试题的全面分析在本书命题 6 中给出。

命题 4　两个无穷大量之和必定为无穷大量。

答案为：非。

分析　例如当 $x\to 0$ 时 $2-\dfrac{1}{x}$ 与 $3+\dfrac{1}{x}$ 都为无穷大量，而

$$\left(2-\frac{1}{x}\right)+\left(3+\frac{1}{x}\right)=5$$

在 $x\to 0$ 不为无穷大量。

说明　1° 此例表明：无穷大量不具有无穷小量相应的运算性质，不可将无穷小量的运算性质搬到无穷大量运算之中。

2° 在极限的洛必达法则中有 $\infty-\infty$ 型的运算，称之为未定型。这里需指出，所谓 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$ 为 $\infty-\infty$ 型问题，是指在 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 或同为正无穷大或同为负无穷大。$\infty-\infty$ 型极限可能存在，也可能不存在。这表明两个无穷大量之差不一定为无穷小量。

命题 5　若 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 为无穷大量，则当 $x\to x_0$ 时，$e^{f(x)}$ 必定为无穷大量。

答案为：非。

分析　例如 $x\to 1$ 时，$\dfrac{1}{x-1}$ 为无穷大量。而

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty,\quad \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$$

因此

$$\lim_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,\quad \lim_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{e^{\frac{1}{1-x}}}=0$$

可知当 $x\to 1$ 时 $e^{\frac{1}{x-1}}$ 不为无穷大量，为极限不存在的量。

说明　由于无穷大量是属于极限不存在的量，因此无穷小量运算法则不能搬到无穷大量运算中来。