390

数学解题指导

山东科学技术出版社

数学解题指导

王大同　李庆胜编

山东科学技术出版社

一九八二年·济南

内 容 提 要

本书通过对例题的分析、解答和指导，介绍了解题的科学方法和一些特殊的技能技巧。书中的例题，是从初等数学代数、三角、几何各种类型题中挑选的，面广，典型性强，如能熟练地掌握这些例题的解法规律和技巧，就可以举一反三，触类旁通，一系列习题都可以迎刃而解。不少例题水平高、难度大，分析透彻，指导得方，对广大读者开阔解题思路，提高运算速度和准确度都是大有益处的。

本书包括初等数学中的代数、三角、几何等部分。每一部分都配有一定数量的练习题。可供广大中学师生和数学爱好者学习参考。

数学解题指导

王大同　李庆胜编

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行

山东肥城印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　26印张　541千字

1980年3月第1版　1982年5月第2次印刷

印数：105,201—127,700

书号　13195·36　定价 2.15元

出版说明

数理化是重要的基础学科。它们已经渗透到各个领域，成为各种科学、技术、生产建设及日常生活所不可缺少的得力助手和工具。今天，在向四化进军中，越来越显示出学好数理化的重要性。

为配合业余教育的全面开展，我们出版了一套《数理化基础知识》丛书，共13册。与此同时，我们还出版了《数学解题指导》、《物理习题分析和题解》、《化学习题分析和题解》三本书，使读者能更好地巩固和加深对数理化基础知识的理解，提高分析问题和解决问题的能力。

这三本书，通过对例题的分析解答和指导，向广大读者分别介绍了数学、物理、化学习题解题的科学方法和一些特殊的技能技巧。书中的例题，是从各类习题中挑选的，典型性强，如能熟练地掌握这些例题的解法规律和技巧，就可以举一反三，触类旁通，一系列习题都可以迎刃而解。不少例题水平高，难度大，分析透彻，指导得方，对广大读者开阔解题思路，提高运算速度，深化对数理化基础知识的理解，提高解难题的能力都是大有益处的。

《数学解题指导》一书，包括初等数学中的代数、三角、几何等部分。每一部分都配有一定数量的练习题。内容丰富，重点突出，说理清晰，通俗易懂，是一本指导性较强的书。可供广大中学师生和数学爱好者学习参考。

目　录

第一篇　代数和初等函数……1
第一章　数……1
一、数的概念及主要性质……1
二、运算……12
第二章　代数式……25
一、整式……25
二、分式……53
三、根式……65
四、关于等式的证明……73
第三章　指数和对数……89
一、指数……89
二、对数……92
第四章　三角函数运算……106
一、三角函数式的化简和恒等变换……106
二、求值……138
三、关于三角函数等式的证明……164
第五章　方程和方程组……199
一、方程……199
二、方程的解法……202
三、方程组……283
四、方程组的解法……286
五、列方程（组）解应用题……313

第六章 不等式……326
一、不等式的解法……326
二、不等式的证明……344
第七章 函数……365
一、基本初等函数……365
二、代数函数……385
三、超越函数……412
第八章 数列与极限……440
一、等差数列与等比数列……440
二、数列求和……467
三、极限……473
第九章 排列、组合、二项式定理……490
一、排列和组合……490
二、数学归纳法和二项式定理……510
第十章 初等概率……527
一、事件的概念与运算……527
二、概率的定义……530
三、概率的几个定理……531
四、例题……533
第二篇 几何……547
第十一章 平面几何证明题……547
一、解证明题的步骤……547
二、证法概论……548
三、分类证明……560
四、关于添加辅助线……616
五、一题多"解"……618

第十二章　平面几何计算题……………………………………650
一、解计算题的步骤……………………………………650
二、例题……………………………………………………650
第十三章　立体几何证明题与计算题………………………662
一、证明题…………………………………………………662
二、计算题…………………………………………………668
第十四章　由方程讨论曲线的几何性质……………………688
一、由方程求曲线的交点 ………………………………688
二、由方程画出曲线………………………………………693
三、几种特殊方程的曲线 ………………………………702
四、二次方程的简化 ……………………………………706
第十五章　求曲线的方程……………………………………713
一、求可以确定形式的方程………………………………713
二、求轨迹方程 …………………………………………723
第十六章　平面解析几何计算题与证明题…………………754
习题答案……………………………………………………782

第一篇　代数和初等函数

第一章　数

一、数的概念及主要性质

（一）数系表

- 复数（$a+bi$，a、b为实数）
  - 实数（$a+bi$，当$b=0$）
    - 有理数
      - 整数
        - 自然数（正整数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数或表示为
        - 有限小数（正、负）
        - 无限循环小数（正、负）
    - 无理数（正、负）——无限不循环小数
  - 虚数（$a+bi$，当$b\neq0$）
    - 纯虚数（$a+bi$，当$a=0$，$b\neq0$时）
    - 混合虚数（$a+bi$，当$a\neq0$，$b\neq0$时）

（二）数的主要性质

自然数	有理数	实　数	复　数
（1）有无穷多个，1是最小的自然数，但没有最大的自然数 （2）有顺序性，即任意两个自然数，都可以比较大小	（1）有无穷多个，没有最小的数，也没有最大的数 （2）有顺序性，即任意两个有理数，都能比较大小	（1）有无穷多个，没有最小的数，也没有最大的数 （2）有顺序性，即任意两个实数都能比较大小 （3）实数与数轴	（1）没有顺序性。两个复数中只要有一个不是实数，就不能进行大小比较，但复数可以有相等与不相等的关系 （2）复数和复平面上的点有一一对应关系

(3) 在自然数集内，可以施行加法和乘法运算 (4) 自然数是离散的，但是可数的	(3) 在有理数范围内，可以施行加、减、乘、除(除数不为零)四种运算 (4) 有理数是稠密的	上的点之间具有一一对应的关系 (4) 在实数范围内，可以施行加、减、乘、除（除数不为零）四种运算	(3) 当两个复数的实部相等，虚部符号相反时，这两个复数叫做共轭复数．共轭复数的和、积都是实数 (4) 在复数范围内，永远可以施行加、减、乘、除（除数不为零)、乘方、开方六种运算

运算定律都适合(即加法交换律、加法结合律、乘法交换律、乘法结合律、乘法对于加法的分配律)

（三）例题

例1 不用绝对值的符号表示下列各式：

(1) $|a-3|=?$ (2) $|2a+1|=?$

解 根据绝对值的定义知，欲求$|a-3|$，必须要明确$a-3$的符号．要明确$a-3$的符号，就必须分别情况加以讨论，因而本题应解为：

$$(1)\quad |a-3|=\begin{cases}a-3 & \text{当}a\geqslant 3\text{时，}\\ 3-a & \text{当}a<3\text{时．}\end{cases}$$

$$(2)\quad |2a+1|=\begin{cases}2a+1 & \text{当}a\geqslant -\frac{1}{2}\text{时，}\\ -2a-1 & \text{当}a<-\frac{1}{2}\text{时．}\end{cases}$$

例2 比较下列各数的大小：

(1) $-\frac{13}{9}$和$-1\frac{1}{2}$； (2) a和$\frac{a}{2}$；

(3) 当$a>b$时，$\frac{1}{a}$和$\frac{1}{b}$；　　(4) $|a-1|$和$|a+2|$．

解 (1) $\because$ $\left|-\frac{13}{9}\right|=1\frac{8}{18}$，$\left|-1\frac{1}{2}\right|=1\frac{9}{18}$，

$\therefore$ $-\frac{13}{9}>-1\frac{1}{2}$．

(2) 若$a>0$时，　　$a>\frac{a}{2}$；

若$a=0$时，　　$a=\frac{a}{2}$；

若$a<0$时，　　$a<\frac{a}{2}$．

(3) 如果$a>0$，$b<0$，

那么$\frac{1}{a}>0$，$\frac{1}{b}<0$，　$\therefore$ $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$．

如果$a>0$，$b>0$，或$a<0$，$b<0$，

那么 $ab>0$；又$\because$ $a>b$，即 $b-a<0$，于是$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}<0$，$\therefore$ $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$．

(4) 当$a\geqslant 1$时，$|a-1|=a-1$，$|a+2|=a+2$，

于是$|a-1|-|a+2|=a-1-(a+2)=-3<0$，

$\therefore$ $|a-1|<|a+2|$．

当$a\leqslant -2$时，$|a-1|=1-a$，$|a+2|=-a-2$，

于是$|a-1|-|a+2|=1-a-(-a-2)=3>0$，

$\therefore$ $|a-1|>|a+2|$．

当$-2\leqslant a\leqslant 1$时，$|a-1|=1-a$，$|a+2|=a+2$，

$\therefore$ $|a-1|-|a+2|=1-a-(a+2)=-2a-1$．

(i) 当$a=-\frac{1}{2}$时，$\because -2a-1=0$，

$\therefore |a-1|=|a+2|$；

(ii) 当$1\geqslant a>-\frac{1}{2}$时，$\because -2a-1<0$，

$\therefore |a-1|<|a+2|$；

(iii) 当$-2\leqslant a<-\frac{1}{2}$时，$\because -2a-1>0$，

$\therefore |a-1|>|a+2|$.

归纳起来说：

当$a>-\frac{1}{2}$时，$|a-1|<|a+2|$；

当$a=-\frac{1}{2}$时，$|a-1|=|a+2|$；

当$a<-\frac{1}{2}$时，$|a-1|>|a+2|$.

【指导】① 绝对值的定义是一个重要概念，必须切实掌握好．特别是对用来表示数的字母所组成的式子的绝对值，只有真正理解了绝对值的意义，才能作出正确的判断，写出准确的分段讨论式．

② 比较两数的大小，简单时可直接判断大小，但特别要注意，两个负数比较大小时，绝对值大的数反而小；较复杂时，可改用计算两数差的办法，这里利用了“若$A-B\geqslant 0$，则$A\geqslant B$，若$A-B\leqslant 0$，则$A\leqslant B$”的性质．

例3 设在$\frac{ax+b}{cx+d}=s$中，a、b、c、d都是有理数，x是无理数．

求证：(1) 当$bc=ad$时，s是有理数；

(2) 当$bc\neq ad$时，s是无理数．

证明 由原式知：c、d不能同时为零。

(1) 若$bc=ad$，且$c\neq 0$时，

则 $s=\frac{acx+bc}{c(cx+d)}=\frac{acx+ad}{c(cx+d)}=\frac{a}{c}$，

∴ s为有理数.

若 $bc=ad$，且$d\neq 0$时，则 $s=\frac{adx+bd}{d(cx+d)}=\frac{b}{d}$，

∴ s为有理数.

(2) 若$bc\neq ad$，且$c\neq 0$时，

则 $s=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$，

∵ x为无理数，故s也为无理数.

若 $bc\neq ad$，且$c=0$，$d\neq 0$时，则$a\neq 0$，

于是 $s=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax+b}{d}$.

∵ x为无理数，∴ s也为无理数.

【指导】 ①两个有理数经过加、减、乘、除运算后，仍是有理数；②一个无理数与有理数经过加、减、乘、除运算后，仍是无理数。

例4 求证：$\sqrt{3}$是无理数.

证明 我们用反证法来证明.

假设$\sqrt{3}$不是无理数，即$\sqrt{3}$是有理数。

则 $\sqrt{3}$必可表示成分数$\frac{n}{m}$的形式（其中m、n是互质的正整数）. 即$\sqrt{3}=\frac{n}{m}$.

两边同时平方得：$3=\frac{n^2}{m^2}$， 即$n^2=3m^2$。

由此可知，n^2是 3 的倍数.

$\therefore$ n 必定也是 3 的倍数.

令$n=3k$（k是整数），代入 $n^2=3m^2$中，

得　$(3k)^2=3m^2$，　即$3k^2=m^2$.

又可推知，m 也是 3 的倍数.

$\therefore$　m、n 就有公约数 3，这与假设矛盾，因此，$\sqrt{3}$是无理数.

【指导】① 反证法是一种间接的证题方法，在代数中常常要用到. 用它来证题的基本思想是：先假定要证的结论不成立，从而推出与已知条件或某公式（定理）相矛盾的结论，说明假定是错误的，从而肯定了要证的结论.

② 能否化成分数形式是有理数与无理数的根本区别.

③ 与$\sqrt{3}$一样，象$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，…… 也都是无理数. 下面给出一般证明（读者可作一般了解，不要求掌握）.

设n为正整数，但不是整数的平方数. 今证明$\sqrt{n}$为无理数.

证明　$\because$　n必在两正整数 p及 $p+1$ 的平方之间，

即　　$p^2<n<(p+1)^2$.

今假设$\sqrt{n}$不是无理数，即是有理数. 则$\sqrt{n}$一定可表示成一分数形式. 不妨记为：

$$\sqrt{n}=\frac{s}{r}\quad\left(\frac{s}{r}\text{ 为一既约分数，} s\in N,\ r\in N,\right.$$

N表示自然数集合）.

$$\therefore n=\frac{s^2}{r^2},\qquad \text{由此得}\quad \frac{s}{r}=\frac{nr}{s}.$$

又∵ $p^2 < \left(\frac{s}{r}\right)^2 < (p+1)^2$,

∴ $p < \frac{s}{r} < p+1$, $pr < s < pr+r$.

即 $0 < s-pr < r$.

又根据比例的性质定理知,

$$若\frac{b}{a}=\frac{d}{c},\quad 则\frac{b}{a}=\frac{b-d}{a-c}(a\neq c).$$

$$可以推得\quad \frac{s}{r}=\frac{nr}{s}=\frac{nr-ps}{s-pr},$$

$$即\quad \frac{s}{r}=\frac{nr-ps}{s-pr},\quad 而 0<s-pr<r.$$

分数的分母可以在正整数集内变小,说明$\frac{s}{r}$不是既约分数.这与假设相矛盾.由此说明:$\sqrt{n}$不是有理数,而是无理数.

另外象$\sqrt[3]{2}$、$\sqrt[3]{5}$、$\sqrt[4]{5}$、$\sqrt[7]{8}$……也都是无理数.这些无理数的一般证明介绍如下:

若整系数方程 $x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots\cdots+c_n=0$ 有实根x_0,则 x_0或者为整数,或者为无理数.

证明 假设x_0为有理数,设 $x_0=\frac{a}{b}$ ($a\in J$, $b\in J$, 其中J表示整数集合,不妨设$b>0$,$\frac{a}{b}$为既约分数).

$$则有\left(\frac{a}{b}\right)^n=-\left[c_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+c_2\left(\frac{a}{b}\right)^{n-2}\right.$$

$$+\cdots\cdots+c_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)+c_n\Big],$$

$$\therefore\ a^n=-b(c_1a^{n-1}+c_2a^{n-2}b+\cdots\cdots+c_{n-1}ab^{n-2}$$
$$+c_nb^{n-1}).$$

若$b>1$，则b可以整除a^n，从而b整除a，这与$\frac{a}{b}$为既约分数矛盾，因此$b=1$.

由此证明了：x_0如果是有理数，一定是整数，否则就是无理数.

将上述结论用于方程$x^n-m=0$，则有：

如果m是正整数，而不是一个整数的n次幂，则$\sqrt[n]{m}$是无理数.

由此可知：$\sqrt[3]{2}$、$\sqrt[3]{5}$、$\sqrt[4]{5}$、$\sqrt[7]{8}$……都是无理数.

还有，π、e以及对于任何正有理数r来说，除了$r=10^n$（n为整数）外的$\lg r$都是无理数.

三角函数值以及反三角函数值除几个特殊值以外，大部分都是无理数. 在此不证明了.

例5 把下列复数化成三角函数式和指数表示式：

(1) -1；　(2) $-\sqrt{3}+i$；　(3) $-2-2\sqrt{3}i$；

(4) $-2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

解 (1) $-1=-1+0i$，模数$r=1$，$\cos\theta=-1$，$\sin\theta=0$，幅角的主值是π，

$\therefore\ -1=\cos\pi+i\sin\pi$；　$-1=e^{i\pi}$.

(2) 模数$r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$，

$\therefore\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\frac{1}{2}$.

∴ 幅角的主值是$\frac{5\pi}{6}$，

$$-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right);$$

$$-\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

(3) 模数$r=\sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}=4$，

∴ $\cos\theta=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$， $\sin\theta=\frac{-2\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∴ 幅角的主值是$\frac{4\pi}{3}$，

∴ $-2-2\sqrt{3}i=4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$，

$$-2-2\sqrt{3}i=4e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

(4) $-2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$=2\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

$$-2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

【指导】① 对于一些特殊的复数，可按下面规律，直接写出三角函数式.

复数		模数	幅角主值	三角函数式
实数 a	$a>0$	$\|a\|$	$0°(0)$	$\|a\|(\cos 0+i\sin 0)$
	$a<0$	$\|a\|$	$180°(\pi)$	$\|a\|(\cos\pi+i\sin\pi)$
纯虚数 bi	$b>0$	$\|b\|$	$90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\|b\|\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
	$b<0$	$\|b\|$	$270°\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	$\|b\|\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

② 复数的三角函数式，必须是：

(i) 模数是非负的；

(ii) 实部的三角函数是幅角θ的余弦；

(iii) 虚部的三角函数是同一幅角θ的正弦；

(iv) 实部与虚部之间用"＋"号连接。

例 6 把下列各复数化为代数式：

(1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$； (2) $7e^{i\frac{7\pi}{6}}$。

解 (1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$$=\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4}+i\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4}=-1-i;$$

(2) $7e^{i\frac{7\pi}{6}}=7\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$$=7\cos\frac{7\pi}{6}+i7\cdot\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{7\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{2}i.$$

习 题 一

1. $a-|a|$不可能是正数，为什么？