水波理论基础

SHUIBO LILUN JICHU SHUIBO LILUN JICHU

黄德波 编

哈尔滨船舶工程学院出版社

水波理论基础

黄德波　编

哈尔滨船舶工程学院出版社

（黑）新登字第9号

内 容 简 介

本书介绍水表面波的基础理论，共分七章。第一章介绍水波问题数学模型的建立，以及用参数摄动法对所得方程作变形简化；第二章讲述水波线性理论和问题解法，讨论问题的某些特解（线性行进波和驻波）；第三章介绍初值问题和富里埃分析方法，稳定位相法等，并讨论波的弥散现象；第四章讲述边值问题和适于求解较规则水域的水波问题的富里埃方法；第五章介绍较高阶问题的解以及Stokes波等非线性有限振幅波；第六章讨论浅水波理论、长波和弱非线性弱弥散长波、KdV方程、孤立波和椭圆余弦波，并介绍在孤立子理论研究中起重要作用的逆散射法，求解Airy方程的特征线法；第七章讨论非均匀短波波列的演化。

本书是为学习船舶与海洋工程、水波等专业的研究生作教材而编写，也可供海洋学、应用数学和海洋工程等方面的有关人员参考。

水 波 理 论 基 础

黄 德 波 编

•

哈尔滨船舶工程学院出版社出版

新华书店首都发行所发行

哈尔滨船舶工程学院印刷厂印刷

•

开本 787×1092 1/32 印张7.375 字数168千字

1991年12月第1版 1991年12月第1次印刷

印数：1—1000册

ISBN 7-81007-143-2/U·23

定价：2.00元

出版说明

根据国务院发[1978]23号文件批转试行的“关于高等学校教材编审出版若干问题的暂行规定”，中国船舶工业总公司承担了全国高等学校船舶类专业教材的编审、出版的组织工作。自1978年以来，完成了两轮教材的编审、出版任务，共出版船舶类专业教材116种，对解决教学急需，稳定教学秩序，提高教学质量起到了积极作用。

为了进一步做好这一工作，中国船舶工业总公司成立了“船舶工程”、“船舶动力”两个教材委员会和“船电自动化”、“惯性导航及仪器”、“水声电子工程”、“液压”四个教材小组。船舶类教材委员会（小组）是有关船舶类专业教材建设的研究、指导、规划和评审方面的业务指导机构，其任务是为作好高校船舶类教材的编审工作，并为提高教材质量而努力。

中国船舶工业总公司在总结前两轮教材编审出版工作的基础上，于1986年制订了《1986—1990年全国高等学校船舶类专业教材选题规划》。列入规划的教材、教学参考书等共166种。本规划在教材的种类和数量上有了很大增长，以适应多层次多规格办学形式的需要。在教材内容方面力求做到两个相适应：一是与教学改革相适应；二是与现代科学技术发展相适应。为此，教材编审除贯彻“打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学”的原则以外，还注意了加强实

践性教学环节，拓宽知识面，注意能力的培养，以适应社会主义现代化建设的需要。

这批教材由各有关院校推荐，同行专家评阅，教材委员会（小组）评议，完稿后又经主审人审阅，教材委员会（小组）复审。本规划所属教材分别由国防工业出版社、人民交通出版社以及各有关高等学校的出版社出版。

限于水平和经验，这批教材的编审出版工作还会有许多缺点和不足，希望使用教材的单位和广大师生积极提出宝贵意见，以便改进工作。

中国船舶工业总公司教材编审室

1988年3月

前　　言

学习、从事船舶与海洋工程专业工作和进行水波及某些应用力学分支研究的学生和研究人员需要具备一些关于水表面波的基础理论知识。为此编写此书。编写时考虑到多数读者的水平和要求，参考了美国加州大学伯克利分校J.Hammack和J.Wehausen教授的有关讲义及梅强中(C.C.Mei)、G.Whitham和J.Newman等人的专著，旨在介绍 水表面波的一些较基础的知识。编者无意在本书中讲述所有有关理论和罗列详尽结果，而是着重于较重要的基本原理和分析方法。

本书内容由水波的线性理论入手，逐步深入到较高阶的波、Stokes波、长波理论、非线性波理论（包括孤立波和椭圆余弦波）、短波波列的演化等。前一部分以直接参数摄动法为主要处理手段，导出相应方程，并介绍一些基本的求解和分析方法，如富里埃方法、稳定位相法等。后一部份则通过对各种高阶或非线性问题的处理，介绍伸缩参数法、多重尺度法、坐标摄动法等，以及广泛应用于非线性方程问题的某些正则摄动和奇异摄动方法在水波问题中的应用。

编写时意在使具有基本流体力学和数学物理方法知识的读者易于理解，且顾及到作为教材使用所要求的篇幅限制，故力求简短，同时给出必要的数学推导和物理解释。水波理论的工程应用较广，在此不能一一编入。至于深一步的内

容，如粘性影响、碎波、有旋波和内波等也未涉及，望使用本书时能同时参考国内外有关专著和论文（参见书末“参考书目”）。

承蒙上海交通大学刘应中教授对本书原稿作仔细审阅并提出宝贵意见，谨在此表示深切谢意。

本书难免偏陋，错误之处，请读者指正。

编　者

1990.2

目　　录

绪　　论

波动是物理学、数学和许多工程科学长期以来研究的重要内容之一。它所包含的内容极为广泛：水波、声波、光波和电磁波等等，都属于该范畴。它们虽然千差万别，但又具有许多共同的特性，后者又形成了各个分支之间的相互关联，它们在理论上的相似之处又促进人们在探讨各自的问题时相互借鉴。由于各种波区别很大，难于给出一个简单的波动定义，但是通常可以归纳其共性，作如下定义：

波是一种可被辨识的扰动（讯号），它以有限的速度自媒质的一处传播到另一处。

一般来说，这种扰动是指物理量（或者抽象为数学上的某种量）的改变，该量及其传播速度可以在传播过程中不断变化。

物理上的波动大都具有下述特点：

（1）可将能量由一地输运到另一地，

（2）具有动量，当被物面反射或吸收时会对该物面施加一定大小的力；

（3）　波以有限速度传播。

人们通常按不同的情况和条件对波作各式各样的分类。

从数学上，将波分成两大类

（1）　双曲型波——可用双曲型方程来描述的波，例如

$$\varphi_{tt}-c_0^2\nabla^2\varphi=0$$

（2）弥散波——描述波动方程的解具有某种弥散性，这

是指该解所代表的波的某种传播速度不是恒定的，而是与波的某个（或若干个）特征量有关，例如

$$\varphi = a\cos(kx-\omega t)$$

当其中的$\omega=\omega(k)$，且$\omega''(k)\neq 0$时所代表的波。若所述速度所依赖的特征量是波频，则称该弥散性为频率弥散性，简称频散性，即因频率的差异而引起的弥散；而若该特征量是波幅或波高，则称该弥散性为波幅弥散性，其弥散是由波幅或波高的差异而产生。许多弥散波兼有这两种弥散性。

注意到前一类是用方程的类型来定义，而后一类是用方程的解的性态来定义，故这两类波不是泾渭分明的，有些波同属这两类，因此这不是一种严格意义下的分类方法。

我们在此书中研究的是水表面波。水波大都是弥散波。不具有弥散性的那些双曲型波仅是某些特定条件下波的近似描述。

从物理观点来看，有两种极端情形的波，即振荡波和移动波。前一种指的是总质量迁移为零的波；后一种指的是水质点只朝一个方向移动的波。许多水波则是介于此二者之间的。

另外，从水波的波形变化的外部恢复力来看，可分为重力波和毛细波，二者的恢复力分别主要为重力与表面张力。对于我们所关注的工程问题，主要的是尺度较大的波，故重点讨论重力波。

此外，还有深水波和浅水波；长波和短波；线性波和非线性波等等划分。这些将在各章中分别论及。

水波理论有几个主要分支，其中较重要的是小振幅波理

论、有限振幅波理论和长波理论等。许多复杂周界问题的周期运动在一定条件下可用小振幅波理论来确定。该理论也是风浪研究的基础，对于因表面或水域底部的突然扰动所引起的波有时也较适用，它还常用于船舶或海洋建筑物的兴波问题，以及海啸、水下爆炸等产生的波。但在许多情形下，由于实际的水波具有波峰较尖、波谷较平坦等非正弦波特征，小振幅波理论就不再适用，有时可用有限振幅波理论，将待求的波解用相对波高H/h或相对波陡H/λ来作多项展开，其中H为波高，λ为波长，h为水深，从而求得近似解。对于较浅水域，高阶解收敛较慢，甚至失效，有时可应用长波理论来处理。

尽管一阶（线性）理论的应用受限制较多，结果有时略嫌粗糙，但在目前阶段，实际工程应用中，它仍旧是最重要的理论之一。另一重要的理论是长波理论，它在处理相对水深h/λ很小时应用。此时流场中各点的速度主要表现在水平方向，水平方向的速度沿垂直方向的变化较小，故该水平速度可假设为与浸深无关，或者用它沿深度方向作平均所得的平均水平速度来讨论，而且其垂直加速度可被忽略。运动的垂直分量不影响压力分布，故压力主要表现为水静压力。此时的结果多表达于Airy长波理论中，但该理论只适用于很长的长波。由于它忽略了频散性，故使用限制较大。对该理论的进一步发展是计入弱频散性的弱非线性长波理论，后者以Boussinesq长波理论为代表。

先前人们只集注于波的波动性研究，随着量子力学的发展，波的粒子性逐渐为人们所重视。十九世纪中，S.Russell首次发现水孤立波；数十年后Korteweg 和de Vries 导出

KdV方程，从数学上证明其存在，这两个事件促进人们对水波的粒子性的认识，这个问题大大震动了物理学和数学界。在许多其它物理学分支中也相继发现了孤立波，后者在相互碰撞过程所呈现的粒子性（最初由Zabusky和Kruskal在1965年用数值计算方法所发现）使得这种孤立波被称作“孤立子”。这一系列的发现和研究激发了应用数学领域中对孤立子理论的研究热情。孤立子理论和随之发展起来的逆散射法成为应用数学领域的两项最新最迷人的成就。关于这方面所进行的一系列理论和实验研究也逐步加深了人们对水波的认识。

水波区别于其它波动的一大特点是自由表面的存在；加上问题的非线性，使其求解尤为困难。除非极特殊的问题，求解析解几乎不可能。主要采用的三种解法是线性化方法、级数解法和数值方法，常常是将若干方法并用。近年来随着大型计算机的应用，计入可旋性和粘性，直接求解Navier－Stokes方程来处理水波问题也获得显著进展。

水波的某些机理迄今尚未明了，为获得更好的应用方法和结果，除了掌握已发展起来的理论和方法之外，还应逐步深入研究，探索水波机理，这需要通过流体力学、数学和其它物理学有关分支的专门技术人员的共同努力，相互渗透、借鉴，促使水波理论有更迅速的发展。

第一章 水波问题

水波问题与许多其它波动问题有不同之处，它有自由表面，而且波面变形的恢复力主要是重力和表面张力。对于曲率半径较大的波，表面张力通常只产生次要的影响，故多被忽略。在许多情况下所述的尺度的“大”、“小”是一种相对的概念。波的特征尺度主要是波幅 a 和波长 λ。若尺度比 $a/\lambda<o(1)$，则称所讨论的波为尺度较大的波。本书中一般只限于讨论理想流体无旋流动。按Kelvin定理，若流动一开始是无旋的，则其后任一时刻都将保持为无旋。这也是在一般情形下可作无旋假设的理由。此时流体速度场就可用一个标量来表示，即（速度）势函数 ϕ。该场内其它物理量，如速度、压力等，都可以用它来间接表示。例如 $\vec{V}=\nabla\phi$。

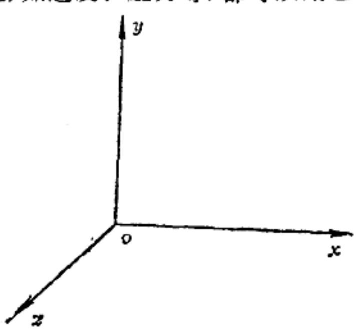

图1-1 坐标系

另外，对于水表面波问题，一般来说，可压缩性效应只在速度较高时才值得考虑，本书讨论的是质点速度不很高的情形，水的可压缩性可被忽略。

本书所用的坐标系如图1-1所示，其优点是当欲由三维问题变为

二维问题的讨论，只需去掉 z 坐标，并相应地去掉公式中含 z 变量的各项。

§1.1 水波问题的数学模型

首先介绍推导本节中各支配方程所用的一个重要定理。

输运定理——

若 $f(x,y,z,t)$ 是任一可微函数，$V(t)$ 是某个指定的体积，其边界面为 $S(t)$，该边界的外法线方向速度为 $v_n(t)$ 则对形如

$$I(t)=\int_{V(t)} f(x,y,z,t)\mathrm{d}V \tag{1.1.1}$$

的积分，有

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\int_{V(t)}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V+\int_{S(t)} f v_n \mathrm{d}S \tag{1.1.2}$$

倘若其中的 $S(t)$ 是物质表面，则有

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} f(x,y,z,t)\mathrm{d}V$$

$$=\int_{V(t)}\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\nabla\cdot(f\vec{u})\right]\mathrm{d}V \tag{1.1.3}$$

其中 $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ 是流体质点的速度。

该定理的证明如下：

因 $f(x,y,z,t+\Delta t)=f(x,y,z,t)+\dfrac{\partial f}{\partial t}\Delta t$

$$+O[(\Delta t)^2]$$

$$V(t+\Delta t)=V(t)+\Delta V$$
$$=V(t)+\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t+O[(\Delta t)^2]$$

故
$$\Delta I=I(t+\Delta t)-I(t)$$
$$=\iiint\limits_{V(t+\Delta t)} f(x,y,z,t+\Delta t)\mathrm{d}V-\iiint\limits_{V(t)} f(x,y,z,t)\mathrm{d}V$$
$$=\iiint\limits_{V+\Delta V}\left[f(x,y,z,t)+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t\right]\mathrm{d}V-\iiint\limits_{V(t)} f(x,y,z,t)\mathrm{d}V$$
$$=\iiint\limits_{V}\left[f(x,y,z,t)+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t\right]\mathrm{d}V$$
$$+\iiint\limits_{\Delta V}\left[f(x,y,z,t)+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t\right]\mathrm{d}V-\iiint\limits_{V(t)} f(x,y,z,t)\mathrm{d}V$$
$$=\left(\iiint\limits_{V}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V\right)\Delta t+\iiint\limits_{\Delta V} f(x,y,z,t)\mathrm{d}V$$
$$+\left(\iiint\limits_{\Delta V}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V\right)\Delta t$$

由前式可见，上式末项为$O[(\Delta t)^2]$，而第二项中，ΔV是当t变到$(t+\Delta t)$时，$V(t)$的改变量，不难看出

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}S(v_n\Delta t)$$

且
$$\iiint\limits_{\Delta V} f(x,y,z,t)\mathrm{d}V=\iint\limits_{S} f(x,y,z,t)(v_n\Delta t)\mathrm{d}S+O[(\Delta t)^2]$$

通过$(v_n \Delta t)$时，$f(x,y,z,t)$是变动的，此处用固定的$f(x,y,z,t)$来代替，所产生的误差是与$[(\Delta t)^2]$同量级的，已并入到末项$O[(\Delta t)^2]$中，于是

$$\Delta I = \left(\iiint\limits_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} \mathrm{d}V\right) \Delta t + \left(\iint\limits_{s} f v_n\right) \Delta t + O[(\Delta t)^2]$$

两边除以Δt后取$\Delta t \to 0$时的极限，则得(1.1.2)。

注意其中的v_n是表面$S(t)$的外法线方向速度，该$S(t)$可以是非物质表面，故一般不能将其中的面积分用散度定理（奥高定理）化为体积分。若$S(t)$是物质表面时，由于物质表面$S(t)$的法线方向速度与该点处的流体质点在该点上$S(t)$的法线方向的速度投影相等，即$v_n = u_n = \vec{u} \cdot \vec{n}$，故有

$$\begin{aligned}\iint\limits_{s} f v_n \mathrm{d}S &= \iint\limits_{s} f u_n \mathrm{d}S \\ &= \iint\limits_{S} (f \vec{u}) \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S \\ &= \iiint\limits_{V} \nabla \cdot (f \vec{u}) \mathrm{d}V\end{aligned}$$

其中最后一步用到了散度定理

$$\iiint\limits_{V} \nabla \cdot \vec{Q} \mathrm{d}V = \iint\limits_{S} \vec{Q} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S$$

而$\vec{u}$为流体质点的速度。

因此，这时有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint\limits_{V(t)} f \mathrm{d}V \\ &= \iiint\limits_{V(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \vec{u})\right] \mathrm{d}V\end{aligned}$$

［证毕］

上述“物质表面”是指在变化过程中始终由原先的流体