高等专科学校试用教材

高等数学

中册

第二版

上海科学技术出版社

高等专科学校试用教材

高　等　数　学

（中　册）

第二版

上海市高等专科学校
《高等数学》编写组编

上海科学技术出版社

(沪)新登字108号

责任编辑　周玉刚

高等专科学校试用教材

高　等　数　学

(中　册)

第二版

上海市高等专科学校
《高等数学》编写组　编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行　　上海中华印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 11.5　字数 252,000

1985年5月第1版

1992年5月第2版　　1993年5月第9次印刷

印数 265,001—312,000

ISBN 7-5323-2701-9/O·154(课)

定价：3.10元

目　　录

第八章　数值计算初步

第一节　方程求根 ………………………………………… 1

一、迭代法 ………………………………………… 3

二、牛顿法 ………………………………………… 7

三、弦截法 ………………………………………… 10

习题 8-1 ………………………………………… 12

第二节　函数插值 ………………………………………… 13

一、拉格朗日插值公式 ………………………………………… 13

二、拉格朗日插值公式的误差估计法 ………………………………………… 18

三、分段插值法 ………………………………………… 20

习题 8-2 ………………………………………… 22

第三节　数值积分 ………………………………………… 23

一、梯形求积公式 ………………………………………… 23

二、抛物线求积公式 ………………………………………… 24

三、复化求积公式 ………………………………………… 25

四、变步长梯形法则 ………………………………………… 27

习题 8-3 ………………………………………… 30

第四节　常微分方程的数值解法 ………………………………………… 31

一、欧拉方法 ………………………………………… 31

二、改进的欧拉方法 ………………………………………… 33

三、龙格-库塔方法 ………………………………………… 36

四、误差的控制……39
习题 8-4……41

第九章 向量代数与空间解析几何

第一节 向量的概念及其线性运算……42
一、空间直角坐标系……42
二、向量的概念及其线性运算……44
三、向量的坐标表示式……47
习题 9-1……51
第二节 两向量的数量积、向量积……52
一、两向量的数量积……52
二、两向量的向量积……56
习题 9-2……61
第三节 平面与直线……63
一、平面……63
二、直线……67
三、位置关系……70
习题 9-3……74
第四节 曲面及空间曲线……76
一、曲面方程与曲线方程的概念……76
二、几种常见的曲面及其方程……78
三、二次曲面……83
四、空间曲线在坐标面上的投影……87
习题 9-4……88
复习题九……90

第十章 多元函数及其微分法

第一节 多元函数……94
一、多元函数的概念……94

二、二元函数的极限与连续性 …… 98
习题 10-1 …… 101
第二节 偏导数 …… 103
一、多元函数的偏导数 …… 103
二、高阶偏导数 …… 110
习题 10-2 …… 113
第三节 全微分 …… 115
一、全微分的定义 …… 115
二、全微分在近似计算中的应用 …… 119
习题 10-3 …… 121
第四节 多元函数的求导法则 …… 121
一、多元复合函数的求导法则 …… 121
二、隐函数的求导法 …… 128
习题 10-4 …… 133
第五节 偏导数的几何应用 …… 135
一、空间曲线的切线与法平面 …… 135
二、曲面的切平面与法线 …… 138
习题 10-5 …… 141
*第六节 方向导数与梯度 …… 141
一、方向导数 …… 141
二、梯度 …… 144
习题 10-6 …… 148
第七节 多元函数的极值 …… 149
一、多元函数的极值与最大值、最小值 …… 149
二、条件极值 …… 153
*三、最小二乘法 …… 158
习题 10-7 …… 161
复习题十 …… 163

第十一章　多元函数的积分

第一节　二重积分 …… 166
一、二重积分的概念和性质 …… 168
习题 11-1(1) …… 171
二、二重积分的计算 …… 172
习题 11-1(2) …… 188
三、二重积分的应用 …… 191
习题 11-1(3) …… 197
*第二节　三重积分 …… 198
一、三重积分的概念和性质 …… 198
二、三重积分的计算 …… 200
习题 11-2 …… 208
第三节　曲线积分 …… 211
*一、对弧长的曲线积分 …… 211
习题 11-3(1) …… 218
二、对坐标的曲线积分 …… 219
三、格林公式及其应用 …… 228
四、平面上的曲线积分与路径无关的条件 …… 232
习题 11-3(2) …… 239
*第四节　曲面积分 …… 241
一、对面积的曲面积分 …… 241
习题 11-4(1) …… 247
二、对坐标的曲面积分 …… 247
三、高斯公式 …… 256
习题 11-4(2) …… 259
复习题十一 …… 260

第十二章　无 穷 级 数

第一节　数项级数的概念及其性质 …………………… 265

一、数项级数的概念 ………………………………… 265

二、数项级数的性质 ………………………………… 268

三、级数收敛的必要条件 …………………………… 268

习题 12-1 ……………………………………………… 270

第二节　数项级数的审敛法 ………………………… 271

一、正项级数及其审敛法 …………………………… 271

二、任意项级数 ……………………………………… 277

习题 12-2 ……………………………………………… 281

第三节　幂级数 ……………………………………… 282

一、幂级数及其收敛性 ……………………………… 282

二、幂级数的运算性质 ……………………………… 289

习题 12-3 ……………………………………………… 291

第四节　函数展开成幂级数 ………………………… 291

一、泰勒(Taylor)公式 ……………………………… 291

二、泰勒级数 ………………………………………… 295

三、函数展开成幂级数 ……………………………… 298

四、幂级数的应用举例 ……………………………… 302

习题 12-4 ……………………………………………… 306

*第五节　傅里叶级数 ……………………………… 307

一、以 2π 为周期的函数展开成傅里叶级数 ……………… 307

二、$[-\pi,\pi]$或$[0,\pi]$上的函数展开成傅里叶级数 ……… 315

三、以 $2l$ 为周期的函数展开成傅里叶级数 ……………… 317

四、傅里叶级数的指数形式 ………………………… 319

习题 12-5 ……………………………………………… 322

复习题十二 …………………………………………… 323

附　录

附录一　习题答案……………………………………………… 325
附录二　……………………………………………………… 352
一、用牛顿法求方程$f(x)=0$的近似根的BASIC子程序…352
二、拉格朗日插值法的BASIC子程序 ……………………… 353
三、变步长梯形求积公式的BASIC子程序 ………………… 354
四、精度控制的改进欧拉方法的BASIC子程序 ………… 355
附录三　几个常用的立体图形……………………………… 357

第八章　数值计算初步

许多科学和工程技术问题归结成的数学模型往往非常复杂，难以求得其精确解，这时我们就必须采用近似方法。随着电子计算机的广泛应用，数值计算已成为求解数学问题的一种有效方法。

本章讨论方程求根、函数插值、数值积分和常微分方程的一些数值解法，并给出这些算法的框图。在本书的附录二中，我们给出了一些算法的 BAISC 程序。习题可上机计算，也可适当降低精度要求，采用人工笔算。

第一节　方 程 求 根

许多实际问题常常归结为求方程

$$f(x)=0$$

的根。除了一些简单的方程外，方程的根的精确值通常是不易求得的，于是需要求根的近似值。

具体求根往往分两步：

第一步　确定根的某个粗糙的近似值（称为“初始近似根”）；

第二步　将初始近似根逐步加工成满足精度要求的结果。

下面介绍寻求初始近似根的“逐步扫描法”。

方程 $f(x)=0$ 的根的分布情况可能十分复杂。我们假设 $f(x)$ 在某个区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根。于是从区间的左端点 $x=a$ 出发，按某个预定的步长 h，一步一步向右跨，每跨一步进行一次根的“扫描”，即检查每一步的起点 x_0 和终点 x_0+h 的函数值是否同号。如果发现它们异号，即

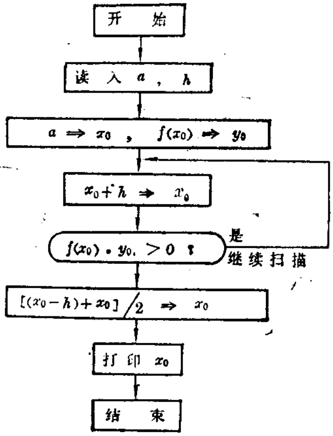

图 8.1

$$f(x_0)\cdot f(x_0+h)<0,$$

那么在区间 (x_0,x_0+h) 内必有方程的实根。这时可取 $\frac{1}{2}[x_0+(x_0+h)]$ 作为初始近似根。

图 8.1 所示的框图描述了寻求初始近似根的逐步扫描法。

例如，考察方程 $f(x)=x^3-x-1=0$。
注意到 $f(0)<0$，$f(2)=5>0$，可见方程至少有一个根在区间 $(0,2)$ 内。

从 $x=0$ 出发，取 $h=0.5$ 为步长向右进行根的扫描。我们发现 $f(1)<0$，$f(1.5)>0$，因此在区间 $(1,1.5)$ 内必有实根。可取 $x_0=\frac{1}{2}(1+1.5)=1.25$ 作为初始近似根。

显然，只有当 h 取得足够小时，才能得到所要求精度的近似根，但当 h 很小时，步数便相应增多，从而使计算量很大，

因此逐步扫描法一般只用来求方程的初始近似根。下面我们介绍几种使根逐步精确化的方法。

一、迭 代 法

简单迭代法(以下简称迭代法)是一种重要的逐步逼近方法。这种方法使用某个固定公式,反复校正根的近似值,使之逐步精确化,最后得到满足精度要求的结果。下面我们举例说明迭代法的求解过程。

例 1 求方程 $x^3-x-1=0$ 在 $x=1.25$ 附近的一个根。

将方程改写成下列形式

$$x=\sqrt[3]{x+1}. \tag{1}$$

将初始近似根 $x_0=1.25$ 代入(1)式的右端,得

$$x_1=\sqrt[3]{x_0+1}\approx 1.31037.$$

计算结果表明,x_0 并不满足方程(1)。再用 x_1 作为初始近似根代入(1)式的右端,又得

$$x_2=\sqrt[3]{x_1+1}\approx 1.32199.$$

由于 x_2 与 x_1 仍不相同,我们再取 x_2 作为初始近似根,并重复上述过程。如此继续下去,这种逐步校正的过程称为**迭代过程**,而迭代所使用的固定公式

$$x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k+1}\ ,\ (k=0,1,2,\cdots)$$

称为**迭代格式**。

表 8-1 记录了各步迭代的结果。如果仅取 6 位数字,那么 x_7 与 x_8 完全相同, 这时 可以认为 x_8 实际上已满足方程(1),从而得到所求的根为

$$x^*=1.32472.$$

对于一般形式的方程 $f(x)=0$,我们先设法将它化为下

表 8-1

k	x_k	k	x_k
0	1.25	5	1.32470
1	1.31037	6	1.32471
2	1.32199	7	1.32472
3	1.32420	8	1.32472
4	1.32462		

列形式

$$x = g(x)。\tag{2}$$

如果给出根的某个近似值 x_k，把它代入(2)式的右端，则得

$$x_{k+1} = g(x_k)。\tag{3}$$

这样，从给定的初始近似值 x_0 出发，按公式(3)可以得到一个数列

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots。$$

如果这个数列有极限，则称迭代格式(3)是**收敛的**，这时此数列的极限

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_k$$

就是方程(2)的根。

然而，迭代过程并不总是收敛的。例如，方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 的另一种等价形式为

$$x = x^3 - 1。$$

得迭代格式

$$x_{k+1} = x_k^3 - 1。$$

迭代初值仍取 $x_0 = 1.25$，则有

$x_1 = 0.953125$，$x_2 = -0.134136$，$x_3 = -1.002413$，

$x_4 = -2.007258$，$x_5 = -9.087410$，$x_6 = -751.44769$。

继续下去，结果会越来越小，不可能趋向于某个极限。这种不收敛的迭代过程称作是**发散的**。

关于迭代格式的收敛性有下述定理：

定理（迭代收敛定理） 设 x^* 是方程

$$x = g(x)$$

的根，如果 $g(x)$ 在 x^* 的某个邻域 U 内具有连续的一阶导数，并且对于所有的 $x \in U$，都有

$$|g'(x)| \leqslant q < 1,$$

其中 q 为某个正数，那么迭代格式 $x_{k+1} = g(x_k)$ 对于任意初值 $x_0 \in U$ 均收敛，并且 q 的值越小，收敛的速度越快。

证明 略。

对于一个收敛的迭代过程，虽然理论上可以通过 x_k 的极限得到精确解，但在实际计算时，我们只能迭代有限多次，因此有个迭代控制的问题。

在上述定理的条件下，可以得到下列误差估计式

$$|x^* - x_k| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_k - x_{k-1}|.$$

此估计式表明，只要相邻两次迭代值的偏差 $|x_k - x_{k-1}|$ 相当小，就可以保证迭代误差 $|x^* - x_k|$ 足够小，因此常用条件

$$|x_k - x_{k-1}| < e \tag{4}$$

来控制迭代过程的结束。

迭代法的一个突出优点是算法的逻辑结构简单。下列框图（图 8.2）描述了迭代格式 $x_{k+1} = g(x_k)$ 的计算过程，其中 x_0 和 x_1 分别表示每步迭代的初值和终值。

例 2 求方程 $xe^x - 1 = 0$ 在 $x = 0.5$ 附近的一个根，要求

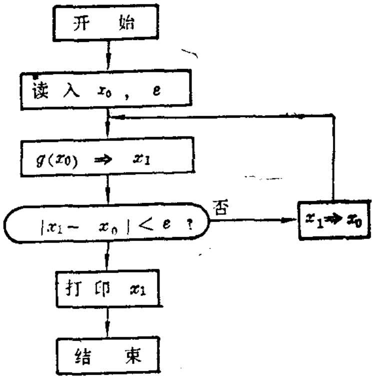

图 8.2

精度 $\varepsilon=10^{-3}$。

解 将方程改写成下列形式

$$x=e^{-x}.$$

由逐步扫描法（取步长 $h=0.1$），发现所求的根在区间 $(0.5,0.6)$内。由于在根的附近有

$$|(e^{-x})'|\leqslant e^{-0.5}<1.$$

表 8-2

k	x_k	x_k-x_{k-1}	k	x_k	x_k-x_{k-1}
0	0.5		6	0.56486	−0.00631
1	0.60653	0.10653	7	0.56844	0.00358
2	0.54524	−0.06129	8	0.56641	−0.00203
3	0.57970	0.03446	9	0.56756	0.00115
4	0.56006	−0.01964	10	0.56691	−0.00065
5	0.57117	0.01111			

因此迭代格式

$$x_{k+1}=e^{-x_k}$$

对于初值 $x_0=0.5$收敛。

迭代结果见表8-2，其中最末一个结果x_{10}满足精度要求。

二、牛 顿 法

牛顿法是求解方程

$$f(x)=0$$

的一种重要的迭代法。这种方法的基本思想是设法将非线性方程 $f(x)=0$，转化为某种线性方程来求解。

设 x_0 是方程 $f(x)=0$的一个近似根，我们用函数$f(x)$在 x_0 处的微分 $f'(x_0)(x-x_0)$ 来近似代替函数的改变量$f(x)-f(x_0)$，即 $f(x)-f(x_0)\approx f'(x_0)(x-x_0)$，则

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

于是得原方程的近似方程

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0,$$

它是一个线性方程。把它的根

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

作为原方程 $f(x)=0$ 的一个新的近似根。重复上述方法，可得

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

一般地，有迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \tag{5}$$

这种迭代方法称为**牛顿迭代法**。

牛顿法有明显的几何意义：方程 $f(x)=0$ 的根 x^* 在几何上是曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点的横坐标。设 x_k 是 x^* 的某个近似值。曲线 $y=f(x)$ 上点 $P_k(x_k, f(x_k))$ 处的切线方程为

$$y=f(x_k)+f'(x_k)\ (x-x_k).$$

此切线与 x 轴的交点的横坐标正就是由牛顿迭代格式 (5) 所确定的

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

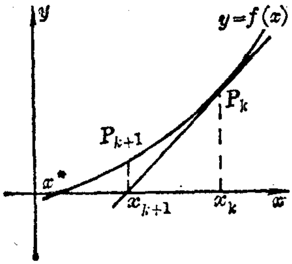

图 8.3

所以牛顿法就是以曲线在 P_k 处的切线与 x 轴的交点近似代替曲线与 x 轴的交点，因此牛顿法又称切线法（图 8.3）。

可以证明，如果 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的一个单根，且 $f(x)$ 在 x^* 的邻近具有连续的二阶导数，那么只要初始近似根 x_0 充分靠近 x^*，牛顿格式一定收敛。进一步还可以证明，牛顿法的收敛速度是很快的。

从牛顿迭代格式(5)知，牛顿法的迭代函数是

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)},$$

所以只要在简单迭代法框图（图 8.2)中，以 $x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ 代替 $g(x)$，就得牛顿法的框图。

例 1 用牛顿法求方程 $xe^x-1=0$ 在 $x=0.5$ 附近的一个根。

解 因为 $f(x)=xe^x-1$，$f'(x)=e^x+xe^x$，所以方程的牛顿法迭代格式为