现代科技管理讲义

数学基础

主　编　吴云从

江苏省科学技术干部局

一九八二年十二月

前　言

《现代科技管理讲义》一、二、三册，是我局举办“工程师现代科技管理进修班”的教材。本教材的教学对象为具有大专以上学历、在企事业单位或主管部门从事科技管理工作的工程技术干部。授课时数为300——400课时，其中：一、数学基础部份为120——160课时。《线性代数》着重介绍基本知识，为学习现代化管理课程打下必要的基础。《概率论与数理统计》，着重介绍管理工作中常用的、重要的几个随机变量的分布及其指标运算和随机变量参数估计以及假设检验的几个基本方法，为学习现代化管理课程提供必要的概率统计基础。二、管理数量方法部份为100——120课时。着重介绍现代化管理方面较有用的运筹学知识，培养学员掌握科学管理的方法。三、市场与开发部份为80—— 100课时。着重介绍市场预测、产品开发、价值工程、技术经济分析等知识，培养学员具有分析和解决实际问题的能力。

学员学完上述课程后，经考试成绩及格者，应承认其基本符合工程师(管理)条件中“具有一定的现代化科技管理知识”的要求。

为满足全省广大科技管理干部学习的需要，我们请编写的同志在两期教学实践的基础上，将教材加以整理、修改后付印，在内部发行。本讲义可作为广大科技干部自学材料，各单位举办“工程师现代科技管理进修班”的教材，供技术职称评委会评定工程师(管理)职称作参考。

现代化科技管理知识，内容很丰富，而编写讲义的同志，因受教学对象、课时的限制，故讲义无论在系统性、连贯性、完整性以及理论结合实际等方面都还不够完善。希望全省科技干部和有关领导同志，在学习和运用中，不断向我们提出改进意见。我们准备在适当时候再组织力量进行修订，使之逐步完善起来。

主持和参加讲义编写工作的成员，有高级工程师郇伯翔、付教授吴云从，讲师刘君健、张培良、孙东川，工程师吕桐生、薛世安、王诚信等同志。他们是在日常的教学、工作之余进行编写工作的。对他们这种热情为科技干部服务的精神，我们深表敬意；对编者所在单位给予的大力支持，我们表示感谢。

江苏省科学技术干部局

一九八二年十二月

目　　录

第一章　行　列　式

行列式是线性代数的基本内容，它在自然科学及工程技术中都有着广泛的应用，行列式的概念起源于二元及三元线性联立方程组的解法。在讨论线性方程组时，引进行列式概念后，能够使得解的表达式简单，便于记忆，并且容易推广到多个变量的情形。

在本章中着重讨论：行列式概念，性质，用行列式解线性方程组等。

§ 1·1　行列式的概念

(一)二元方程组与二阶行列式

设有两个未知数x_1、x_2的二元一次联立方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1·1·1}$$

要求出方程组(1·1·1)的解，就要设法消去一个未知数，得到只含一个未知数的一元一次方程，从而就能找出所求的解。

为了消去x_2，可用a_{22}去乘(1·1·1)的第一个方程，而用$-a_{12}$去乘(1·1·1)的第二个方程，然后相加，就得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12} \tag{1·1·2}$$

同理，在(1·1·1)中消去x_1可得：

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21} \tag{1·1·3}$$

假设$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，由(1·1·2)，(1·1·3)两式立即解得：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1·1·4}$$

经直接验算，便知：由(1·1·4)式所确定的x_1、x_2满足方程组(1·1·1)，因此，(1·1·4)式是方程组(1·1·1)的解。

为了便于记忆，现在来研究一下(1·1·4)式的结构，找出它的规律。从(1·1·4)式可看出x_1，x_2的分母是相同的，都等于$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，且不含有方程组(1·1·1)右端的常数项$b_1$、$b_2$，而只由方程组(1·1·1)的系数所决定。现在将这些系数按它们在方程组中的原位置写出，并在两侧各加一直线，用符号

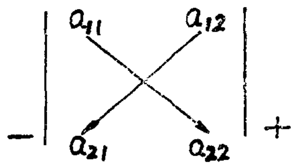
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}。 \tag{1·1·5}$$

符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称之为二阶行列式，它含有两行、两列，横的叫行，竖的叫列。a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}叫做行列式的元素，a_{12}称为第一行第二列的元素，余此类推。行列式有两条对角线，一条是从左上角至右下角，称主对角线，另一条是从右上角至左下角，称副对角线。（1·1·5）式右端的第一项$a_{11}a_{22}$是主对角线上两元素的乘积，取正号；第二项$a_{12}a_{21}$是副对角线上两个元素的乘积，取负号，以下图示意：



（图1·1·1）

我们将 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为方程组（1·1·1）的系数行列式，简记为D，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}。$$

其次，从（1·1·4）式右端分子可知将$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$中的$a_{11}$，$a_{21}$依次换为$b_1$，$b_2$就得到$x_1$的分子，将$a_{12}$，$a_{22}$依次换为$b_1$，$b_2$就得到$x_2$的分子，我们可用$D_1$，$D_2$来表示它们：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

于是(1·1·4)式便可写为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases} \qquad (1·1·6)$$

这样，用行列式表示的二元一次联立方程组的解，既简单，又便于记忆。这里要指出：(1·1·6)式只有当$D\neq 0$时才成立。

例1·1·1　解方程组：$\begin{cases} 3x_1-5x_2=4 \\ 2x_1+7x_2=13 \end{cases}$

解：$\because$ $D=\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=21-(-10)=31\neq 0$

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 13 & 7 \end{vmatrix}=28+65=93$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}=39-8=31$$

故由公式(1·1·6)得：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{93}{31}=3 \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{31}{31}=1 \end{cases}$$

（二）三元一次方程组与三阶行列式

再看含三个未知数x_1，x_2，x_3的三个方程所组成的方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \qquad (1\cdot1\cdot7)$$

为了求得(1·1·7)式的解，可消去(1·1·7)中的任两个未知量，使之成为含一个未知数的方程。例如把(1·1·7)式的第一、二、三个方程分别用$a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$，$a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$，$a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$去乘，然后再加起来，结果可知$x_2$，$x_3$的系数都等于零，而得到等式：

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3.$$

所以，当

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$$

时，就得到

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

用类似的方法，可得到

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

这就是说：当$D\neq 0$时，方程组(1·1·7)如果有解，这解必是上面那样的形状。将这样的x_1，x_2，x_3的值代入方程组(1·1·7)，也容易验证它们确是(1·1·7)的解。

同前面一样，为了便于记忆这公式，我们要从这些表达式中寻找这些字母间的规律。

首先，我们看到x_1，x_2，x_3的表达式里分母都等于D；如同二阶行列式一样将这些系数按在原方程中的位置排列下来，用符号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (1\cdot1\cdot8)$$

来表示，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31};$$

(1·1·8)中含有三行、三列，我们把(1·1·8)称之为三阶行列式。

显然，x_i的表达式之分子，是将D中凡x_i之系数a_{1i}，a_{2i}，a_{3i}，分别用b_1，b_2，b_3去替换而成的。亦可表示为：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix};$$

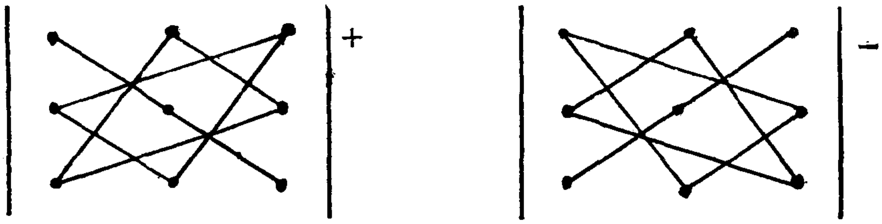
$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}。$$

引用三阶行列式的记号，对方程组(1·1·7)，当D≠0时，它的唯一的一组解就可写成：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \end{cases} \qquad (1\cdot1\cdot9)$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}。$$

三阶行列式可按对角线法则计算。在三阶行列式的展开式中，有三项取正号，三项取负号，每项都是不同行不同列的三个元素连乘积，并附上正负号。计算法则可用下面的(图1·1·2)表示，左图三项取正号，右图三项取负号，这种计算法称为对角线法则。



(图1·1·2)

以上对角线法则只适应于二阶、三阶行列式的计算，对于高阶行列式并不适用。

例1·1·2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 之值。

解：
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1\times1\times1+2\times2\times2+3\times3\times3-2\times1\times3-1\times2\times3-2\times3\times1$$
$$=1+8+27-6-6-6=18$$

例1·1·3 解方程组：
$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-1 \\ x_1+x_2+x_3=6 \\ 3x_1+x_2-2x_3=-1 \end{cases}$$

解：首先计算行列式D，D_1，D_2，D_3.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-4+1-9-3-2-6=-23\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2+6+3+1+1-36=-23$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}=-24-1-3-18+2-2=-46$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2-1-54+3-12-3=-69$$

由公式(1·1·9)得：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-23}{-23}=1 \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-46}{-23}=2 \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{-69}{-23}=3 \end{cases}$$

(三)n阶行列式

上面，我们从讨论二元一次方程组与三元一次方程组的解法引出了二阶、三阶行列式的概念。为了求解n元线性方程组，必须引进n阶行列式的概念。对计算高阶行列式用对角线法已不再适用，所以我们要设法找出一般n阶行列式的降阶方法。

在计算三阶行列式时，除了用对角线法以外，也可以用降阶的方法。例如：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

这可看成行列式按第一行展开，它将三阶行列式的计算化为二阶行列式的计算，这种展开法还可以对任一行或任一列进行。

为了掌握n阶行列式用降阶法展开的规律，我们先引进子式和代数余子式的概念。

定义1·1·1　在一个n阶行列式D中任意取定k个行和k个列，位于这些行列相交处的元素所构成的k阶行列式叫做行列式D的一个k阶子式。

例1·1·4　在四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中取定第二行和第三行，第一列和第四列，那么位于这些行列相交处的元素就构成D的一个二阶子式，记为：

$$M=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}$$

定义1·1·2　n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

的某一元素a_{ij}的余子式(简称这一元素的子式)M_{ij}是在D中划去a_{ij}所在行和列后所余下的$n-1$阶子式。

例1·1·5　在例1·1·4中a_{23}的余子式是:

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

定义1·1·3　n阶行列式D的元素a_{ij}的代数余子式A_{ij}是$(-1)^{i+j}M_{ij}$. 即$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

例1·1·6　在例1·1·4中a_{23}的代数余子式是

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

运用代数余子式的概念，n阶行列式还可用这种降阶法来定义它。

定义1·1·4　n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots\cdots+a_{in}A_{in}$$

(按第i行展开)$(i=1,2,\cdots\cdots,n)$

其中A_{ij}为a_{ij}的代数余子式。

这样，我们将n阶行列式的计算归结为$n-1$阶行列式的计算，循此下去，就可以算出n阶行列式的值。

例1·1·7　计算四阶行列式的值:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

解: 根据定义，将D按第一行展开，得:

$$D=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&1&2\\1&3&1\\3&1&3\end{vmatrix}=-8-16-8=-32$$

§1·2 行列式的性质

上节我们讨论了n阶行列式的概念，并用降阶法定义了n阶行列式。但根据定义计算n阶行列式往往是非常繁杂的，因此，有必要对行列式的性质进行研究，以便利用这些性质简化行列式的计算。

设n阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots\cdots a_{1n}\\a_{21}&a_{22}\cdots\cdots a_{2n}\\\cdots\cdots&\cdots\cdots\\a_{n1}&a_{n2}\cdots\cdots a_{nn}\end{vmatrix}$$

若把D的行变为列，就得到一个新的行列式，记为：

$$D'=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}\cdots\cdots a_{n1}\\a_{12}&a_{22}\cdots\cdots a_{n2}\\\cdots\cdots&\cdots\cdots\\a_{1n}&a_{2n}\cdots\cdots a_{nn}\end{vmatrix}$$

D′称为D的转置行列式。

性质1．行列式和它的转置行列式相等，即

$$D=D' \tag{1·2·1}$$

由此我们可以得到，凡是对于行列式的行成立的性质，对于列也同样成立，反之亦然。

性质2．两行(两列)元素互换，行列式值变号，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}\cdots a_{1j}\cdots a_{1K}\cdots a_{1n}\\a_{21}\cdots a_{2j}\cdots a_{2K}\cdots a_{2n}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}\cdots a_{nj}\cdots a_{nK}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{11}\cdots a_{1K}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n}\\a_{21}\cdots a_{2K}\cdots a_{2j}\cdots a_{2n}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}\cdots a_{nK}\cdots a_{nj}\cdots a_{nn}\end{vmatrix} \tag{1·2·2}$$

推论1：如果行列式某两行(两列)完全相同，则行列式的值为零。

因为将行列式中该两行(列)互换，行列式不变；另一方面，由性质2知，它们又应当变号，所以D＝－D，于是2D＝0，D＝0．

性质3．行列式中某行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号之外，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots\cdots a_{1n}\\\vdots&\vdots\qquad\vdots\\\lambda a_{i1}&\lambda a_{i2}\cdots\cdots\lambda a_{in}\\\vdots&\vdots\qquad\vdots\\a_{n1}&a_{n2}\cdots\cdots a_{nn}\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots\cdots a_{1n}\\\vdots&\vdots\qquad\vdots\\a_{i1}&a_{i2}\cdots\cdots a_{in}\\\vdots&\vdots\qquad\vdots\\a_{n1}&a_{n2}\cdots\cdots a_{nn}\end{vmatrix} \tag{1·2·3}$$

当λ＝0时，得到如下结论：

推论2：如果行列式有一行(列)的元素为零，则行列式的值为零。

性质4．如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例，则行列式的值为零，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots\cdots a_{in} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2}\cdots\cdots \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1\cdot2\cdot4)$$

性质5．某一行(列)的各元素如果是两数之和，则可把这行列式化为两个行列式的和，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2}\cdots\cdots a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots\cdots a_{in} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ b_{i1} & b_{i2}\cdots\cdots b_{in} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1\cdot2\cdot5)$$

性质6．某行(列)的每个元素加上另一行(列)对应元素的λ倍，行列式值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2}\cdots\cdots a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{j1} & a_{j2}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{jn} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots\cdots a_{in} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{j1} & a_{j2}\cdots\cdots a_{jn} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1\cdot2\cdot6)$$

据性质5．并由性质4，就知道

$$\text{上式左端} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots\cdots a_{in} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{j1} & a_{j2}\cdots\cdots a_{jn} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{j1} & a_{j2}\cdots\cdots a_{jn} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{j1} & a_{j2}\cdots\cdots a_{jn} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots\cdots a_{in} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{j1} & a_{j2}\cdots\cdots a_{jn} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \text{右端}$$

例1·2·1　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

解： 利用性质6可以将第一行上元素除1以外其他元素都化为零。为此，将第一列乘(−2)加到第二列上去，第一列乘1加到第三列上去，第一列乘(−3)加到第四列上去，便得到：

一列乘(-1)加到三列

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3(-6)=18$$

性质7. 行列式D等于它的任一行(列)的元素与其对应的代数余子式的乘积之和。即

$$D=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ A_{ij} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

或

$$D=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ A_{Kj} \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

性质8. 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零。即

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\ A_{jK}=0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}\ A_{Kj}=0 \end{cases} \qquad (i\neq j) \qquad\qquad (1\cdot2\cdot7)$$

以上性质在n＝2或3时，可用直接展开法证明。对于一般的n阶行列式可以用数学归纳法证明。

例1·2·2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解： 按第一行展开得：

$$D=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ \vdots & \ddots \\ a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad =a_{11}a_{22}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ \vdots & \ddots \\ a_{n3}\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots\cdots a_{nn}$$

同样可得：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots\cdots a_{nn}$$

象这样的行列式都可按行(列)展开逐次降阶的方法来求得结果，此行列式我们称之为三角形行列式。

位于行列式主对角线以上的元素均为零时，此行列式称为下三角形行列式，位于主对角线以下的元素均为零时，此行列式称为上三角形行列式。此例说明：

三角形行列式等于主对角线上元素的乘积。

例１.２.３　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

解：将D化为三角形行列式计算。为此，用第一行分别乘(—２)，(—３)，5加到第二行，第三行，第四行得：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 0 & 16 & -10 & 11 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 16 & -10 & 11 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \end{vmatrix}$$

第二行分别乘以(—８)，12，加到第三行，第四行上去得：

$$D=5\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \end{vmatrix}$$

再将第三行乘以３加到第四行上去得：

$$D=5\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5\times 1\times 2\times(-2)\times 2=-40$$

将行列式化为三角形行列式是行列式计算中的一种较好的方法。

习　　题　　一

1．计算三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} o & a & o \\ b & o & c \\ o & d & o \end{vmatrix}$

2．把行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

依第三行展开，然后加以计算。

3．计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 16 & 9 & 4 & 1 \\ 64 & 27 & 8 & 1 \end{vmatrix}$。

4．计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$。

5．证明下列论述：

(1)已知204，527与255都能被17整除，求证，三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

也能被17整除；