中等专业学校试用教材

招收高中毕业生的工科专业通用

高等数学

（选学部分——矩阵与线性方程组）

罗崇蓮　朱鋐道　编

高等教育出版社

中等专业学校试用教材
招收高中毕业生的工科专业通用

高等数学

(选学部分——矩阵与线性方程组)

罗崇蘧 朱铨道 编

*

高等教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
崇明大同红卫印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 3.125 字数 60,000
1983 年 1 月第 1 版 1984 年 8 月第 3 次印刷
印数 80,001—100,000

书号 13010·0851 定价 0.27 元

内 容 提 要

本书内容包括n阶行列式、矩阵与线性方程组，供招收高中毕业生的工科中专有关专业试用。

编者的话

本书根据1982年教育部审定的中专《数学教学大纲(试行草案)》(招收高中毕业生的工科专业通用)编写成的,与《高等数学(公共部分)》配套,供工科中专有关专业试用.

本书是在高中已学过二、三阶行列式和二、三元线性方程组的基础上,按照《大纲》要求,对 n 阶行列式、矩阵与线性方程组作了扼要的通俗易懂的叙述,并配有较多的例、习题,以便教学选用.书中小字部分及带*号的习题不作基本要求,只供学有余力的读者选读、选用.

本书由北京工业学院孙树本主审,参加审稿的有索润普、陈倚彰、王维锦、杨裕生等同志.他们提出了许多中肯的意见,谨致以诚挚的谢意.

本书由罗崇莲、朱铉道编写.限于编者水平,编写时间仓促,书中定有不少缺点和错误.恳切希望读者批评、指正.

编　者

1982年10月

目 录

§1 n阶行列式

一、n阶行列式的定义

在中学代数中，解二元、三元线性方程组时，引出了二阶、三阶行列式.

为了说理方便起见，我们用a_{ij}表示行列式中第i行第j列的元素. 利用这种记法可把二阶、三阶行列式写成:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{2}$$

在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中，划去$a_{ij}(i=1, 2, 3;\ j=1, 2, 3)$所在的行和列的元素，余下的元素按原来的次序构成一个二阶行列式，称为元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}; 并称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素a_{ij}的代数余子式，记作A_{ij}，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

例如，元素a_{23}的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

由三阶行列式的展开式(2)，不难得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

即一个三阶行列式可以表示成第一行的元素与对应于它们的代数余子式的乘积之和． 也就是说，一个三阶行列式可以由相应的三个二阶行列式来定义．

如果我们把由单独一个元素 a 组成的行列式看作是 a 本身，并称之为一阶行列式，即 $|a|=a$①，那末由(1)式可知，二阶行列式实际上也可以由相应的两个一阶行列式来定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}|a_{22}|-a_{12}|a_{21}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$$

仿此，把四阶行列式定义为：

---

① 这里，$|a|$ 表示行列式，而不是绝对值．

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}
$$

$$
+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}
$$

在定义了四阶行列式后，可以类似地用 5 个四阶行列式来定义五阶行列式，依此类推，一般地，可用 n 个 $n-1$ 阶行列式来定义 n 阶行列式．这种定义方法叫做递归定义法．我们用

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

表示一个 n 阶行列式，其中元素 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 都是数．

定义 设 $n-1$ 阶行列式已经定义，则规定 n 阶行列式

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} \qquad (3)
$$

其中 A_{1j} 为元素 $a_{1j}(j=1, 2, \cdots, n)$的代数余子式(它是一个 $n-1$ 阶行列式),即

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$$

$$=(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(3)式称为 n 阶行列式的展开式.

例 1 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

解 由(3)式,得

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+(-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=1\cdot 3-0+(-2)\cdot 9-1\cdot(-3)$$

$$=-12$$

例 2 计算

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} c & d & 0 \\ e & f & 0 \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 0 & c & d \\ 0 & e & f \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= acfh - adeh - bcfg + bdeg$$

例 2 表明："对角线展开法"只适用于二、三阶行列式，对四阶(及四阶以上的)行列式失效.

例 3 计算下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0\cdot A_{12} + \cdots + 0\cdot A_{1n}$$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

二、行列式的性质

对于阶数较高的行列式，根据定义进行计算，其计算量十分庞大．下面所叙述的 n 阶行列式的各性质（也就是三阶行列式的性质）可以简化行列式的计算．

性质 1 把行列式的行与相应的列互换，行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这个性质说明了行列式中行、列地位的对称性．由此可知：行列式中有关行的性质对列也同样成立；反过来也对．因此，下面的各性质，都只提及行．

例 4 证明：上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

解 由性质 1 及例 3 的结果，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

上、下三角行列式统称为**三角行列式**．由例 3、4 可知：三角行列式等于主对角线①上元素的乘积．

① 从左上角到右下角的这条对角线．

性质 2 对换行列式中任意两行的位置，行列式反号，即

$$\begin{array}{l}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (\text{第 } p \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } q \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (\text{第 } p \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } q \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

推论 若行列式有两行相同①，则此行列式等于零.

事实上，设行列式 D 有两行相同，则根据性质 2，对换这两行后所得的行列式应等于 $-D$. 又因这两行是相同的，故对换后的行列式又等于原行列式 D，所以有 $D=-D$，移项得 $2D=0$，即 $D=0$.

性质 3 用数 k 乘行列式的某一行等于用 k 乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{p1} & ka_{p2} & \cdots & ka_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

或者说，行列式中某一行如有公因子，可以把这公因子提到行列式的记号外面.

推论 1 若行列式中有一行为零，则此行列式等于零.

推论 2 若行列式中有两行成比例，则此行列式等于零.

推论 2 可由性质 3 及性质 2 的推论推得.

---

① 指这两行中对应于同一列的两元素都相同.

性质 4　若行列式中某一行（如第 p 行）是两组数的和，则此行列式等于两个行列式之和，这两个行列式分别以这两组数之一为相应行（第 p 行），而其余各行不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1}+a'_{p1} & a_{p2}+a'_{p2} & \cdots & a_{pn}+a'_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{p1} & a'_{p2} & \cdots & a'_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由性质 4 及性质 3 的推论 2 容易得到下列性质 5.

性质 5　把某一行乘数 k 加到另一行上，行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1}+ka_{q1} & a_{p2}+ka_{q2} & \cdots & a_{pn}+ka_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

利用性质 1、2 及行列式的定义，可以得到行列式按任意一行（列）展开的性质：

性质 6　行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行(列)的各元素与对应的代数余子式的乘积之和，即按行

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{4}$$

或按列

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{5}$$

事实上，将 D 的第 i 行逐次与它上一行对换位置，这样经 $i-1$ 次后第 i 行换到了第一行的位置，而其余各行顺序不变．根据性质 2，这个新行列式乘以 $(-1)^{i-1}$ 后等于 D，再将新行列式按(3)式(即按第一行)展开，得

$$D=(-1)^{i-1}[a_{i1}M_{i1}-a_{i2}M_{i2}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{in}M_{in}]$$

$$=(-1)^{i-1}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(-1)^{1+k}M_{ik}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik}\text{①}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$$

这就证明了 D 可以按任意一行(第 i 行)展开，即(4)式成立．再由性质 1 知，它也可以按任意一列(第 j 列)展开，即(5)式成立．

① 这里用到了 $\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k$，它就是 $\lambda(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\lambda a_1+\lambda a_2+\cdots+\lambda a_n$，即乘法对加法的分配律．

例 5 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}\text{(从各列提公因子)}$$

$$=\frac{1}{36}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}\text{(第 1 行乘 2 加到第 4 行上)}$$

$$=-\frac{1}{36}\begin{vmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}\text{(按第 2 列展开)}$$

$$
=-\frac{1}{36}\begin{vmatrix}-7 & 0 & -4\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 5\end{vmatrix}\text{（第 2 行乘 }-6\text{ 加到第 1 行上）}
$$

$$
=-\frac{1}{36}\begin{vmatrix}-7 & -4\\ 3 & 5\end{vmatrix}\text{（按第 2 列展开）}=-\frac{1}{36}(-23)=\frac{23}{36}
$$

例 5 的计算方法具有一般性，其特点是：用行列式性质把某行（或列）变为只有一个非零元素，然后再按该行（或列）展开．多次运用这种方法可把阶数较高的行列式降为三阶、二阶行列式．

例 6 计算 n 阶行列式

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\
1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\
1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3\\
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 4\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n
\end{vmatrix}
$$

解 变为三角行列式来计算：

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\
1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\
1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3\\
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 4\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\
1 & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\
1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 3\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1
\end{vmatrix}
\text{（第 1 列乘 }-1\text{ 加到其余各列上）}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\
1 & 1 & 1 & 2 & \cdots & 2\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
1 & 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2
\end{vmatrix}
\text{（第 2 列乘 }-1\text{ 加到其后各列上）}
=\cdots=
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1
\end{vmatrix}
=1
$$

例 7　计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & a \\ a & a & b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & b \end{vmatrix}$$

解　这个行列式的特点是各行(列)元素之和都是 $(n-1)a+b$. 利用这个特点，把其余的行都加到第一行上，得

$$\begin{vmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & a \\ a & a & b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} (n-1)a+b & (n-1)a+b & (n-1)a+b & \cdots & (n-1)a+b \\ a & b & a & \cdots & a \\ a & a & b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$=[(n-1)a+b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & b & a & \cdots & a \\ a & a & b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & b \end{vmatrix} \text{(提公因子)}$$

$$=[(n-1)a+b]\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b-a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & b-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & 0 & 0 & \cdots & b-a \end{vmatrix} \text{(第1列乘 }-1\text{ 加到其余各列上)}$$

$$=[(n-1)a+b](b-a)^{n-1}$$

例 8　若 n 是大于 1 的自然数，求证：