奥林匹克解题宝典

数学

初二

解题指要

典型题析

专题训练

陈竞新 主编

黄培杰 陈民 编写

执信中学

ZHIXINZHONGXUE

新世纪出版社

奥林匹克解题宝典

数学

初二

ZHIXINZHONGXUE

执信中学

陈竟新 主编

黄培杰 陈民 编写

新世纪出版社

责任编辑：刘永光
封面设计：高豪勇
责任技编：王建慧

奥林匹克数学解题宝典

初二

陈竞新 主编

黄培杰　陈　民 编写

出版发行：新世纪出版社
经　　销：新 华 书 店
印　　刷：广东新华印刷厂
厂　　址：广州市永福路44号
规　　格：787毫米×1092毫米　1/16　15.5印张　310千字
版　　次：2002年6月第1版
印　　次：2002年6月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-5405-2466-9/G·1603
定　　价：18.00元

目　录

第一讲　因式分解（一）

解题指要

因式分解是中学数学中的一种最重要的恒等变形，它常常是代数式化简、求值以及解方程的关键步骤之一．因式分解常用的方法有提取公因式法、公式法、分组分解法、十字相乘法及求根法，除此以外还有一些方法和技巧对解决有关的问题有着重要的作用．本讲主要介绍这些技巧和方法．

1．公式法

常用公式：

（1）$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

（2）$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

（3）$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

（4）$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

（5）$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

$$\text{或} = (a+b+c)[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)]$$

（6）$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac = (a+b+c)^2$

（7）当 n 为奇数时，$(a+b)[a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + (-1)^{n-2}ab^{n-2} + b^{n-1}] = a^n + b^n$

（8）当 n 为正整数时，$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$

2．拆、添项法

在因式分解的过程中，有时不能直接提取公因式或应用公式求解，这时就要对所要分解的多项式进行适当的变形，比如将一个项拆成两个项或两个以上的项．如何拆项和添项依赖于对题设代数式的特点的观察和分析，且拆项或添项后能进行提取公因式或用公式法求解．

3．待定系数法

将要分解的多项式表示成另一种含有待定系数的新形式，得到一个恒等式，然后根据多项式恒等的性质，列出几个含有待定系数的方程组，解方程组就可以求出待定系数，或者通过这些方程得到某些系数之间所满足的关系的式子．这种方法叫做待定系数法．它的理论依据是多项式恒等定理：

$$\text{若 } a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0,$$

那么　$a_n = b_n$，$a_{n-1} = b_{n-1}$，$a_{n-2} = b_{n-2}$，…、$a_1 = b_1$，$a_0 = b_0$．

4．换元法

换元法就是把一个复杂的代数式中的某些部分看成一个整体，并用新的字母来代替它，使原式简化，便于观察和分解．

5．主元法

在处理含有多个元素的数学问题时，可根据题目的特点，选择一个或几个元素作为主要元素，给予特殊的地位，从而得到较好的效果．这种方法称为主元法．

典型例题讲解

例一 多项式 $a^3-b^3+c^3+3abc$ 有因式（　　）．

A．$a+b+c$　　　　B．$a-b+c$

C．$a^2+b^2+c^2-bc+ca-ab$　　　　D．$bc-ca+ab$

解：选 B．直接运用前面的公式可得．

例二 分解因式 $(a-x)^3+(b-x)^3-(a+b-2x)^3$．

解法一：原式 $=(a-x)^3+(b-x)^3+(2x-a-b)^3=(a-x+b-x+2x-a-b)[(a-x)^2+(b-x)^2+(2x-a-b)^2-(a-x)\cdot(b-x)-(a-x)(2x-a-b)-(b-x)(2x-a-b)]+3(a-x)(b-x)(2x-a-b)=3(a-x)(b-x)(2x-a-b)$

解法二：原式 $=(a-x)^3+(b-x)^3-[(a-x)+(b-x)]^3=(a-x)^3+(b-x)^3-(a-x)^3-3(a-x)^2(b-x)-3(a-x)\cdot(b-x)^2-(b-x)^3$（然后提取公因式可得）．

例三 分解因式 $(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^n)^2x^n$（$x\neq 1$，$n$ 为正整数）．

分析：$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$．

解：
$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2-x^n\\
&=\frac{1-2x^{n+1}+x^{2n+2}-x^n(1-x)^2}{(1-x)^2}\\
&=\frac{1-2x^{n+1}+x^{2n+2}-x^n+2x^{n+1}-x^{n+2}}{(1-x)^2}\\
&=\frac{(1-x^n)(1-x^{n+2})}{(1-x)^2}\\
&=\frac{1-x^n}{1-x}\cdot\frac{1-x^{n+2}}{1-x}\\
&=(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})(1+x+x^2+\cdots+x^{n+1}).
\end{aligned}
$$

例四 分解因式：

(1) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$；

(2) $2x^3+11x^2+17x+6$；

(3) a^5+a+1（提示：$a^5+a+1=a^5-a^2+a^2+a+1$）．

解：(1)
$$
\begin{aligned}
x^4+2x^3+3x^2+2x+1&=x^4+2x^2+1+2x^3+2x+x^2\\
&=(x^2+1)^2+2x(x^2+1)+x^2\\
&=(x^2+x+1)^2
\end{aligned}
$$

(2) $2x^3+11x^2+17x+6=2x^3+x^2+10x^2+17x+6$

$$= x^2(2x+1)+(2x+1)+(5x+6)$$
$$=(2x+1))(x^2+5x+6)$$
$$=(2x+1)(x+2)(x+3)$$

(3) $a^5-a^2+a^2+a+1=a^2(a^3-1)+(a^2+a+1)$
$$=a^2(a-1)(a^2+a+1)+(a^2+a+1)$$
$$=(a^3-a^2+1)(a^2+a+1).$$

例五 分解因式 $2x^2+3xy-9y^2+14x-3y+20$.

分析：因为$2x^2+3xy-9y^2=(2x-3y)(x+3y)$，所以可设$2x^2+3xy-9y^2+14x-3y+20=(2x-3y+m)(x+3y+n)$. 一般来说，分解多项式 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$ 时，如果其中 $Ax^2+Bxy+Cy^2=(ax+by)(cx+dy)$，则可设 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=(ax+bx+m)(cx+dy+n)$，其中 m、n 是待定系数. 同理可设 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dz^2+Exy+Fyz=(ax+by+mz)(cx+dy+nz)$.

解：$\because 2x^2+3xy-9y^2=(2x-3y)(x+3y)$，于是设

原式 $=(2x-3y+n)(x+3y+m)$

$=2x^2+3xy-9y^2+(2m+n)x+(3n-3m)y+mn.$

列方程组$\begin{cases}2m+n=14,\\3n-3m=-3,\\mn=20.\end{cases}$ 解得 $m=5$，$n=4$.

$\therefore$ 原式 $=(2x-3y+4)(x+3y+5)$.

例六 分解因式：

(1) $(x^2+x+1)(x^2+x+3)-15$;

(2) $(x+5)^4+(x+3)^4-82$.

分析：为了去括号后能抵消一些项，则应取 $x+5$ 与 $x+3$ 的平均数 $\dfrac{(x+5)+(x+3)}{2}=x+4=y$，原式可化为$(y+1)^4+(y-1)^4-82$.

解：(1) 令 $x^2+x=y$，

原式 $=(y+1)(y+3)-15$

$=y^2+4y-12$

$=(y+6)(y-2)$.

$\therefore$ 原式 $=(x^2+x+6)\ (x^2+x-2)$

$=(x^2+x+6)\ (x+2)\ (x-1)$.

(2) 设$\dfrac{(x+5)+(x+3)}{2}=x+4=y$，

原式 $=(y+1)^4+(y-1)^4-82$

$=2y^4+12y^2-80$

$=2(y^2+10)(y+2)(y-2)$

$=2(x^2+8x+26)(x+6)(x+2)$.

例七 分解因式 $2a^2b^2+10a^2b-ab^2-4a^2-3b^2-5ab+2a-15b+6$.

分析：面对这个冗长的式子，可把 a 视为主元，原式 $=2(b^2+5b-2)\ a^2-$

▶笔▶记▶栏

$(b^2+5b-2)a-3(b^2+5b-2)$.

解：以 a 为主元，按 a 的降幂排列可得

原式 $=2(b^2+5b-2)a^2-(b^2+5b-2)a-3(b^2+5b-2)$

$=(b^2+5b-2)(2a^2-a-3)$

$=(b^2+5b-2)(2a-3)(a+1)$.

练习一

1. 将下列多项式分解因式：

（1）$x^2-y^2+7x+y+12$;

（2）$x^2+3xy-4y^2+x+14y-6$;

（3）x^3-7x+6;

（4）$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$.

2. 若 $x^2-4x+4+y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}=0$，求 $x+\frac{1}{y}$ 及 $x^2+\frac{1}{y^2}$ 的值.

3. 已知 $a+b+c=0$，$abc=-15$. 求 $a^3+b^3+c^3$ 的值.

4. 当 k 为何值时，$x^2+xy+ky^2-2x+11y-15$ 能分解成两个一次因式的乘积？

专题训练一

一、选择题：

1．已知 $a+b=5$，那么 $a^3+15ab+b^3$ 的值为（　　）．

A．5　　B．25　　C．75　　D．125

2．多项式 $a^3-b^3+c^3+3abc$ 有因式（　　）．

A．$a+b+c$　　B．$a-b+c$

C．$a^2+b^2+c^2-bc+ca-ab$　　D．$bc-ca+ab$

3．当 $x-y=1$ 时，$x^4-xy^3-x^3y-3x^3y+3xy^2+y^4$ 的值为（　　）．

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

4．要使多项式 $kx^2-2xy-3y^2+3x-5y+2$ 分解成两个一次因式的积，则 k 等于（　　）．

A．1　　B．2　　C．3　　D．非上述答案

二、填空题：

1．当 $m=$________时，多项式 $12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+m$ 可以分解成两个一次因式的积．

2．分解因式 $a^2+2b^2+3c^2+3ab+4ac+5bc=$________．

3．已知 x 是实数，并且 $x^3+2x^2+2x+1=0$，则 $x^{1998}+x^{1999}+x^{2000}$的值是________．

4．分解因式 $a^5+a+1=$________．

三、将下列多项式分解因式：

1．$x^2+2xy-3y^2+3x+y+2$；

2．$6x^2-7xy-3y^2-xz+7yz-2z^2$；

3．$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$；

4．$(x+1)^4+(x+3)^4-272$；

5．$(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2$；

6．$(x^2+y^2)^3+(z^2-x^2)^3-(y^2+z^2)^3$．

四、解答题：

1．证明：当 n 为正整数时，n^3-n 的值必是 6 的倍数．

2．已知 $x=a+\frac{1}{a}$，$x^3-2x^2-3x+6=0$，求 $a^2+\frac{1}{a^2}+2$ 的值．

3．证明：a^4+4 是一个合数(a 是整数，且 $|a|\neq 1$)．

4．设 $x+\frac{1}{x}=-1$，求下列各式的值：

(1) $x^{3n}+\frac{1}{x^{3n}}$；　　(2) $x^{3n+1}+\frac{1}{x^{3n+1}}$．

第二讲　因式分解（二）

解题指要

本讲主要介绍综合除法与因式定理在因式分解中的应用．我们引进记号 $f(x)$，$g(x)$，…等表示一个关于 x 的一元多项式，如 $f(x)=3x^2+2x-1$，$g(x)=5x^4-2x^3+6x-4$ 等等．$f(1)$表示当 $x=1$ 时，代数式 $3x^2+2x-1$ 的值，如 $f(1)=3\times1^2+2\times1-1=4$．

1． 综合除法

一元多项式除以一元多项式有一种简便的方法．

设多项式 $a_2x^2+a_1x+a_0$，求其除以 $x-a$ 的商式和余式．

用普通除法来计算（即用竖式法）：

$$
\begin{array}{r|llll}
 & a_2x & +(a_1+a_2a) & & \\
\cline{2-4}
x-a & a_2x^2 & +a_1x & & +a_0 \\
 & a_2x^2 & -a_2ax & & \\
\cline{2-4}
 & & (a_1+a_2a)x & & +a_0 \\
 & & (a_1+a_2a)x & -a(a_1+a_2a) & \\
\cline{3-4}
 & & & a_0+(a_1+a_2a)a &
\end{array}
$$

所以，商式是：$a_2x+(a_1+a_2a)$，余式是：$a_0+(a_1+a_2a)a$．

这个过程只是在系数之间进行，于是可写成

$$
\begin{array}{ccc|c}
a_2 & a_1 & a_0 & a \\
 & a_2a & (a_1+a_2a)a & \\
\hline
a_2 & a_1+a_2a & \multicolumn{1}{|c}{a_0+(a_1+a_2a)a} &
\end{array}
$$

这里，第一行是被除式按降幂排列时各项的系数（如果有缺项必须用零补足）．计算时，先将第一行的第一个数 a_2 移到第三行的第一个位置；然后乘以 a 将乘积 a_2a 写在第二行第二个位置（第一个位置空着），再将 a_2a 加上第一行的第二个数，写在第三行的第二个位置上，这种算式进行的除法叫做综合除法．

2． 因式定理

我们将 x 的一元 n 次方程多项式记为$f(x)$，即 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，并记当 $x=a$ 时，多项式 $f(x)$的值为 $f(a)$．

如多项式 $f(x)=3x^2-5x-2$，当 $=1$ 时，$f(x)$的值为 $f(1)=3\cdot1^2-5\cdot1-2=-4$．

余数定理　　**多项式 $f(x)$除以 $x-a$ 所得的余数等于$f(a)$．**

证明：因为 $f(a)-(a_na^n+a_{n-1}a^{n-1}+\cdots+a_1a+a_0)=0$，

所以

$$
\begin{aligned}
f(x)&=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a-(a_na^n+a_{n-1}a^{n-1}+\cdots+a_1a+a_0)+f(a)\\
&=a_n(x^n-a^n)+a_{n-1}(x^{n-1}-a^{n-1})+\cdots+a_1(x-a)+f(a).
\end{aligned}
$$

由于

$x-a$ 能整除 x^n-a^n，$x-a$ 能整除 $x^{n-1}-a^{n-1}$，…，$x-a$ 能整除 $x-a$，

因此，$f(x)$除以 $x-a$ 所得的余数为$f(a)$.

作为余数定理的推论，我们有

因式定理　　如果 $x=a$ 时，多项式 $f(x)$的值为零，即 $f(a)=0$，则 $f(x)$能被 $x-a$ 整除（即 $f(x)$含有因式 $x-a$）.

当 a_n，a_{n-1}，…，a_1，a_0 为整数时，多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 叫做整系数多项式.

设 p、q 为整数，如 $x-\frac{p}{q}$（$\frac{p}{q}$为既约分数）是整系数多项式 $f(x)$的因式，我们来看 p、q 应满足什么条件.

由 $f(\frac{p}{q})=0$，得 $a_n(\frac{p}{q})^n+a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1}+\cdots+a_1\frac{p}{q}+a_0=0$，

即 $a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0$.

由 p 能整除 $a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}$，而 p 不能整除 q^n，由此 q 能整除 a_0.

同理，q 能整除 a_n.

这说明，只有当整数 p、q（互质）分别为 a_0、a_n 的因子时，$qx-p$ 才有可能是整系数多项式$f(x)$的因式.

典型例题讲解

例一　用分离系数法求多项式 $f(x)=3x^4+7x^3-15x-20$ 除以 $g(x)=x+2$ 的商式和余式.

解法一：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3+1-2-11 \\
1+2 & \overline{3+7+0-15-20} \\
 & 3+6 \\ \cline{2-2}
 & 1+0 \\
 & 1+2 \\ \cline{2-2}
 & -2-15 \\
 & -2-4 \\ \cline{2-2}
 & -11-20 \\
 & -11-22 \\ \cline{2-2}
 & 2
\end{array}
$$

商式为：$3x^3+x^2-2x-11$，余式为：2.

随记栏

这是用普通除法来计算，下面用综合除法来计算.

解法二：

$$
\begin{array}{cccccc|c}
3 & +7 & +0 & -15 & -20 & & -2 \\
 & -6 & -2 & 4 & -22 & & \\
\hline
3 & 1 & -2 & -11 & 2 & &
\end{array}
$$

商式为 $3x^3+x^2-2x-11$，余式为2.

例二 用综合除法计算：

(1) $(x^5-4x^3+x-2)\div(x-2)$;

(2) $(6x^4-5x^3-3x^2-x+4)\div(2x+1)$.

分析：如果除式是 $qx+p$ 的形式，就先把 $qx+p$ 化成 $q(x+\frac{p}{q})$ 的形式，再把 $x+\frac{p}{q}$ 作为除式做综合除法，然后把所得商式除以 q 就是所求的商式.

解：(1)

$$
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & -4 & 0 & +1 & -2 & 2 \\
 & 2 & 4 & 0 & 0 & 2 & \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

商式为：x^4+2x^3+1，余式为：0.

(2) 除式中一次项系数不为 1，可将 $2x+1$ 改为 $2(x+\frac{1}{2})$，将被除式除以 $x+\frac{1}{2}$，再把所得的商式除以 2 即可.

$$
\begin{array}{ccccc|c}
6 & -5 & -3 & -1 & +4 & -\frac{1}{2} \\
 & -3 & +4 & -\frac{1}{2} & +\frac{3}{4} & \\
\hline
6 & -8 & +1 & -\frac{3}{2} & \frac{19}{4} &
\end{array}
$$

所以商式是：$3x^3-4x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$，余式是：$\frac{19}{4}$.

例三 求证：多项式 $f(x)=x^4-5x^3-7x^2+15x-4$ 有因式 $x-1$.

证明：$\because f(1)=1-5-7+15-4=0$,

由因式定理知 $f(x)$ 有因式 $x-1$.

例四 求 $g(x)=x^4-3x^2+2x-6$ 除以 $x+3$ 的余数.

分析：令 $x=-3$ 时，求 $g(x)$ 的值，可得要求的余数.

解：$\because g(-3)=42$,

由余数定理知，余数为 42.

▶笔▶记▶栏

例五 求证 $a-b$ 是 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 的因式.

分析：可把多项式 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 看成是关于 a 的多项式，b、c 看成常数，再利用因式定理加以证明.

证明：设 $f(a)=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$，

又 $f(b)=b^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(b-b)=0$，

故 $a-b$ 是 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 的因式.

例六 分解因式 $x^3-19x-30$.

解：$\because f(-2)=0$，含 $x+2$ 因式；$f(-3)=0$，又含 $x+3$ 因式；$f(5)=0$，又含 $x-5$ 因式.

$\therefore$ 原式 $=(x+2)(x+3)(x-5)$.

例七 分解因式 $2x^4-x^3-13x^2-x-15$.

分析：这个多项式属于最高项系数不为 1 的情况.

解：设 $f(x)=2x^4-x^3-13x^2-x-15$.

由因式定理可知 $f(x)$ 所有可能的因式为 $(x\pm1)$、$(x\pm3)$、$(x\pm5)$、$(x\pm15)$、$(2x\pm1)$、$(2x\pm3)$、$(2x\pm5)$、$(2x\pm15)$ 易知 $f(1)\neq0$，$f(-1)\neq0$，其余用综合除法尝试，只有

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -1 & -13 & -1 & -15 & 3 \\
 & +6 & +15 & +6 & +15 & \\
\hline
2 & +5 & +2 & +5 & &
\end{array}$$

$\therefore 2x^4-x^3-13x^2-x-15$

$=(x-3)(2x^3+5x^2+2x+5)=(x-3)(2x+5)(x^2+1)$.

例八 已知多项式 $ax^3+bx^2-47x-15$ 可被 $3x+1$ 和 $2x-3$ 整除，求 a、b 的值.

分析：令 $x=-\dfrac{1}{3}$ 和 $x=\dfrac{3}{2}$.

解：由已知有 $f(-\dfrac{1}{3})=0$，$f(\dfrac{3}{2})=0$，即 $\begin{cases}-\dfrac{a}{27}+\dfrac{b}{9}+\dfrac{47}{3}-15=0,\\ \dfrac{27}{8}a+\dfrac{9}{4}b-\dfrac{141}{2}-15=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=24,\\ b=2.\end{cases}$

所以，原多项式为 $24x^3+2x^2-47x-15$.

因 $3x+1$ 与 $2x-3$ 是多项式的因式，由综合除法得

$$\begin{array}{rrrr|l}
24 & +2 & -47 & -15 & -\dfrac{1}{3} \\
 & -8 & +2 & +15 & \\
\hline
24 & -6 & -45 & +0 & \dfrac{3}{2} \\
 & +36 & +45 & & \\
\hline
24 & +30 & +0 & &
\end{array}$$

所以，原式 $=(3x+1)(2x-3)(4x+5)$.

▶笔▶记▶栏

练习二

一、用综合除法计算以下各题：

1. $(4x^4-7x^2-7x+6)\div(x-\frac{3}{2})$

2. $(27x^3-10)\div(3x-2)$

3. $(3x^4-7x^3-11x^2+10x-4)\div(x^2+3x-2)$

二、分解因式：

1. x^3-6x^2+9x-4

2. $2x^4-x^3-6x^2-x+2$

三、m 为何值时，多项式 $f(x)=x^5-3x^4+8x^3+11x+m$ 能被 $x-1$ 整除？

四、不用除法，求证：多项式 $f(x)=2x^4+x^3-x^2-x-1$ 有因式 $x-1$ 和 $x+1$.

专题训练二

一、填空题：

1. 若多项式 $x^4+mx^3+nx-16$ 含有因式$(x-1)$和$(x-2)$，则 $mn=$______.
2. 设 $x^4-5x^3+2x^2+20x-24$ 能被 $x-a$ 整除，则 a 的值为______.
3. 若 y^2+my+2 除以 $y-1$ 得商 $f(y)$，余式为 r_1；若 y^2+my+2 除以 $y+1$ 得商 $g(y)$，余式为 r_2，且 $r_1=r_2$，则 $m=$______.

二、将下列多项式分解因式：

1. x^3+5x^2+3x-9

2. $x^4+3x^3-3x^2-11x-6$

3. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

4. $x^4+x^3+3x^2+x+6$

5. $x^2+3xy+2y^2+4x+5y+3$

三、解答题：

1. 设 $f(x)=x^2+bx+c$（b、c 为整数），若 $f(x)$ 是 x^4+6x^2+25 及 $3x^4+4x^2+28x+5$ 的公因式，求 $f(1)$的值.

2. 一个整系数四次多项式 $f(x)$有四个不同的整数 a_1、a_2、a_3、a_4，使得 $f(a_1)=f(a_2)=f(a_3)=f(a_4)=1$. 求证：任何整数 β 都不能使$f(\beta)=-1$.