上海农学院 数学教研室
北京农学院 数学教研室 等编

高等数学

上海科学技术文献出版社

高 等 数 学

上海农学院数学教研室
北京农学院数学教研室 等编

上海科学技术文献出版社

(沪)新登字 301 号

高 等 数 学

上海农学院数学教研室
北京农学院数学教研室 等编

上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市武康路 2 号)
全国新华书店经销 上海同济大学印刷厂印刷
开本 850×1168 1/32 印张 16.5 字数 443 000
1994 年 7 月第 1 版 1994 年 7 月第 1 次印刷
印数:1—4 500
ISBN 7-5439-0533-7/O·098
定价: 12.80 元

前　　言

本书根据原农牧渔业部制定的《高等数学》教学大纲，结合近几年来农业和经济发展对本课程内容的要求编写而成.

全书共12章.内容为函数与极限;导数与微分;中值定理与导数的应用;不定积分;定积分;定积分的应用;常微分方程;空间解析几何;多元函数微分法;重积分;曲线积分;无穷级数等.每章末配有习题,书后附有习题答案和附录表.

在编写中，我们在注意到基本概念、基本理论的掌握和基本方法的训练的同时，也注意到系统性、科学性和连贯性.为便于学生自学，在叙述上力求由浅入深，通俗易懂，并选配一定数量的例题.书中加 * 内容可根据专业具体情况和学时的可能作取舍.

本书可作为高等农、林、水产院校和医学院教材，也可作为文科学、电大、业大和职大师生和广大自学者的参考书.

本书在编写中得到各校各级领导关心、支持和帮助，在此我们表示衷心的感谢.

由于时间仓促，编者水平有限，书中难免有不妥甚至错误之处，殷切地盼望同行和读者批评指正.

编　者

1994年3月

目　　录

第一章　函数与极限

高等数学是以变量为研究对象的一门数学课程．函数关系就是变量之间的依赖关系．极限方法则是研究变量的一种基本方法．本章在复习函数概念之后，着重介绍函数极限的基本理论和主要运算方法，并讨论函数的连续性．

第一节　函　　数

一、函数概念

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量在变化着．这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律．现在我们先讨论两个变量的情形．

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集．如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$．数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量．

为了更好地理解函数概念，我们作以下几点说明：

1．函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其它字母，例如“φ”，“F”，等等．在同一个问题中如果考察几个不同的函数时，要用不同的字母表示各自的函数关系．

2．函数 $y=f(x)$ 的定义域常用区间来表示．确定函数定义域的一般原则是：

(1) 在实际问题中要根据问题的实际意义来确定，例如正方形的面积 $A=x^2$，其中 x 表示边长，则定义域 $D=(0,+\infty)$．

(2) 由数学式子给出的函数，它的定义域就是使算式有意义的全体实数．例如，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}+\arcsin x$ 的定义域 $D=[-1,1)$．

3. 函数概念中的两个要素是：函数关系与定义域．两个函数只有当它们的函数关系和定义域完全相同时，才能认为是同一个函数．如 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $\varphi(x)=x+1$，由于它们的定义域不同，故表示两个不同的函数．

4. 自变量在其变化范围内取定 x_0，函数 y 所对应的值叫函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的函数值，记作 $f(x_0)$．函数 $y=f(x)$ 的函数值的全体组成的数集 $W=\{y \mid y=f(x),\quad x\in D\}$ 称为函数的值域．例如，函数 $y=\sin x$ 的值域 $W=[-1,1]$．

5. 函数表示法通常有三种，即解析法、表格法和图示法．本课程所讨论的函数一般都是用解析法表示．

在自然科学和工程技术中，用解析式表示函数时，经常会遇到在定义域的不同范围内用不同的式子表示的函数．例如，脉冲发生器产生的一个三角波（图 1-1），它的电压 U 与时间 t 的函数关系为

$$U=\begin{cases}\dfrac{3}{2}t, & 0\leqslant t\leqslant 10\\[2ex] 30-\dfrac{3}{2}t, & 10<t\leqslant 20\end{cases}$$

当 $t=2$ 时，$U=\dfrac{3}{2}\times 2=3$；当 $t=12$ 时，$U=30-\dfrac{3}{2}\times 12=12$．

又如符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ （图 1-2）

我们称这种用几个式子分段表示的函数为分段函数，它表示的是一个函数．

6. 如果自变量 x 在定义域中每取定一个值时，函数 y 都只有唯一确定的值与之对应，这种函数叫单值函数，否则叫多值函数．例如反三角函数 $y=\operatorname{Arcsin}x$ 是多值函数，但将 y 限制在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上，$y=\arcsin x$ 就是单值的．今后如不特别声明，函数都是指单值函数．对于多值函数，可以拆成若干个单值函数，其中

每一个叫做该多值函数的一个单值支.

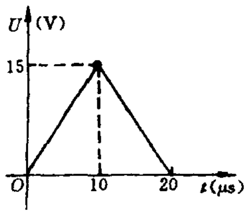

图 1-1

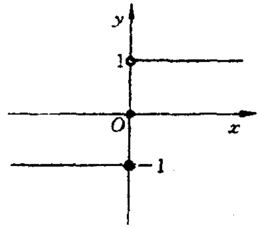

图 1-2

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 数集 $X \in D$. 如果存在正数 M, 使得与任一 $x \in X$ 所对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界, 并称 M 是 $f(x)$ 的一个界. 如果这样的 M 不存在, 就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如, 函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界函数, 因为 x 取任何实数时, 都有 $|\sin x| \leqslant 1$ 成立. 而函数 $y = \operatorname{tg} x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界函数, 因为不存在正数 M, 使 $|\operatorname{tg} x| \leqslant M$ 对于 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的一切 x 值都成立, 但是 $y = \operatorname{tg} x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 内是有界的, 可取 $M = 1$, 对于区间 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 内的一切 x 值, 都有 $|\operatorname{tg} x| < 1$ 成立. 因此, 函数是否有界不仅与函数有关, 还与所给数集 X 有关.

有界函数的图形界于两条水平直线 $y = \pm M$ 之间.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的;如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

在某一区间内单调增加或单调减少的函数统称为该区间内的单调函数,该区间叫函数的单调区间.

例如,$y = x^2$ 在区间 $(-\infty,\ 0]$ 内是单调减少的,在区间 $[0,\ +\infty)$ 内是单调增加的,但在区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 内 $y = x^2$ 就不是单调函数.

单调增加函数的图形从左向右为上升的曲线,单调减少函数的图形从左向右为下降的曲线.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$,则必 $-x \in D$).如果对于任一 $x \in D$,

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为偶函数.如果对于任一 $x \in D$,

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如,$y = \sin x$ 是奇函数,$y = \cos x$ 是偶函数,而 $y = \sin x + \cos x$ 既非奇函数,也非偶函数.

奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D.如果存在一个不为零的数 L,使得对于任一 $x \in D$,有 $(x + L) \in D$,且

$$f(x + L) = f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,L 称为 $f(x)$ 的周期,通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如,$y = \sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数,$y = \mathrm{tg}\, x$ 是以 π 为周期的周期函数.

对于周期为 L 的周期函数 $y=f(x)$，在定义域内每个长度为 L 的区间上，函数图形有相同的形状.

三、反函数

在研究两个变量之间的依赖关系时，哪一个作自变量，哪一个作因变量，这可以根据实际的需要而定.因此有反函数的概念.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W.如果对于 W 中的任一 y，由函数式 $y=f(x)$ 能在 D 中有确定的 x 与之对应：$x=\varphi(y)$，那末函数 $x=\varphi(y)$ 就叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数，它的定义域是 W.并称 $y=f(x)$ 为 $x=\varphi(y)$ 的直接函数.

习惯上一般用 x 表示自变量，y 表示因变量，故 $x=\varphi(y)$ 常写为 $y=\varphi(x)$，即 $y=\varphi(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

例 1 求函数 $y=2x+3$ 的反函数.

解 由关系式 $y=2x+3$ 中解出 x，得

$$x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$$

将 x、y 互换，得 $y=2x+3$ 的反函数

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}.$$

例 2 求函数 $y=x^2-4$ 的反函数.

解 由关系式 $y=x^2-4$ 中解出 x，得

$$x=\pm\sqrt{y+4}.$$

将 x，y 互换，得 $y=x^2-4$ 的反函数

$$y=\pm\sqrt{x+4}.$$

由例 2 和定义看出，虽然 $y=f(x)$ 是单值函数，反函数 $y=\varphi(x)$ 却不一定是单值的.但如果 $y=f(x)$ 是单值单调函数，那么就能保证反函数 $y=\varphi(x)$ 是单值的.

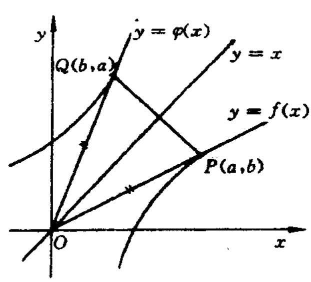

图 1-3

从几何上看，在 xOy 直角坐标系中函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=\varphi(y)$ 的图形是同一曲线．但将 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$ 后，函数 $y=f(x)$ 的图形与它的反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形就关于 $y=x$ 对称．这是因为，如果 $(a,\ b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点，那末 $(b,\ a)$ 就是 $y=\varphi(x)$ 图形上的点，而点 $(a,\ b)$ 与点 $(b,\ a)$ 关于直线 $y=x$ 是对称的(图 1-3).

四、基本初等函数

下面的五种函数称为基本初等函数:

幂函数: $y=x^{\mu}$ (μ 为常数);

指数函数: $y=a^{x}$ (a 为常数，$a>0, a\neq 1$);

对数函数: $y=\log_a x$ (a 为常数，$a>0, a\neq 1$);

三角函数: $y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\operatorname{tg} x,$

$y=\operatorname{ctg} x,\ y=\sec x,\ y=\csc x;$

反三角函数: $y=\arcsin x,\ y=\arccos x,$

$y=\operatorname{arctg} x,\quad y=\operatorname{arcctg} x.$

常量作为函数时，也列入基本初等函数.

在中学数学里，对于这些函数已作过较详细的介绍．本书只列出其基本内容(见附录 I).

五、复合函数、初等函数

1. 复合函数

定义 3 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域的全部或部分包含在 $f(u)$ 的定义域内，则通过变量 u，y 也是 x 的函数，我们称此函数是由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数．记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 u 叫中间变量.

复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域是使 $u=\varphi(x)$ 的函数值属于 $y=f(u)$ 的定义域的那些 x 值所组成的，通常只是 $u=\varphi(x)$ 的定义域的一部分．例如，由函数 $y=3^{u}$ 及 $u=\sin x$ 复合而成的函数为 $y=3^{\sin x}$，其定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$ 是 $u=\sin x$

的定义域;而函数 $y=\arccos u$ 与 $u=\sqrt{1+2x}$ 复合而成的函数 $y=\arccos\sqrt{1+2x}$，其定义域为 $\left[-\frac{1}{2},\ 0\right]$，只是 $u=\sqrt{1+2x}$ 的定义域的一部分.

应当注意,不是任何两个函数都可以复合成复合函数的.例如 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成复合函数,因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内的任何 x 值,所对应的函数值 u 都大于等于 2,都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

复合函数也可由两个以上的函数复合而成.例如 $y=\ln u$，$u=1+v$，$v=\sqrt{w}$，$w=1+x^2$ 复合而成的函数为 $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$，其中 u, v, w 都是中间变量.

利用复合函数的概念,可以把一些较复杂的函数分解成几个简单函数,以便于对函数进行研究.所谓简单函数,即为基本初等函数或由基本初等函数经过有限次四则运算而构成的函数.例如函数 $y=\sqrt{1+\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}$ 可以分解成 $y=\sqrt{u}$，$u=1+v$，$v=\operatorname{arctg}w$，$w=\frac{x}{3}$ 四个简单函数.

2. 初等函数

定义 4 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成并可用一个解析式子表示的函数,叫做初等函数.

例如,$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=3^{\sin x}$，$y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$ 等都是初等函数.而

$$y=\begin{cases}\frac{3}{2}t, & 0\leqslant t\leqslant 10\\ 30-\frac{3}{2}t, & 10<t\leqslant 20\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$