

科學圖書大庫

微積分學自修書

譯者 李彼得

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

微積分學自修書

譯者 李彼得

期 限 表

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人 徐銘信 科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人 林碧銓 科學圖書編譯委員會編譯委員

版權所有

不許翻印

中華民國六十六年二月十二日三版

微積分學自修書

基本定價 5.20

譯者 李彼得 美國加州山和市大學數學系教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(63)局版臺業字第0116號

出版者 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686號
發行者 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第15795號
承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話9719739

我們的工作目標

文明的進度，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認為若幻想者，今多已成為事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤為社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能為蔚為大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尚有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏為監修人，編譯委員林碧銓氏為編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分為叢書，合則大庫。為欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大眾閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尚在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，廣續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尚祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會 敬啓

中華民國六十四年九月

目 錄

第一編 自修綱要

第一章 數學綱要.....	1
第一節 代數.....	1
1. 二項定理.....	1
2. 行列式運算.....	2
3. 對數性質.....	2
4. 部分分數.....	3
第二節 函數.....	5
1. 變數及常數.....	5
2. 函數定義.....	5
3. 因變數及自變數.....	6
4. 代數函數及超越函數.....	6
5. 有理函數.....	6
6. 顯函數及隱函數.....	7
7. 單值函數及多值函數.....	7
8. 函數記號.....	7
9. 逆函數.....	8
第三節 級數.....	9
1. 斂級數及發級數.....	9
2. 絕對收斂及條件收斂.....	9
3. 級數測驗.....	10
(a) 普通測驗法.....	10
(b) 比較測驗法.....	10

(c) 比率測驗法	11
4. 常用級數	12
(a) 幾何級數	12
(b) 調和級數	12
(c) 二項級數	12
(d) 指數級數	13
(e) 對數級數	13
(f) 冪級數	13
第四節 三角公式	14
1. 弧度法	14
2. 基本關係	14
3. 兩角和及差的函數	14
4. 倍角函數	15
5. 半角函數	15
6. 函數的和與差	15
7. 正弦定律	15
8. 餘弦定律	16
9. 正切定律	16
10. 逆函數	16
11. 三角形面積	16
12. 等邊三角形面積	17
第五節 幾何公式	17
1. 面積	17
2. 表積	17
3. 體積	17
第六節 解析幾何	18
1. 兩點間的距離	18
2. 三角形面積	18

3. 直線方程式.....	18
4. 圓方程式.....	20
5. 拋物線方程式.....	21
6. 橢圓方程式.....	21
7. 雙曲線方程式.....	22
8. 立體解析幾何.....	22
9. 圓錐曲線.....	26
第二章 微分綱要.....	27
第一節 極限.....	27
1. 極限的意義.....	27
2. 極限的記號.....	27
3. 極限的特例.....	27
第二節 增量.....	28
第三節 導數.....	28
第四節 微分法及微分公式.....	29
1. 代數函數的微分公式.....	29
2. 對數函數及指數函數微分公式.....	32
3. 三角函數微分公式.....	34
4. 反三角函數微分公式.....	37
第五節 逐次微分法.....	41
1. 馬克勞林定理.....	41
2. 台勞定理.....	42
3. 來本之定理.....	44
第六節 微分.....	45
第七節 導數間的關係.....	45
第八節 導數變換.....	46
第九節 偏微分.....	48

第十節 全微分	49
第十一節 極大及極小	50
1. 一自變數的極大值及極小值	50
2. 兩自變數的極大值及極小值	51
3. 三自變數的極大值及極小值	52
第十二節 曲線方向	52
(a) 直角坐標	52
(b) 極坐標	53
第十三節 兩曲線交角	54
(a) 直角坐標	54
(b) 極坐標	54
第十四節 切線及法線方程式	55
第十五節 漸近線	56
第十六節 弧導數	57
(a) 直角坐標	57
(b) 極坐標	58
第十七節 灣曲方向	58
第十八節 反曲點	59
第十九節 曲率圓	60
第二十節 曲率半徑	60
第二十一節 曲率中心	61
第二十二節 漸屈線及漸伸線	62
第二十三節 相切階	62
第二十四節 包絡	63
第三章 積分綱要	65
第一節 積分定義	65

第二節 積分原理	65
(a) 積分常數	66
(b) 積分的和	66
(c) 常口數	68
第三節 積分基本公式	68
第四節 定積分應用	72
1. 求面積法	72
(a) 直角坐標	72
(b) 極坐標	73
2. 求弧長法	74
(a) 直角坐標	74
(b) 極坐標	75
3. 求體積法	76
4. 求表積法	77
5. 斷面求積法	78
第五節 重積分	78
第六節 重積分應用	79
1. 轉動慣量	79
(a) 平面轉動慣量	79
(b) 立體轉動慣量	82
2. 旋轉體積及表積	83
3. 任何立體的表積及體積	83
(a) 表積	83
(b) 體積	86
第七節 重心	87
1. 白波氏定理	88
第八節 吸引力	88

第四章 附錄	90
第一節 曲線備考	90
1. 蔓形線	90
2. 箕舌線	90
3. 蔓葉線	91
4. 懸鏈線	92
5. 正焦弦拋物線	93
6. 三次拋物線	93
7. 半三次拋物線	94
8. 曲線 $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$	94
9. 曲線 $a^4 y^2 = a^2 x^4 - x^6$	94
10. 圓 $r = a \sin \theta + b \cos \theta$	95
11. 阿基米德螺線	95
12. 雙曲螺線	96
13. 對數螺線	97
14. 焦點拋物線	97
15. 等軸雙曲線	98
16. 雙綫線	99
17. 四瓣器數線	99
18. 心臟線	100
19. 擺線	100
20. 准擺線	101
21. 外擺線	102
22. 內擺線	104
第二節 雙曲線函數及公式	105
第三節 微分公式備考	110
(A) 導數	110

(B) 微分	112
第四節 積分公式備考	113
第五節 積分輔助公式	119
附原名及譯名對照表	121

第二編 微分例題詳解

例題(一)	函數	129
例題(二)	導數	134
例題(三)	導數應用	141
例題(四)	初步微分法	147
例題(五)	對數及指數函數微分法	168
例題(六)	三角函數微分法	185
例題(七)	三角反函數微分法	202
例題(八)	導數關係	216
例題(九)	逐次微分法	223
例題(十)	來本之定理應用	236
例題(十一)	微分及無窮小	240
例題(十二)	隱函數導數	243
例題(十三)	級數測驗	250
例題(十四)	收斂值判定	256
例題(十五)	馬克勞林氏定理應用	259
例題(十六)	級數計算	277
例題(十七)	台勞氏定理應用	280
例題(十八)	不定型	288
例題(十九)	不定型(續)	293

例題(二十)	極大及極小條件	299
例題(二十一)	極大及極小應用問題	314
例題(二十二)	偏微分法	348
例題(二十三)	切面及法線方程式	355
例題(二十四)	高階偏微分法	360
例題(二十五)	全導數及全微分	369
例題(二十六)	台勞氏定理推演	378
例題(二十七)	導數變換	380
例題(二十八)	多變數函數極大與極小值	387
例題(二十九)	曲線方向;切線及法線;切距及交角	406
例題(三十)	任一點 (x', y') 切線及法線方程式	418
例題(三十一)	漸近線方程式	426
例題(三十二)	極坐標曲線方向	431
例題(三十三)	曲率定向及反曲點	442
例題(三十四)	曲率半徑	449
例題(三十五)	曲率中心及漸屈線	451
例題(三十六)	相切階	468
例題(三十七)	包絡方程式	473

第三編 積分例題詳解

例題(一)	基本積分式	485
例題(二)	指數積分式	493
例題(三)	三角函數積分式	495
例題(四)	其他重要積分式	505
例題(五)	積分簡單應用	514

例題(六)	常數判定.....	520
例題(七)	有理分數積分法.....	530
	(A) 分母因數均為一次, 且無重複.....	530
	(B) 分母因數均為一次, 但有重複.....	535
	(C) 分母含有二次因數, 但無重複.....	539
	(D) 分母含有二次因數, 且有重複.....	550
例題(八)	無理函數積分法.....	567
	(A) 含有 $(ax+b)^{\frac{p}{q}}$ 積分法.....	567
	(B) 含有 $\sqrt{\pm x^2+ax+b}$ 積分法.....	576
例題(九)	三角函數簡易積分法.....	581
	(A) $\sin^n x dx$, $\cos^n x dx$ 及 $\sin^m x \cos^n x dx$ 積分法.....	581
	(B) $\tan^n x dx$, $\cot^n x dx$, $\sec^n x dx$, $\csc^n x dx$, $\tan^m x \sec^n x dx$ 及 $\cot^m x \operatorname{cosec}^n x dx$ 積分法.....	585
	(C) 用倍角公式求 $\sin^m x \cos^n x dx$ 積分法.....	592
例題(十)	部分積分法.....	595
例題(十一)	含有 $e^{ax} \sin nx dx$ 及 $e^{ax} \cos nx dx$ 積分法.....	611
例題(十二)	用輔助公式求積分法.....	618
	(I) 二項代數式.....	618
	(II) 三角函數.....	630
例題(十三)	代換積分法.....	637
	(A) 含有 $(a+bx^2)^{\frac{p}{q}}$ 積分法.....	637
	(B) 含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 及 $\sqrt{x^2\pm a^2}$ 用三角函數代 換積分法.....	639
	(C) 三角函數用代數代換積分法.....	648

	(D) 以 $\tan \frac{x}{2} = z$ 有理數代換積分法	654
	(E) 混合代換法	659
例題(十四)	積分求和法	664
例題(十五)	廣義積分法	677
例題(十六)	變更極限法	678
例題(十七)	定積分求面積法	683
	(A) 直角坐標	683
	(B) 極坐標	696
例題(十八)	定積分求弧長法	706
	(A) 直角坐標	706
	(B) 極坐標	715
例題(十九)	定積分求旋轉曲面體積法	723
例題(二十)	定積分求旋轉曲面表積法	734
例題(二十一)	斷面求體積法	743
例題(二十二)	重積分法	750
例題(二十三)	重積分應用	754
	(A) 直角坐標	754
	(B) 極坐標	766
	(C) 求旋轉曲面體積及表積	769
例題(二十四)	求任何立體表積、體積及轉動慣量	776
	(A) 求表積法	776
	(B) 求體積法	784
	(C) 求轉動慣量	792
例題(二十五)	求重心法	797

例題(二十六)	應用白波氏定理求旋轉表積及體積.....	810
例題(二十七)	流體壓力.....	811
例題(二十八)	流體壓力中心.....	820
例題(二十九)	吸引力.....	825
例題(三十)	雙曲線函數.....	827

第一編 自修綱要

第一章 數學綱要

欲明瞭微積的意義及微積分的應用，當熟悉代數，三角學，幾何學及解析幾何。茲縷列各項重要原理及公式於下：—

第一節 代數

1. 二項定理

$$(x+y)^n = x^n + n x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} x^{n-3}y^3 + \dots$$

若將右邊首項移置於左邊，而以 y 除之，則有

$$\frac{(x+y)^n - x^n}{y} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}y + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} x^{n-3}y^2 + \dots$$

若 y 漸近於零，則右邊含有 y 及 y 之高次幂，均得略之，故有

$$\frac{(x+y)^n - x^n}{y} = nx^{n-1}$$

若 n 為負數，則有

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

以上三式，學者當牢記之。