80

大学公共数学系列教材

微积分

（上册）

武汉大学数学与统计学院

齐民友 主编

黄象鼎 姜明启 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分(上册)/齐民友 主编;黄象鼎 姜明启 编 —北京:高等教育出版社,2002.8

非数学专业本科生教材

ISBN 7-04-011117-9

Ⅰ.微… Ⅱ.①齐… ②黄… ③姜… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 046095 号

责任编辑:徐 可 **封面设计**:王凌波
版式设计:杨 明 **责任印制**:张小强

微积分(上册)
齐民友 主编 黄象鼎 姜明启 编

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
印　　刷	北京市鑫鑫印刷厂

开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2002年8月第1版
印　　张	21.5	**印　　次**	2002年8月第1次印刷
字　　数	410 000	**定　　价**	24.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

《大学公共数学系列教材》编委会

前　　言

本书是适用于大学非数学专业学生的公共数学系列教材之一，分上、下两册出版．上册内容包括极限理论基础，连续函数，导数与微分，中值定理及导数的应用，不定积分，定积分及其应用，广义积分，无穷级数．下册内容包括空间解析几何与向量代数，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，向量分析与场论初步，含参变量积分，傅里叶级数，常微分方程，MATLAB 简介及数学实验等．本书可作为高等学校理工科各专业本科生微积分课程的教材（年学时数为 180～210 学时），少学时的有关专业作适量删减后也可适用．

高等学校的基本任务是培养合格人才．对学生全面素质和能力的培养已成为广大教育工作者的共识．数学教育不只是一种必不可少的专业技术教育，也是文化素质教育的重要组成部分．对理工科数学教育而言，既要重视其作为科学技术的基础的作用，又要重视它作为文化基础的作用．让学生接受到良好的数学素质教育，将使他们终生受益．

当前，各高校都在积极进行教学改革．教学内容的改革是教学改革的重点与难点．为了编出合适的教材，我们进行了广泛的调查研究，总结分析了近些年来数学教学的经验教训，仔细研读了教育部高等学校工科数学课程教学指导委员会拟定的高等数学课程教学基本要求，参照教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲，同时参考了国内与国外相关教材．

我们将这一套教材定名为“公共数学系列教材”，“公共”二字有如下两层含义：一是由于数学应用的广泛性，数学已渗透于一切领域，成为一种“公共”不可缺少的工具；二是指这套教材有别于数学专业的教材，而是适用于非数学专业学生的教材，它不过分地苛求数学自身的完美与系统性，而力求在以下几个方面作出努力：

1．注重概念、定理表述的严谨性、准确性，重视必要的数学基础理论，发挥本课程在培养学生的逻辑推理能力、抽象能力、判断辨别能力和综合概括能力以及严密、准确、精炼的表述能力诸方面的特殊作用．基于此，我们简单介绍了实数系的几个基本定理及它们的相互关系，介绍了极限的“$\varepsilon-\delta$”语言表述方法，闭区间上连续函数的性质、定理及可积性定理．其中绝大部分给出了证明，同时配备如何应用这些定理的一定数量的练习．我们认为适当进行这方面的训练，对理工科各专业的学生来说是必要的，同时也是可行的．

2．在保持必要的传统体系和经典内容的同时，在适当的场合对基本内容适度

引申,渗透了一些现代数学的思想、概念和方法.例如,我们介绍了一般映射,函数迭代,线性算子,不动点定理,函数逼近,凸函数的詹森(Jensen)不等式,傅里叶(Fourier)级数中的贝塞尔(Bessel)不等式,帕塞瓦尔(parseval)等式等等;同时介绍了一点微积分发展史,我们认为这样作可加深学生对原有内容的理解,同时可开阔视野.

3.加强分析、代数、几何之间的联系.数学本身是完整的统一体,传统上人们将分析、代数、几何作为数学的三大门类,这样的分类有其历史的原因及相对的合理性.但也应看到它的局限性,随着数学学科自身的发展以及科学技术的进步及其对数学的推动,数学分支之间的相互渗透、相互联系日益加强,一些新的数学分支按传统的分类法已很难说清它属于哪一类.鉴于此,在本书中尽量注意它们之间的联系,使学生对数学的统一性有初步的认识,不致于只见树木,不见森林.同时努力克服重分析、轻几何的缺陷,在介绍概念、定理时,尽量作出几何解释,适当配合图示;在处理多元函数极值问题时,用线性代数的二次型理论来证明极值判定定理.适当选择分析、代数、几何联系较紧的例题与练习题.在介绍向量分析时,介绍一点微分几何的初步知识,如曲线的弗雷耐(Frenet)活动标架.在处理条件极值时,举出联系矩阵特征值的例子等.

4.注重理论联系实际、数值计算及计算机的积极作用.学习的目的在于应用,告诉学生如何学习数学是重要的,告诉学生怎样运用数学则更为重要.本书中,我们适当介绍一些数学建模方法、数值计算方法,如不动点迭代法,插值法,解非线性方程的牛顿法,数值积分法,最小二乘法,常微分方程的数值解法等,可以让学生初步掌握函数逼近的思想及学习处理连续与离散的关系.本书下册还介绍了MATLAB软件的使用方法及数学实验,使学生不但会手算,还会用计算机计算与绘图.

本书第一章～第四章,第十章～第十四章由黄象鼎编写;第五章～第八章,第九章,第十五章及第十六章由姜明启编写;附录(MATLAB简介及数学实验)由谢进编写;书中各章节的习题由杨丽华、孟新焕配置,大部分习题给出了答案或提示.

武汉大学齐民友教授、黄浦生教授、王维克教授仔细审阅了书稿,提出了许多宝贵的意见与建议;高等教育出版社的徐可编辑、武汉大学数学与统计学院陆君安教授、王维克教授为组织筹划本套书的编写、出版作出了卓有成效的工作.对于他们的热心指点和所付出的辛勤劳动表示衷心的感谢.

限于编者的学识,书中定有谬误及不当之处,诚望读者批评指正.

编 者

2002年7月于武汉大学

目　　录

第一章　极限理论初步

§1.1　集合及其初等运算

1.1.1　集合的概念

集合简称为集.集合的概念是数学最基本因而不必定义的概念.集合论语言已成为最基本的数学语言.集合这一概念可描述如下:一个**集合**是由确定的一些对象汇集的总体.组成集合的这些对象称为此集合的元素.

通常用大写字母 $A,B,X,Y,S,\Omega,\cdots$ 表示集合,而用小写字母 $a,b,x,y,s,\omega,\cdots$ 表示集合的元素.若 x 是集合 S 中的元素,则说 x 属于 S,记作 $X\in S$;若 y 不是集合 S 的元素,则说 y 不属于 S,记作 $y\notin S$.

若集合 A 的任何元素都是集合 B 的元素,则说 A 是 B 的**子集合**,简称 A 是 B 的子集.记作 $A\subset B$(读作:A 包含于 B)或者 $B\supset A$(读作:B 包含 A).如果集合 A 的任何元素都是 B 的元素并且集合 B 的任何元素也都是集合 A 的元素,即有 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与集合 B **相等**,记作 $A=B$.由以上定义知,$A=B$ 这种情形是 $A\subset B$ 的一种特殊情形,即记号"$\subset$"表示一般的包含关系,不限于真包含——A 真包含于 B 即指 $A\subset B$,但 B 中至少有一个元素不属于 A.

为了方便起见,我们引入一个集合——**空集**.空集是指不含任何元素的集合,记作 $\varnothing$.根据空集的定义,对任一集合 A,有 $\varnothing\subset A$,即空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集.

一个集合若仅含有限多个元素,则称该集合为**有限集**,否则称为**无限集**.

集合可以通过罗列其元素或者指出其元素应满足的条件等来表示.例如,若 E 是不超过 20 的全体素数的集合,则 E 可表示为

$$E=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}.$$

又如 S 是表示某一给定的 m 次多项式 $p_m(x)$ 的根构成的集合,则 S 可表示为

$$S=\{x\mid p_m(x)=0\}.$$

以上两个集合都是有限集.

集合 $F=\{x\mid x$ 为实数且 $x^2+1=0\}$ 实际是空集.以下是两个无限集的例子:

全体正整数组成的集 $\mathbf{N}$ 可表示为

$$\mathbf{N} = \{1,2,3,\cdots\},$$

单位圆的圆周上的点构成的集合 C：

$$C = \{(x,y) \mid x,y \text{ 为实数且 } x^2 + y^2 = 1\}.$$

仅含一个元素 a 的集合称为**单元素集**或独点集，记为$\{a\}$. 例如，所有偶素数组成的集合就是单元素集$\{2\}$. 注意 a 与$\{a\}$ 有不同的意义，前者是一个元素，后者是仅含一个元素的集合. 同样 $\varnothing$ 与$\{\varnothing\}$ 的意义也不同：前者是空集，后者是若干集合的集合，或称集合的簇，但此簇仅含一个元素：空集 $\varnothing$.

为了今后讨论方便，我们用特定的字母表示特定的数集.

$\mathbf{N}$：全体自然数；亦即全体正整数；

$\mathbf{Z}$：全体整数；

$\mathbf{Q}$：全体有理数；

$\mathbf{R}$：全体实数；

$\mathbf{C}$：全体复数.

我们还将非负整数，非负有理数，非负实数的集合分别记为 $\mathbf{Z}_+$，$\mathbf{Q}_+$，$\mathbf{R}_+$. 按照包含关系有

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C},$$

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}_+ \subset \mathbf{Q}_+ \subset \mathbf{R}_+.$$

在书写有关集合的命题时，经常涉及到一些逻辑符号，下面介绍几个常用的符号，便于今后运用.

$L \Rightarrow P$　表示 L 蕴含 P，即命题 L 成立时命题 P 也成立，通常也说成由 L 可以推出 P.

$L \Leftrightarrow P$　表示 L 与 P 等价，即 $L \Rightarrow P$ 且 $P \Rightarrow L$，或者说 L 与 P 互为充分必要条件. 例如，对于 $x \in \mathbf{R}$，$x > 0$ 当且仅当 $\dfrac{1}{x} > 0$，这时我们可简明地写成：对 $x \in \mathbf{R}$，$x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > 0$. 又如

$$\text{集 } A = \text{集 } B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \text{ 且 } B \subset A.$$

$\exists$：表示存在，

$\forall$：表示每一个或任意一个或所有的.

例如：

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists\, x \in A，\text{使得 } x \notin B.$$

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall\, x \in A，\text{有 } x \in B.$$

1.1.2　集合的基本运算

1) 并与交

以下设 A,B 均为集合 E 的子集.

定义 1 由集合 A 与集合 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**.记为 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

求集合 A 与 B 的并集的运算称作集合的并运算,简称为集合的并.图 1－1 的阴影部分表示集合 A 与 B 的并集.

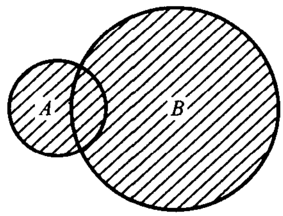

图 1－1

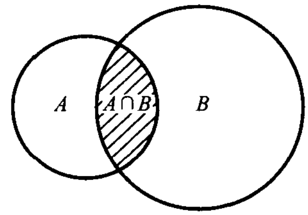

图 1－2

由以上定义,显然有

$$A\cup A=A,A\cup\varnothing=A.$$

定义 2 由同时属于集合 A 和集合 B 的所有元素的组成的集合称为 A 与 B 的**交集**,记为 $A\cap B$.即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

求集合 A 与 B 的交集的运算称为集合的交运算,简称为集合的交.图 1－2 的阴影部分表示集合 A 与 B 的交集.

由两集合交的定义知

$$A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing.$$

集合的交、并运算可以推广到一般情形,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\mid\forall n\in\mathbf{N},x\in A_n\},$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\mid\exists n_0\in\mathbf{N},x\in A_{n_0}\}.$$

2) 差与补

定义 3 两个集合 A 与 B 的**差**是由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合,记为 $A\setminus B$,即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

特别,当 B 为 A 的子集时,A 与 B 的差通常称作 B 在 A 中的**补集**(或余集),记作

$$C_BA\quad\text{或}\quad A^C.$$

差集、补集的图示见图 1－3,图 1－4.

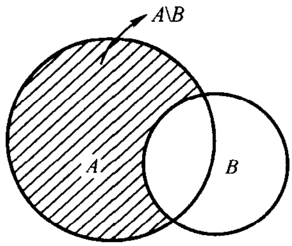

图 1 - 3

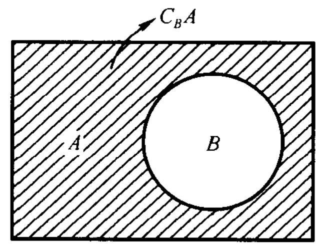

图 1 - 4

集合的并与交运算具有如下性质:

(i) 交换律　　$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$

(ii) 结合律　　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

(iii) 分配律　　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

以上运算律均可由集合相等的定义证得.

例 1　设 $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4\}$,易知

$$A \cup B = \{1,2,3,4\}, \quad A \cap B = \{2,3\}, \quad A \setminus B = \{1\}.$$

例 2　设 $A = \{(x,y) \mid 3x - y = 5\}, B = \{(x,y) \mid x + 2y = 4\}$,求 $A \cap B$.

解　问题相当于求线性方程组

$$\begin{cases} 3x - y = 5, \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

的解,容易求得其解为 $x = 2, y = 1$,故 $A \cap B = \{(2,1)\}$.

通常在讨论某一问题时,为方便起见,往往事先引入一个固定的集合 Ω,而所要研究的一切集合都是 Ω 的子集,这时我们也称 Ω 为全集. $A \subset \Omega$ 在 Ω 中的补集就简称为 A 的补集. 例如将实数集 **R** 看作全集,则有理数集 **Q** 的补集就是无理数集.

以下设 Ω 为全集,其他集合均为其子集,我们来讨论交、并、差、补的某些运算法则,这里求补运算是相对于全集 Ω 而言的.

易知,集合补与差运算满足关系:

$A \cup A^C = \Omega, A \cap A^C = \varnothing, A \setminus B = A \cap B^C.$

(iv) 对偶律(De. Morgan(德摩根)[①]公式)

① De. Morgan(1806—1871)—— 苏格兰数学家.

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \tag{1}$$
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C \tag{2}$$

我们证明第一式.

设 $x \in (A \cup B)^C$,则由补的定义知 $x \notin A \cup B$,从而 $x \notin A$ 且 $x \notin B$,于是必有 $x \in A^C$ 且 $x \in B^C$,即有

$$x \in A^C \cap B^C,$$

因此有

$$(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C. \tag{3}$$

另一方面,若设 $x \in A^C \cap B^C$,则 $x \in A^C$ 且 $x \in B^C$,从而 $x \notin A$ 且 $x \notin B$,于是 $x \notin A \cup B$,因此有

$$x \in (A \cup B)^C,$$

即有

$$A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C. \tag{4}$$

由(3),(4) 即知(1) 式成立.

对偶律可推广到一般情形,即设 $A_i (i = 1,2,\cdots)$ 为 Ω 的子集,则有

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^C = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^C, \tag{5}$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^C, \tag{6}$$

例 3 记 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,$A$ 与 B 为 Ω 的子集,已知 $A \cap B = \{2\}$,$A^C \cap B^C = \{1,9\}$,$A^C \cap B = \{4,6,8\}$,确定 A 与 B.

解 因 $A \cap B = \{2\}$,故 $2 \in A$ 且 $2 \in B$,又 $A^C \cap B = \{4,6,8\}$,故 $B = \{2,4,6,8\}$. 由 De. Morgan 公式(1),$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C = \{1,9\}$,故 $1 \notin A$,$1 \notin B$,$9 \notin A$,$9 \notin B$. 从而知 $A = \{2,3,5,7\}$,$B = \{2,4,6,8\}$.

例 4 设 A 与 B 为两个非空集合,记 $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$,并称为 A 与 B 的**对称差**,试证:

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

证 由前面所述知 $A \setminus B = A \cap B^C$,由分配律与 De. Morgan 公式(2),有

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C) \\ &= (A \cup B) \cap (A^C \cup B^C) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^C \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B). \end{aligned}$$

1.1.3 有限集与无限集 · 积集

若一个集合 E 由有限个元素组成,则称集 E 为**有限集**. 不是有限集的集合为**无限集**. 有限集与无限集也分别称为**有穷集与无穷集**. 例如:空集 $\varnothing$ 为有限集,它的元素个数是 0. 集 $\{x \mid x$ 为素数且 $x < 100\}$ 为有限集. 容易得知,若 S_1, S_2 都是

有限集，则 $S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2, S_1 \setminus S_2$，也都是有限集. 按照前面规定的记号，$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 都是无限集.

定义 1 若一个无限集中的元素可与自然数集 $\mathbf{N}$ 一一对应，即可表示为

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\},$$

则称这个集为**可列集**（或称为**可数集**）.

可以证明，无限集不一定是可列集，但是每个无限集必包含可列子集.

依定义，断定一个无限集是可列集，关键在于证明它可以与 $\mathbf{N}$ 一一对应，亦即证明，该集合中所有元素可以按此规则，不重复且无遗漏地排列成 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$.

例 1 整数集 $\mathbf{Z}$ 是可列集.

事实上，整数全体可按如下规则

$$0, 1, -1, -2, \cdots, n, -n, \cdots$$

排列下去，可见 $\mathbf{Z}$ 是可列集.

定理 1 可列个可列集之并集仍为可列集.

证 设 $A_n(n = 1,2,3,\cdots)$ 是（无限）可列个集合，其中每个集 A_n 均为可列集，要证

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \{x \mid \exists\, n_0 \in \mathbf{N}, 使\ x \in A_{n_0}\}$ 也是可列集.

证明分两步，先介绍什么是对角线法则. $\forall\, n \in \mathbf{N}$，不妨设

$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nk}, \cdots\},$$

列出集列 $\{A_n\}$ 的所有元素，如下：

$$\begin{array}{lccccccccccc}
A_1: & a_{11} & \rightarrow & a_{12} & & a_{13} & & a_{14} & & \cdots & a_{1n} & \cdots \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
A_2: & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & \cdots & a_{2n} & \cdots \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
A_3: & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & \cdots & a_{3n} & \cdots \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & & & \\
A_4: & a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & & \cdots & a_{4n} & \cdots \\
 & \vdots & \swarrow & \vdots & \swarrow & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\
A_n: & a_{n1} & & a_{n2} & & a_{n3} & & a_{n4} & & \cdots & a_{nn} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots &
\end{array}$$

我们将上述所列元素按箭头方向依次排列，于是所有的元素可无遗漏地排列成

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}, \cdots$$

以上这种排列规则称为**对角线法则**.

第二步是做到不重复，因为可能有不同的集合 $A_i, A_j(i \neq j)$ 的交非空，则有些元素可能在排列中重复出现，这时只保留一个而剔除重复的，这样得到的排列