内 容 简 介

本书主要介绍：函数芽在低余维下的分类与形变理论，除法定理与Malgrange预备定理，映射芽的开折理论，映射芽的有限决定性，Thom-Boardman奇点集，稳定映射芽的分类以及奇点理论在分歧问题研究中的应用．本书比较全面地阐述基本理论与方法，并反映近20年来奇点理论的某些发展，其中包括作者及国内研究者的部分工作，试图将读者引导到现代研究前沿．

读者对象：高等院校数学系高年级学生、研究生、大学教师及有关的科技工作者．

图书在版编目(CIP)数据

光滑映射的奇点理论/李养成著．—北京：科学出版社，2002．1
(现代数学基础丛书)
ISBN 7-03-009594-4

Ⅰ．光… Ⅱ．李… Ⅲ．映射(数学)－奇点理论 Ⅳ．O189

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第042759号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
西源印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年1月第 一 版	开本：850×1168 1/32
2002年1月第一次印刷	印张：13
印数：1—2 000	字数：336 000

定价：29.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈北燕〉)

序　言

奇点理论是分析学科中的一个新的分支,它是处在分析、微分拓扑、微分几何、交换代数与李群以及微分方程等数学学科交汇处的一门学问,又在诸多领域,如微分方程、振荡积分、动力系统、分歧理论、突变理论、几何光学与波动光学等学科中有广阔的应用.

E. Brieskorn 曾说:"在数学的许多领域以及许多应用中,都有反常现象,而'正常与反常'这一对矛盾则是数学里最常见的矛盾……".这里所谓的反常就是指某种奇异性,也就是奇点的实质背景.可以说奇异性具有普遍性,其实科学家早就观察到并认识到研究它们的重要性,但直到 20 世纪 50 年代 H. Whitney 做出开创性工作之前尚无人对此做过系统的研究,原因是当时数学的发展水平尚未能为其诞生提供思想和工具的准备.我们回顾一下奇点理论发展的历史进程,最早有 20 世纪 30 年代 H. M. Morse 的临界点理论,40 年代 H. Whitney 的与微分流形嵌入、浸入有关的奇点工作,以及 L. Pontryagin 与 H. Whitney 研究的与示性类有关的奇点工作.这一时期是个别成果积累与建立一般理论的酝酿阶段,也是奇点的萌芽时期.1955 年 H. Whitney 发表了关于把平面映到平面的映射奇点工作,它标志着奇点理论作为一门独立的数学分支登上了数学的舞台.1960 年 R. Thom 更进一步把奇点理论中的方法与结果纳入一个更为概括的理论框架中,经过 Thom 的提炼,奇点理论得到蓬勃的发展,出现了像 J. Mather, V. I. Arnold 等人的一系列重大成果和进展,至此呈现出一个繁荣的局面.因此把这一有发展前景的理论介绍给我国读者是一件很有意义的工作,而李养成教授这本著作也就应运而生.近二三十年来,国外在奇点理论方面陆续有几本著作面世,并各有其优点,但与国外的同类著作相比,本书有以下两个特点:

(1) 奇点理论发展至今其内容已如此丰富,因此在选材上就

必须周密考虑.本书选材适当,它既包含了近20年来发展迅速的一些重要论题(其中也含有作者本人的研究成果),而又不是盲目地追求全面,以免内容太多而增加读者的困难与负担,这样既能使读者较为方便地进入这个领域,并能较快地深入到这一领域的某些研究前沿,又可以适合于不同目的的读者的要求.

(2) 可读性强.奇点理论具有深厚的实际背景,但需借助现代数学工具,其研究的过程及结果的表达便显得相当的抽象,掩盖了它的具体背景,因此对读者来说在理解与掌握上都相当费时费力.而本书在处理重要概念与理论上,结合了许多具体的例子来讲述,使读者能透过形式化的表达方式,建立起直觉的感性认识,这是符合认识论的,无疑对读者在理解与掌握理论上会有极大的帮助.

由于本书具有上述特点,相信它对读者学习奇点理论会有很大的用处.我为它的出版而高兴,所以应李养成同志所约写下上面一些话(也是我读此书时的一点感想)作为序言.

李培信

2000年春于北京中关村

前　言

V. I. Arnold 在《突变理论》中指出："在 Whitney 的奠基性工作之后，奇点理论发展迅猛，现在已成为数学的最重要领域之一."面对奇点理论如此丰富的内容，本书着重于局部理论，试图从中选取十分有意义的重要内容予以介绍，其中包括近 20 年来部分研究专题.下面简述本书的内容安排.

芽是奇点理论中最基本的概念.第一章分别就函数芽、映射芽以及微分同胚芽做了介绍.我们假定读者熟悉反函数定理，Taylor 公式和常微分方程的解的存在惟一性定理，由此可自然地建立芽的导网，局部微分同胚群的无穷小生成元(用向量场芽表达)以及具有常秩的映射芽的标准形式(即秩定理)等.而通过对芽取有限导网运算，光滑函数芽环及光滑映射芽所成之模都变为有限维实向量空间，$\mathbb{R}^n$ 上的局部微分同胚群变为 Lie 群，这样有可能将无穷维问题化简为有限维来处理，这是奇点理论研究中一种重要手段.本章还讨论了一类重要的函数芽即 Morse 芽，证明了 Morse 引理，并初步探讨光滑函数芽的分类.第二章引入 R. Thom 的横截性概念，它是微分拓扑和奇点理论中的一个重要的基本概念.横截性是正则性概念的延伸，我们在证明 Sard 定理之后，建立了各种形式的横截性定理，包括参数横截性定理，导网形式的横截性定理，并应用于 Thom 的一阶奇点集的讨论，为进一步学习 Thom-Boardman 奇点(见第十一章)做准备.读者从§2.5 中的一些结果可看出横截性这一工具的威力.以上两章组成本书的预备知识.

第三章讨论余维数不大于 5 的函数芽的分类，给出了 Thom 分类定理，突变论中 7 种初等突变模型，它是奇点理论在 20 世纪 70 年代最重要的成果之一.由于一个函数芽余维数有限等价于该函数芽关于右等价群 $\mathscr{R}$ 是有限决定的，这说明分类问题与函数芽的有限决定性有着密切的联系，因此在探讨函数芽在低余维下的

分类之前，我们讨论函数芽关于右等价群的有限决定性．这样做还有助于读者更好地理解映射芽有限决定性的一般理论（见第十章）．本书第四、五两章分别介绍除法定理与 Malgrange 预备定理．对于一般的除法定理，首先证明它等价于多项式除法定理，然后采用 Nirenberg 方法证明多项式除法定理．第五章我们从除法定理推导 Malgrange 预备定理．事实上它们彼此是等价的，都表达了分析学中的一个深刻结果，但预备定理使用了更加代数化的语言来陈述．须知 Malgrange 预备定理是奇点理论的一个非常有用的工具，曾被 Thom 誉为局部分析的四大支柱之一．在第五章有一节介绍该定理的应用，以此为基础，第六章讨论函数芽的形变理论．如果一个函数芽 f 存在通用形变，那么对 f 做扰动产生的每一个形变都可由 f 的通用形变导出，这说明研究通用形变是很有意义的．本章的一个主要结果是通用形变定理，由它可推知函数芽 f 具有通用形变的充要条件是 f 具有有限余维，因而等价于它是有限 $\mathscr{R}$-决定的．此外，通用形变还可用横截性来描述．利用形变理论继续对 Thom 的初等突变模型讨论，可看出它为突变理论的发展提供了理论依据．第七章介绍 Whitney 的著名工作，从平面到平面的光滑映射的奇点，证明了在一般状况下，这样的奇点只能是折叠或尖点．

第八章引入 J. N. Mather 提出的 5 类局部微分同胚群，讨论映射芽在这 5 类群（特别是左右等价群 $\mathscr{A}$ 和接触等价群 $\mathscr{K}$）作用下的切空间，为本书余下的几章做准备，这是因为映射芽的切空间的有关信息为研究映射芽本身提供了重要信息．第九章介绍映射芽的开折理论，主要结果是两个通用性定理．第一个对群 $\mathscr{A}$ 作用下的开折而言，称为 $\mathscr{A}$-通用开折定理，它曾被 Thom 猜测而由 Mather 所证明．第二个则在接触等价意义下以形变的形式表达，叫做 $\mathscr{K}$-通用形变定理．作为它的一个应用，§9.3 介绍了 B. Morin 研究过的一类高阶奇点．第十章开展映射芽的有限决定性理论的讨论，这是自 20 世纪 70 年代以来非常活跃的研究课题．本章不仅比较简洁地全面描述了 Mather 的基本结果，而且反映了在该理论

发展中的一些有代表性的研究成果,介绍了基本的研究方法与技巧,以便于读者较快地进入该研究领域.第十一章讨论 Thom-Boardman 奇点,介绍了 Boardman 的基本理论.证明了映射芽的 Boardman 符号是接触等价不变量,因而可应用于映射芽 $\mathcal{K}$-等价的判别.并且对映射芽的开折而言,它也是一个不变量,从而为研究稳定映射芽的分类做准备.第十二章在刻画了稳定映射芽的代数及几何特征后,证明了 Mather 关于稳定芽的基本分类定理,并且陈述了他关于稳定映射的一些深刻结果.Mather 对于稳定映射的一系列深入研究为奇点理论的发展做出了重要贡献.为理解 Mather 的工作,本章给出了稳定芽分类的几个典型实例,并讨论了某些稳定映射可能出现的奇点类型.第十三章讨论奇点在分歧理论中的应用,它是由 M. Golubitsky 和 D. G. Schaeffer 等所开创并且自 20 世纪 80 年代以来得到很大发展的研究领域.本章讨论的对象是以紧致 Lie 群为对称群的分歧问题,因此本章开头两节介绍紧致 Lie 群的有关知识,接着讨论与紧致 Lie 群可交换的光滑映射芽.在这一章中我们应用奇点理论方法与群论方法相结合研究静态分歧问题,主要考虑分歧问题的识别与开折两个方面,试图为读者继续深入研究创造条件.

本书力求用简明易懂的叙述方式,试图深入浅出地介绍基本概念与基本理论,以帮助读者掌握其要义,领悟基本思想与方法.同时希望本书能反映近 20 年来奇点理论的某些发展,以便读者能较快地进入现代研究的某些领域.本书包含了我国奇点理论工作者及作者本人的部分研究工作.在内容编排上,本书兼顾到读者的不同需求.全书可作为研究生教材,也可供大学教师和应用奇点理论的科技工作者阅读与参考.本书前 7 章还可供大学数学系高年级本科生选修课使用.阅读本书不要求读者具有奇点理论方面的初步知识,如果读者熟悉有关流形、李群及交换代数的初步知识则更方便.对于初学者,某些命题(例如 Sard 定理,Nirenberg 扩张引理等)的证明亦可略去不读.

本书第四、五两章由李兵博士撰写初稿,他还阅读过书稿的若

干章节.提出许多改进意见.感谢他为本书付出的辛勤工作.

本人特邀请我的老师李培信教授为本书作序并担任本书主审.整个写作过程包括酝酿写作大纲到成书出版一直得到他的关心与指教.李先生审阅全部书稿提出不少宝贵意见.作者在此对李培信先生的关心、鼓励与指导表示最诚挚的感谢.

作者非常感谢姜伯驹、刘应明院士为推荐本书出版给予的有力支持,十分感谢沈信耀、虞言林、陆洪文、陈志华、杨向群和唐梓洲教授对本书的关心、支持与真诚帮助.感谢余建明、邹建成博士的热忱支持.由于作者学识有限,书中难免有谬误之处,热诚欢迎读者批评指正.

本书得到国家自然科学基金委员会基金项目的部分资助,还得到中南大学和湖南师范大学的资助.作者借此机会一并表示感谢.作者感谢科学出版社特别是吕虹编审的辛勤劳动.

李养成

2001年1月于中南大学

目　　录

第一章　芽与导网

讨论光滑映射的局部性质，自然地引入芽的概念。本章前 3 节分别介绍函数芽、映射芽以及微分同胚芽的基本概念与基本性质。读者将会发现书中有时用代数的语言来表达几何与分析性质。而对芽取导网运算，将光滑函数芽(或映射芽)用它们的 Taylor 多项式(或 Taylor 多项式映射)来代替，有可能将无穷维问题简化为有限维来处理，这是奇点理论研究中一种重要手段。第四节介绍 Morse 芽，初步探讨光滑函数芽的分类，可看做是前 3 节的应用。

§1.1　光滑函数芽环

如果两个函数在一点的某个邻域内相一致，那么它们在该邻域内具有相同性质。我们在讨论函数的局部性质时，可以将它们归入同一类而不加区分。因此对在某点附近有定义的一族函数分类进行研究自然导致函数芽的概念。

1.1.1　C^∞ 函数芽环

设 U 为$\mathbb{R}^n$ 中开集。n 元实值函数 $f: U\to\mathbb{R}$ 叫做无穷次可微的，如果对于 U 中的每一点 x，f 的各阶偏导数在点 x 都连续。U 上的无穷次可微函数又叫做光滑函数或 C^∞ 函数。

定义 1.1.1　C^∞ 函数在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的芽是 C^∞ 函数 $\tilde{f}: U\to\mathbb{R}$ (U 为点 0 的开邻域)的一个等价类，其等价关系规定如下：两个 C^∞ 函数 $\tilde{f}: U\to\mathbb{R}$ 和 $\tilde{g}: V\to\mathbb{R}$ 是等价的，当且仅当存在点 0 的开邻域 $W\subset U\cap V$，使得 $\tilde{f}\big|W=\tilde{g}\big|W$。以上述 $\tilde{f}$(或 $\tilde{g}$)为代表的 C^∞ 函数芽记为 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}$。$C^\infty$ 函数芽又叫做光滑函数芽。

将 C^∞ 函数在 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的芽组成之集记为 $\varepsilon_{(\mathbb{R}^n,0)}$ 或简记为

ε_n. 我们可在 ε_n 中引入代数运算. 设 $f,g\in\varepsilon_n$, 取它们的代表 $\tilde{f}$: $U\to\mathbb{R}$, $\tilde{g}:V\to\mathbb{R}$. 按照函数的加法和乘法, 有

$$\tilde{f}+\tilde{g}:U\cap V\to\mathbb{R}, x\mapsto(\tilde{f}+\tilde{g})(x)=\tilde{f}(x)+\tilde{g}(x).$$

$$\tilde{f}\cdot\tilde{g}:U\cap V\to\mathbb{R}, x\mapsto(\tilde{f}\cdot\tilde{g})(x)=\tilde{f}(x)\cdot\tilde{g}(x).$$

然后取 $\tilde{f}+\tilde{g}$, $\tilde{f}\cdot\tilde{g}$ 在 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的芽, 分别记为 $f+g$, $f\cdot g$, 叫做函数芽 f 与 g 的和与积.

容易验证 ε_n 对于加法与乘法做成一个具有单位元的可换环, 实际上它是一个实代数. 这是因为 $\mathbb{R}$ 本身是一个实数域, 并且 ε_n 中的加法、纯量乘法以及乘法是由 $\mathbb{R}$ 上的运算诱导出来的.

类似地可以定义 C^∞ 函数在任意点 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 处的芽, 并记所有这样的芽组成之集为 $\varepsilon_{(\mathbb{R}^n,x_0)}$, 在该集中引入代数运算使它成为一个可换环.

本书中的函数芽指的是 C^∞ 函数芽, 若无其他声明的话.

1.1.2 极大理想及其幂

令 $\mathcal{M}_n=\{f\in\varepsilon_n\mid f(0)=0\}$, 易见 $\mathcal{M}_n\subset\varepsilon_n$ 是极大理想且 $\varepsilon_n/\mathcal{M}_n=\mathbb{R}$. 事实上, $\mathcal{M}_n$ 是 ε_n 中惟一的极大理想. 为证实这一点, 假设 $f\notin\mathcal{M}_n$, 则 $f(0)\neq0$, 因而它的任意一个代表 $\tilde{f}$ 在原点的某一邻域内的值不为 0, $1/\tilde{f}$ 在该邻域内有定义而且是 C^∞ 的, 这说明 f 是一个可逆芽并且不包含在 ε_n 的任何真理想中.

设 $x_1,\cdots,x_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的坐标函数, 则 $\mathcal{M}_n$ 由 $x_1,\cdots,x_n$ 生成. 更一般地, 我们有下列结论.

定理 1.1.1 设 $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n$ 的坐标为 $(t_1,\cdots,t_k;x_1,\cdots,x_n)$, 简记为 (t,x). 令

$$\mathcal{I}=\{f:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}\mid f(t,0)=0, t \text{ 与 } 0\in\mathbb{R}^k \text{ 相邻近}\}. \tag{1}$$

则 $\mathcal{I}$ 是 ε_{k+n} 中的理想, 由坐标函数芽 $x_1,\cdots,x_n$ 所生成. 于是

$$f\in\mathcal{I}\Leftrightarrow f=\sum_{i=1}^n x_i f_i, f_i\in\varepsilon_{k+n}, i=1,\cdots,n.$$

证 容易看出 $\mathscr{I}$是 ε_{k+n} 中的理想. 选取 $f\in\mathscr{I}$的一个代表 $\tilde{f}$: $U\times V\to\mathbb{R}$ 满足 $\tilde{f}\mid U\times\{0\}=0$, 其中 U 为$\mathbb{R}^k$ 中原点的邻域, V 为$\mathbb{R}^n$ 中原点的凸邻域. 取$(t,x)\in U\times V$, 连接点$(t,0)$与点(t,x)的直线段$\subset U\times V$, 且 $\tilde{f}(t,0)=0$. 由微积分中的牛顿-莱布尼兹公式, 有

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(t,x) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\tilde{f}(t,\lambda x)\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_i}(t,\lambda x)\cdot x_i\right)\mathrm{d}\lambda \\
&= \sum_{i=1}^n x_i\cdot\int_0^1 \frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_i}(t,\lambda x)\mathrm{d}\lambda .
\end{aligned}
$$

令

$$
\tilde{f}_i(t,x) = \int_0^1 \frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_i}(t,\lambda x)\mathrm{d}\lambda ,
$$

则 $\tilde{f}_i$ 是C^∞ 函数, $i=1,\cdots,n$, 并且

$$
\tilde{f}(t,x) = \sum_{i=1}^n x_i\,\tilde{f}_i(t,x),
$$

取在 $0\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n$ 处的芽, 得

$$
f = \sum_{i=1}^n x_i f_i, \qquad f_i\in\varepsilon_{k+n}.
$$

由此可知, $\mathscr{I}$由坐标函数芽 $x_1,\cdots,x_n$ 生成. 证毕.

注 将任意 $f\in\varepsilon_n$ 和由 $f'(t,x)=f(x)$所定义的 $f'\in\varepsilon_{k+n}$ 等同, 从而将 ε_n 等同于ε_{k+n}的一子环. 理想 $\mathscr{I}$可改写为 $\mathscr{M}_n\varepsilon_{k+n}$或 $\mathscr{M}_x\cdot\varepsilon_{t,x}$, (1)式则写为

$$
\mathscr{M}_n\cdot\varepsilon_{k+n} = \{f\in\varepsilon_{k+n}\mid f\mid\mathbb{R}^k\times\{0\}=0\}. \tag{2}
$$

现介绍本定理的一个应用. ε_n 的一个线性算子

$$X: \varepsilon_n \to \mathbb{R}$$

叫做求导算子,如果它满足莱布尼兹法则

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g(0) + f(0) \cdot X(g), \quad f, g \in \varepsilon_n.$$

特别,$X(1) = X(1 \cdot 1) = X(1) + X(1)$. 于是 $X(1) = 0$. 并且 $X(c) = 0$, c 为常值函数芽.

容易验证 ε_n 的求导算子全体组成一个向量空间,记为 $T_0 \mathbb{R}^n$,叫做$\mathbb{R}^n$ 在原点的切空间.进而有

定理 1.1.2 $\left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_0 : \varepsilon_n \to \mathbb{R}, f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ $(i = 1, \cdots, n)$为向量空间 $T_0 \mathbb{R}^n$ 的一组基.

证 $\left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_0$ 是 ε_n 的求导算子$(i = 1, \cdots, n)$. 为证它们是 $T_0 \mathbb{R}^n$ 的基,首先说明它们是线性无关的.设

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_0 = 0, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

将它作用于坐标函数芽 x_j,得

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left.\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right|_0 = \lambda_j = 0, \qquad j = 1, \cdots, n.$$

其次说明$\left\{\left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_0\right\}$是生成集.设 X 是 ε_n 的任意一个求导算子且 $X(x_i) = \mu_i$ $(i = 1, \cdots, n)$,则

$$Y = X - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_0$$

也是求导算子且 $Y(x_i) = 0$. 任取 $f \in \varepsilon_n$,据定理 1.1.1,有

$$f = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i f_i, \quad f_i \in \varepsilon_n,$$

因此

$$
\begin{aligned}
Y(f) &= Y(f(0)) + \sum_{i=1}^{n} Y(x_i f_i) \\
&= 0 + \sum_{i=1}^{n} Y(x_i)\cdot f_i(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i(0)\cdot Y(f_i) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

于是 $X = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_0$,证毕.

为讨论方便起见,引入下列记号:设 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$,其中 α_i 为非负整数,记

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \qquad 0! = 1,$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f, \qquad |\alpha| = D^\alpha \text{ 的阶数}.$$

对于$(\lambda, \alpha) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$,其中 λ_i, α_i 为非负整数,记

$$(t, x)^{\lambda, \alpha} = t_1^{\lambda_1} \cdots t_k^{\lambda_k} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

$$D^{\lambda, \alpha} f = \frac{\partial^{|\lambda| + |\alpha|}}{\partial t_1^{\lambda_1} \cdots \partial t_k^{\lambda_k} \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f.$$

定理 1.1.3 设 ε_{k+n} 中理想 $\mathcal{M}_n \cdot \varepsilon_{k+n}$ 如定理 1.1.1 中所述,$r \geqslant 1$,则

$$\mathcal{M}_n^r \cdot \varepsilon_{k+n} = \{ f \in \varepsilon_{k+n} \mid D^{\lambda, \alpha} f | \mathbb{R}^k \times \{0\} = 0 \quad \text{对所有 } \lambda \text{ 及所有 } \alpha, |\alpha| < r \},$$

并且这一理想由形如

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \qquad |\alpha| = r$$

的 r 次单项式芽生成.

证 $\mathcal{M}_n^r \cdot \varepsilon_{k+n} = \{f \in \varepsilon_{k+n} \mid f = \sum_i f_{i_1} \cdots f_{i_r}, f_{i_j} \in \mathcal{M}_n \cdot \varepsilon_{k+n}\}$,其中 $\sum_i$ 为有限和. 据定理 1.1.1,本定理的第二个断言明显成立.

至于第一个断言,从乘积的求导法则可知,$f \in \mathcal{M}_n^r \cdot \varepsilon_{k+n} \Rightarrow D^{\lambda,\alpha} f \mid \mathbb{R}^k \times \{0\} = 0$ 对所有 λ 及所有 $\alpha(|\alpha| < r)$ 皆成立. 另一方面,若对每一 $\alpha(|\alpha| < r)$ 有 $D^{0,\alpha} f \mid \mathbb{R}^k \times \{0\} = 0$,则依归纳法,$f \in \mathcal{M}_n^{r-1} \cdot \varepsilon_{k+n}$ 且 $f = \sum_{|\alpha| = r-1} f_\alpha \cdot x^\alpha$. 欲证 $f \in \mathcal{M}_n^r \cdot \varepsilon_{k+n}$,只需证对所有 $\alpha, |\alpha| = r-1, f_\alpha \in \mathcal{M}_n \cdot \varepsilon_{k+n}$,即 $f_\alpha \mid \mathbb{R}^k \times \{0\} = 0$ 就行了. 倘若存在 $\alpha_0, |\alpha_0| = r-1$,使得 $f_{\alpha_0} \mid \mathbb{R}^k \times \{0\} \neq 0$,则在 $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ 上,

$$D^{0,\alpha_0} f = \sum_\alpha D^{0,\alpha_0}(f_\alpha \cdot x^\alpha) = \alpha_0! \cdot f_{\alpha_0} \neq 0,$$

这与 $D^{0,\alpha} f \mid \mathbb{R}^k \times \{0\} = 0$ 对所有 $\alpha(|\alpha| < r)$ 均成立相矛盾!

推论 1.1.1 设 $f \in \varepsilon_n$,则 $f \in \mathcal{M}_n^{r+1} \Leftrightarrow f$ 以及它的阶数不大于 r 的所有偏导数在 $0 \in \mathbb{R}^n$ 的值均为零.

我们将属于 $\mathcal{M}_n^{r+1}$ 中的函数芽叫做在 $0 \in \mathbb{R}^n$ 处 r-平坦的函数芽.

1.1.3 导网(导网)空间 J_n^r

设 $f \in \varepsilon_n$. 依 Taylor 公式,将 f 在点 $0 \in \mathbb{R}^n$ 处做 Taylor 展开,得

$$f(x) = f(0) + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant r} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha + \varepsilon(x), \tag{3}$$

其中余项 $\varepsilon(x) \in \mathcal{M}_n^{r+1}$. $f \in \varepsilon_n$ 在 $\varepsilon_n / \mathcal{M}_n^{r+1}$ 中的像叫做 f 的 r-导网,记为 $j^r(f)$ 或 $j^r f$. 由上式知,$j^r f$ 可表示为 f 在点 $0 \in \mathbb{R}^n$ 处的 r 阶 Taylor 多项式. 因此 ε_n 中二函数芽 f 和 g 具有相同的 r-导网,当且仅当 f 与 g 以及它们的阶数直到 r 的所有相应的偏导数在点 $0 \in \mathbb{R}^n$ 的值均相等.

将商代数 $\varepsilon_n/\mathscr{M}_n^{r+1}$ 记作 $J^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$，简记为 J_n^r. 根据 Taylor 公式，J_n^r 标准地同构于次数不大于 r 的 n 元多项式代数. 在这一多项式代数中的乘法是将两个次数不大于 r 的 n 元多项式按通常的方式相乘然后舍去次数大于 r 的所有各项. J_n^r 还叫做 $\mathbb{R}^n$ 上的 C^∞ 函数在 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的 r-导网组成的代数. 显然

$$\varepsilon_n/\mathscr{M}_n^{r+1}\cong\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]/\langle x_1,\cdots,x_n\rangle^{r+1},$$

其中 $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ 表示 $x_1,\cdots,x_n$ 的多项式环，$\langle x_1,\cdots,x_n\rangle^{r+1}$ 表示由 $x_1,\cdots,x_n$ 生成的理想 $\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ 的 $(r+1)$ 次幂.

商空间 $\mathscr{M}_n^r/\mathscr{M}_n^{r+1}$ 可以标准地等同于 n 元 r 次齐次多项式所成的实向量空间.

1.1.4 ε_n 中具有有限余维的理想

设 I 是 ε_n 中的理想. 若 ε_n/I 作为实向量空间是有限维的，则 I 叫做 ε_n 中余维有限的理想. 数 $\dim_{\mathbb{R}}\varepsilon_n/I$，记为 $\operatorname{Codim}I$，叫做 I 在 ε_n 中的余维数. 例如，$\mathscr{M}_n^r$（r 为自然数）便是 ε_n 中余维有限的理想.

命题 1.1.1 设 I 为 ε_n 中理想，I 在 J_n^r 中的投影记为 $\bar{I}$，则下列条件是等价的：

(i) $I\supset\mathscr{M}_n^r$，

(ii) $\bar{I}\supset\mathscr{M}_n^r/\mathscr{M}_n^{r+1}$，即 $I+\mathscr{M}_n^{r+1}\supset\mathscr{M}_n^r$.

证 (i)⇒(ii) 显然.

(ii)⇒(i) 设 $\{g_1,\cdots,g_s\}$ 是 $\mathscr{M}_n^r$ 的一组生成元，例如可取形如 $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$，$\alpha_i$ 为非负整数且 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=r$ 的 r 次单项式作为 $\mathscr{M}_n^r$ 的生成元.

由条件 $\mathscr{M}_n^r\subset I+\mathscr{M}_n^{r+1}$，则对每一 $g_i(i=1,\cdots,s)$，可找到 $f_i\in I$，使得

$$g_i-f_i\in\mathscr{M}_n^{r+1},$$