

教育部高校学生司推荐

高教最新版

全国各类成人高考
复习考试辅导教材
专科起点升本科

第2版

高等数学(二)

本书编写组



高等教育出版社

HIGHER
EDUCATION
PRESS

KAOSHI

353

G724.4

U93

教育部高校学生司推荐

全国各类成人高考复习考试辅导教材

专科起点升本科

高等数学(二)

第2版

本书编写组

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(二)/《高等数学》(二)编写组编. —2版.

—北京: 高等教育出版社, 2002 重印

全国各类成人高考复习考试辅导教材. 专科起点升本科

ISBN 7-04-011284-1

I. 高... II. 全... III. 高等数学—成人教育: 高等教育—自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 042869 号

全国各类成人高考复习考试辅导教材 专科起点升本科——高等数学(二)(第二版)

本书编写组

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

传 真 010-64014048

购书热线 010-64054588

免费咨询 800-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 北京铭成印刷有限公司

开 本 850×1168 1/16

印 张 17

字 数 400 000

版 次 2000 年 9 月第 1 版

2002 年 7 月第 2 版

印 次 2002 年 11 月第 4 次印刷

定 价 23.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换.

版权所有 侵权必究

出版前言

2002年,教育部高校学生司和教育部考试中心重新修订颁布了《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》,专科起点升本科的复习考试大纲将原来的师范类和非师范类统考科目由原来的8科调整为不分师范类和非师范类共10科统考科目.新大纲规定了哲学、文学、经济学、教育学、管理学、法学、理学、工学、农学、医学等学科的考试科目和复习考试内容,共编为5册,由高等教育出版社出版.

为了满足广大考生复习备考的需求,我们组织长期从事成人高考复习辅导的专家、教授,前大纲编写修订和考试命题研究人员,及时修订和新编了与考纲配套的系列复习考试辅导教材.

本系列辅导教材依据2002年教育部最新颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》编写,包括《政治》、《英语》、《教育理论》、《大学语文》、《艺术概论》、《高等数学(一)》、《高等数学(二)》、《民法》、《生态学基础》、《医学综合》等共10册.

本系列辅导教材融复习内容与考试内容于一体,不仅有助于考生复习并掌握扎实的基础知识,而且有利于考生把握考试的重点、难点,提高应试能力.其内容的编排与“大纲”的知识系统完全一致,不仅充分体现了“大纲”的知识能力要求,而且注重贴近考试实际,收录了大量的应用性和能力型练习题并附有解题指导和参考答案,使考生在整个学习进程中能够做到“学练结合”,及时检验复习效果,增强应考适应力和信心.

此外,为了更直观地突出书中的重点、难点,更有效地遏制盗版,本版书采取双色印刷,从形式上更加新颖.

本套教材的编写,融入了诸多专家、命题研究人员和一线教师的心血;凝结着“从知识立意向能力立意转化”等现代教育思想的精华;体现了我们出版工作者在考试用书编写方面的整体策划思想.

由于编写时间仓促,书中难免还存在这样那样的不足或错误.为了不断改进和完善本系列教材,使之能更适合广大读者的要求,为考生提高复习备考能力和水平发挥更大作用,我们恳切希望各界人士提出批评指正意见.

高等教育出版社

2002年6月

编者的话

成人高等教育事业近年来得到迅速发展,尤其是专科起点升本科的发展更为显著.为了适应教育事业发展的要求,教育部组织重新修订并颁布了2002年《全国各类成人高等学校复习考试大纲——专科起点升本科》.为了能为成人高等教育事业的发展作些贡献,为了尽最大可能给成人考生以有益的帮助,使其能适应新的考试大纲,高等教育出版社组织编写了这套《全国各类成人高考复习考试辅导教材(专科起点升本科)》,本书就是这套书中的一本.

为了能为读者提供一本既有实用性更具有针对性的考试辅导书,我们认真研究了2003年版《考试大纲》以及从1994年至2002年的全部试题,确定了在本书编写中遵循“一个按照、两个针对”的原则:

1. 严格按照2003年《考试大纲》规定的考试内容和考试要求编写.

2. 一是针对成人考生的特点,二是针对考试命题的基本原则而编写.针对考试命题的基本原则体现在:本书以高等数学的基本知识、基本原理和基本技能为主要内容,避开复杂的运算与特殊的技巧性运算.针对成人考生的特点体现在突出基本概念的要害,基本性质的特点及基本计算方法的条理化,强调概念或公式的结构形式(这对正确理解和全面掌握知识是非常有益的)书中选配大量的例题,以有助于读者达到理解掌握.在每个例题中加以分析讲解,侧重于问题的形式特点及解决问题的思想方法.在很多概念、定理及性质以及有些例题的后面还给出一些说明,在说明中还指出应该引起读者注意的问题或一些带有共性的问题特点.意在引导读者自学并能提高效率.另外我们还将不同类型的题目之间的内在区别,以及在解题方法上的差异进行比较、归纳、总结,以利于读者学习.并将1994至2002年的试题中的同一类型的题目编写在一起,以便于读者掌握.同时所选的例题中包含了自1994年至2002年全国专升本考试高等数学(二)的试题,以有利于考生明了试题的广度与深度,明了自己的问题,例题中还包含了《考试大纲》中所规定的考试内容的常见的基本问题题型.在试题为例题的题中给出编号注明,如(9804)表示1998年试题中的第4题,(0021)表示2000年试题中第21题,以使读者能明确该题所出现的年份与该题在该年试卷中出现的位置.

对于每一章都给出了小结,指出本章基本概念、基本运算相关的问题及常见的试题类型及解题方法.

在每节后选有同步练习题,并附以参考解答.

本书选有两套模拟题及参考解答,以便于读者自我检测.

由于编写时间仓促,不当之处还望专家及广大读者提出宝贵的意见.

高等教育出版社对本书的出版作出了大量的工作,我们表示诚挚谢意.

高等数学(二)编写组

2002年7月

目 录

第一章 函数、极限和连续	1
第一节 函数	1
同步练习一及参考解答	16
第二节 极限	20
同步练习二及参考解答	36
第三节 函数的连续性	41
同步练习三及参考解答	46
小结	50
第二章 一元函数微分学	53
第一节 导数与微分	53
同步练习一及参考解答	81
第二节 中值定理及洛必达法则	97
同步练习二及参考解答	112
第三节 导数的应用	119
同步练习三及参考解答	130
小结	140
第三章 一元函数积分学	143
第一节 不定积分	143
同步练习一及参考解答	172
第二节 定积分	186
同步练习二及参考解答	204
第三节 定积分的应用	210
同步练习三及参考解答	215
小结	219
第四章 多元函数微积分初步	221
第一节 多元函数微分学	221
同步练习一及参考解答	237
第二节 二重积分	243
同步练习二及参考解答	253
小结	256
附录 2002 年成人高等学校专升本招生全国统一考试高等数学(二)试卷及参考答案	259

第一章 函数、极限和连续

第一节 函 数

一、函数概念

1. 函数的定义 设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y , 变量 y 随变量 x 而变化, 当变量 x 在一个非空实数集合 D 上取某一数值时, 变量 y 依照某一对应规则 f 总有唯一确定的数值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记为

$$y=f(x) \quad (x \in D)$$

其中 x 叫做自变量, y 叫做因变量或函数.

数集 D 称为这个函数的定义域, 记为 D 或 $D(f)$.

当 x 取定值 x_0 时所对应的 y 的数值 $y_0=f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$, 称为当 $x=x_0$ 时, 函数 $y=f(x)$ 的函数值.

全体函数值的集合 $\{y|y=f(x), x \in D\}$, 称为函数 $y=f(x)$ 的值域, 记为 Z 或 $Z(f)$.

函数的定义有两个基本要素: 定义域与对应规则. 因此, 只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时, 才认为它们是同一个函数.

例 1 (9501) 下列函数为同一函数的是().

A. $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$

B. $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $\varphi(x)=x+1$

C. $f(x)=x$ 与 $\varphi(x)=x(\sin^2 x + \cos^2 x)$

D. $f(x)=\lg(x^2)$ 与 $\varphi(x)=2 \lg x$

答 应选 C.

分析 对于 A, $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 而 $\varphi(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 由于定义域不同, 所以 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 不是同一函数, 故应排除 A. 对于 B, D 均因定义域不同而予以排除. 故应选 C. 事实上, 由于 $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1, x \in (-\infty, +\infty)$, 所以 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 为同一函数.

2. 函数的表示法

常用的函数表示法有三种: 解析法(也叫公式法)、表格法和图示法.

解析法就是用解析表达式(或公式)表示函数关系, 例如 $y=x^2+x; y=\sin x; y=\log_a x$ 等. 高等数学中讨论的函数用解析法表示的为多.

表格法是用列表的方法来表示函数关系. 例如我们所用的各种数学用表——平方表、立方表、对数表、三角函数表等, 在研究社会经济现象时, 常常采用这种表格法.

图示法是用直角坐标系 xOy 平面上的曲线(如直线、圆等等)来表示函数关系. 该曲线通常称为函数的图形(也称为图像).

函数的三种表示法各有优缺点, 在具体应用时, 常常是三种方法配合使用.

3. 显函数、分段函数、隐函数

(1) 显函数 函数关系用解析式 $y=f(x)$ 表示的称为显函数. 如 $y=x^2$, $y=\sqrt{\lg x}$ 等.

(2) 分段函数 有些函数, 对于其定义域内自变量 x 的不同值, 函数不能用一个统一的公式表示, 而要用两个或两个以上的公式来表示, 这类函数称为“分段函数”.

例如

$$y=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0; \end{cases} \quad y=\begin{cases} x+1 & x<-1 \\ 1 & -1\leq x<0 \\ x & x\geq 0. \end{cases}$$

都是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 的分段函数, 其图形分别如图 1-1 和图 1-2 所示.

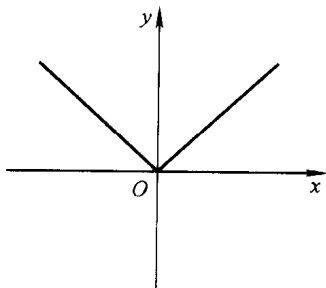


图 1-1

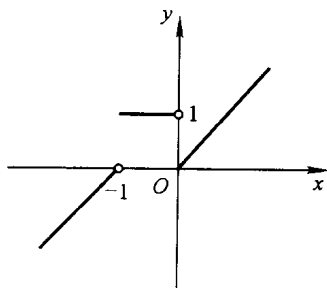


图 1-2

关于分段函数, 一定要注意以下几点:

1. 分段函数是用几个公式合起来表示一个函数, 而不是表示几个函数;
2. 由于函数式子是用几个公式分段表示的, 所以各段的定义域必须明确标出;
3. 对分段函数求函数值时, 不同点的函数值应代入相应范围的公式中去;
4. 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

例 2 用分段函数表示函数 $y=3-|x-1|$.

分析 根据绝对值的定义可知:

当 $x-1<0$ 即 $x<1$ 时, $|x-1|=-(x-1)$,

当 $x-1\geq 0$ 即 $x\geq 1$ 时, $|x-1|=x-1$,

因此有
$$y=\begin{cases} 3+(x-1) & x<1 \\ 3-(x-1) & x\geq 1 \end{cases}$$

即
$$y=\begin{cases} 2+x & x<1 \\ 4-x & x\geq 1. \end{cases}$$

例 3 设函数
$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x<0 \\ 1 & x=0 \\ x^2-1 & x>0, \end{cases}$$

求 $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(a)$.

分析 这是一个分段函数, 当 x 在不同区间时, $f(x)$ 的表达式不同, 当 x 取不同值时,

应代入不同的式子求函数值.

解 $f(-1) = -1 + 1 = 0;$

$$f(0) = 1;$$

$$f(2) = 2^2 - 1 = 3;$$

计算 $f(a)$ 时要分情况讨论:

当 $a < 0$ 时, $f(a) = a + 1;$

当 $a = 0$ 时, $f(a) = 1;$

当 $a > 0$ 时, $f(a) = a^2 - 1.$

(3) 隐函数 函数 y 与自变量 x 的对应规则是用一个方程 $F(x, y) = 0$ 表示的函数, 称为隐函数.

例如 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 就是一个隐函数. 因为在这个方程中, 函数 y 没有用仅含自变量 x 的公式 $f(x)$ 表示出来, 如若由它解出 $y = \sqrt{1 - x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$

或 $y = -\sqrt{1 - x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1).$

它就变成了显函数(称每一个显函数为一个单值支, 前一支表示上半圆, 后一支表示下半圆). 这就叫隐函数显化(即解成显函数), 要注意的是: 并非所有的隐函数都可以解成显函数, 例如方程 $x + y - e^y = 0$ 就不能解成显函数.

二、函数的简单性质

1. 函数的单调性

定义 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 如果对于 (a, b) 内的任意两点 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 或 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调增加的或单调减少的. 若恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ 或 $f(x_1) > f(x_2)$, 称为严格单调增加或严格单调减少. 如图 1-3, 图 1-4 所示.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数, 单调函数必须指出它的单调区间. 例如函数 $y = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的; 在区间 $(-\infty, 0]$ 内是单调减少的; 而在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调的(图 1-5).

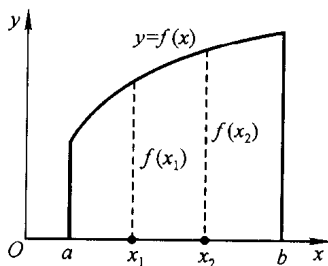


图 1-3

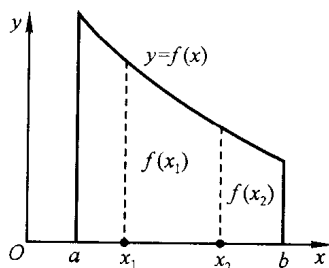


图 1-4

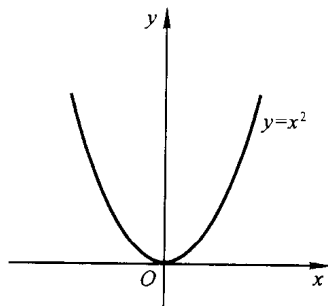


图 1-5

判定函数 $y = f(x)$ 单调性的常用方法有:

(1) 用函数单调的定义

在给定的区间内任取两点 $x_1 < x_2$, 比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小, 再确定函数是单调增加还是单调减少.

(2) 用函数的导数符号判定

如果在某区间内恒有 $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), 则 $f(x)$ 在该区间内单调增加(单调减少).
通常都用第二种方法判定函数的单调性(留待第二章介绍).

2. 函数的奇偶性

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义区间 D 关于坐标原点对称(即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$). 如果对于任意点 x , 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为 D 内的偶函数; 如果恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为 D 内的奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1-6).

奇函数的图形关于原点对称(图 1-7).

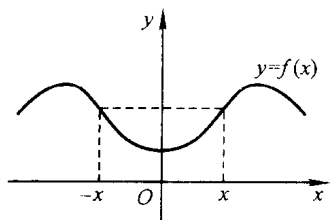


图 1-6

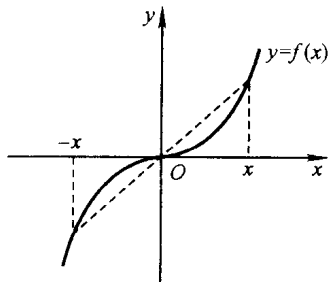


图 1-7

判定函数奇偶性的方法除了按奇偶性的定义外, 还可以利用下列性质:

两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数;

两个奇(偶)函数之积必为偶函数;

奇函数与偶函数之积必为奇函数.

注意 很多函数既不是奇函数, 也不是偶函数, 即非奇非偶函数. 如 $y = x^2 + \sin x$.

例 4 判定函数 $f(x) = x^2 \ln \frac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

分析 函数奇偶性的判定一般均用定义, 当真数为商的时候经常先用对数性质化简, 可使计算简化.

解 因为 $f(x) = x^2 [\ln(1-x) - \ln(1+x)]$,

所以 $f(-x) = (-x)^2 [\ln(1+x) - \ln(1-x)]$

$$= -x^2 [\ln(1-x) - \ln(1+x)]$$

$$= -f(x).$$

即 $f(x)$ 为奇函数.

例 5 (9702) 设 $f(x)$ 为奇函数, 且 $F(x) = f(x) \cdot \left(\frac{1}{a^x+1} - \frac{1}{2} \right)$, 其中 a 为不等于 1 的正常数, 则函数 $F(x)$ 是().

A. 偶函数

B. 奇函数

C. 非奇非偶函数

D. 奇偶性与 a 有关的函数

答 应选 A.

分析 利用 $f(x)$ 为奇函数的条件, 计算 $F(-x)$.

$$F(-x) = f(-x) \cdot \frac{2 - (a^{-x} + 1)}{2(a^{-x} + 1)}$$

$$\begin{aligned}
&= -f(x) \cdot \frac{(1-a^{-x})a^x}{2(a^x+1)} \\
&= -f(x) \cdot \frac{a^x-1}{2(a^x+1)} \\
&= f(x) \cdot \left[\frac{1}{a^x+1} - \frac{1}{2} \right] \\
&= F(x).
\end{aligned}$$

所以应选 A.

例 6 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的任意函数, 则 $F(x) = f(x) - f(-x)$ 必为().

- A. 偶函数 B. 奇函数
C. 非奇非偶函数 D. 恒等于零的函数

答 应选 B.

分析 按奇偶性的定义计算 $F(-x)$ 然后再确定选项. 因为 $F(-x) = f(-x) - f(x) = -[f(x) - f(-x)] = -F(x)$. 所以 $F(x)$ 为奇函数, 应选 B.

如果 $F(x) = f(x) + f(-x)$, 则 $F(x)$ 为偶函数, 这个结果在后面的学习中经常用到, 请读者记住.

请读者注意: 本书的所有选择题均为单项选择, 即四个备选答案中只有一个是正确的, 因此若能判定选项 A 肯定正确, 则其余的选项必错无疑, 不必一一验证. 同理, 如能排除选项 A、B、C, 则选项 D 必然正确而无需验证. 当然, 从掌握知识的角度来说, 可以一一验证, 找出正确与错误的区别, 对加深概念的理解和提高知识水平是有好处的.

3. 函数的周期性

定义 若存在常数 $T > 0$, 对于任意 x , 恒有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 为周期函数. 使得上述等式成立的最小正数 T , 称为 $f(x)$ 的最小正周期, 简称为函数 $f(x)$ 的周期.

例如 $y = \sin x$ 就是一个周期函数, 周期 $T = 2\pi$. 而 $y = \cos(x^2)$ 就不是周期函数.

需要注意的是: 证明一个函数是否是周期函数, 有时是很困难的, 而且这个问题也是很次要的, 不必花很多精力去研究它. 另外, 求一个函数的最小正周期有时是不可能的. 例如常数函数 $y = c$ (c 为常数) 就是以任意正常数为周期的周期函数, 显然很难求它的最小正周期.

4. 函数的有界性

定义 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 如果存在正数 $M > 0$, 使得对于 (a, b) 内的任意一点 x , 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是有界的. 否则, 称 $f(x)$ 在 (a, b) 内是无界的.

需要注意的是:

(1) 函数的有界性是函数本身的性质, 它与所讨论的问题的区间有关. 例如 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的, 而 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是无界的, 但在任何有限区间内它都是有界的. 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 内是无界的, 而在 $[a, +\infty)$ 内是有界的 ($a > 0$ 的常数).

(2) 函数有界切不要与函数有上界或有下界混淆. 例如 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是无界的, 但它有下界零. 而 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 内是无界的, 但它有下界 1.

判定函数有界性通常利用: 闭区间上的连续函数必定为有界函数以及利用基本初等函数

的图形等.

三、初等函数

1. 反函数

定义 设已知函数为 $y=f(x)$, 如果由此解出的 $x=\varphi(y)$ 是一个函数, 则称 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数, 记为 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上常用 x 作为自变量, 用 y 作为因变量, 因此将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 y 换为 x , 将 x 换为 y , 从而得 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$. 如图 1-8 所示.

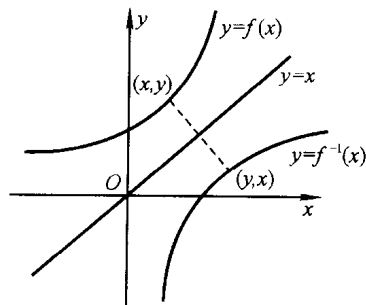


图 1-8

需要注意的是:

(1) 由函数 $y=f(x)$ (也称为直接函数) 如能解出反函数 $x=\varphi(y)$, 它们是同一个函数, 其函数图形是同一条曲线. 但是若将反函数中的 x 与 y 互换后得到 $y=\varphi(x)$, 则 $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 的函数图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

(2) 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 Z , 且能解出唯一的反函数 $y=\varphi(x)$, 则此时反函数的定义域为 Z , 值域为 D .

求反函数的一般步骤为:

1° 在 $y=f(x)$ 中将 y 作为已知量, 解出 x , 即得 $x=\varphi(y)$;

2° 在 $x=\varphi(y)$ 中, 将 x 与 y 位置互换, 则得到 $y=f(x)$ 的反函数 $y=\varphi(x)$ 或 $y=f^{-1}(x)$.

在什么条件下直接函数 $y=f(x)$ 必有反函数存在呢?

定理(反函数存在定理) 如果函数 $y=f(x)$ 在定义区间 (a, b) 内是严格单调增加(或减少)的(值域为 (c, d)), 则它必存在反函数 $y=f^{-1}(x)$ 且在区间 (c, d) 内也是严格单调增加(或减少)的(见图 1-8).

例 7 函数 $y=\frac{x-1}{x+1}$ 的反函数是().

A. $y=\frac{x-1}{x+1}$

B. $y=\frac{1-x}{1+x}$

C. $y=\frac{x+1}{x-1}$

D. $y=\frac{1+x}{1-x}$

答 应选 D.

单项选择题在选择答案时, 既要快又要准. 因此方法是至关重要的, 常用的方法是:

1. **直接法**: 从题目的已知条件出发, 经过分析推理论证或者计算得到的结果与某选项相同.

2. **筛选法**: 从题目的已知条件出发, 根据概念、定义、定理、公式及运算法则等知识的分析推理将错误的选项逐一排除, 从而得到正确的选项.

3. **赋值法**: 根据题目的已知条件, 从四个备选答案中, 用满足条件的特殊值来检验确定正确的选项.

一般情况下, 直接法常用于需要计算才能得到正确答案的选择题, 筛选法常用于涉及到基本概念、定义、公式及与运算法则有关的选择题. 如果四个备选项与数值有关或能通过数值计算判定其正确与否这样的单项选择题可以考虑用赋值法来确定正确的选项.

读者需要注意的是：这三种方法没有绝对的界限，最佳的方法是这三种方法的混合使用。

分析 解法一 直接法

因为由 $y = \frac{x-1}{x+1}$ ($x \neq -1$) 可以得到

$$(x+1)y = x-1,$$

$$xy + y = x - 1,$$

解出 $x = \frac{1+y}{1-y}$ ($y \neq 1$).

将式中 x 与 y 互换得到 $y = \frac{x-1}{x+1}$ 的反函数为

$$y = \frac{1+x}{1-x}.$$

所以应选 D.

解法二 赋值法

如果注意到函数的定义域是反函数的值域这一性质，本题亦可用赋值法。

在原来函数中，当 $x=1$ 时 $y=0$ ，则在反函数中当 $x=0$ 时应有 $y=1$ ，代入选项验证可知应排除 A 与 C。而当 $x=2$ 时 $y=\frac{1}{3}$ ，则当 $x=\frac{1}{3}$ 时应有 $y=2$ 。代入选项 B 与 D 可知应排除 B 而选 D。

例 8 求 $y = x^2$ ($-\infty < x < +\infty$) 的反函数。

分析 因为只有在单调区间内才有唯一的反函数，而 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调的，所以在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $y = x^2$ 无反函数。但在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内 $y = x^2$ 分别为单调减少与单调增加的，因此，应分别求其反函数

当 $-\infty < x < 0$ 时，由 $y = x^2$ 解出 $x = -\sqrt{y}$ ；

当 $0 < x < +\infty$ 时，由 $y = x^2$ 解出 $x = \sqrt{y}$ 。

则得反函数分别为 $y = -\sqrt{x}$ ($x < 0$) 和 $y = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$)。

例 9 (9402) 函数 $f(x) = 2^{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 等于()。

A. $\log_2(x+1)$

B. $1 + \log_2 x$

C. $\frac{1}{2} \log_2 x$

D. $2 \log_2 x$

答 应选 B.

分析 由 $y = 2^{x-1}$ 解出

$$x = \log_2(2y) = 1 + \log_2 y,$$

x 与 y 互换得 $y = 1 + \log_2 x$ 。

所以选 B.

建议读者用赋值法练习。

2. 基本初等函数(也称为简单函数)

(1) 常数 $y = c$ 。

它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$ ，图形是一条平行于 x 轴的直线。

(2) 幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为实常数)。

它的定义域随 μ 值的不同而不同，但不管 μ 的值是多少，它在 $(0, +\infty)$ 内总是有定义的。

当 $\mu > 0$ 时, 它的图形如图 1-9 所示, 都通过原点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$, 在 $(0, +\infty)$ 内严格单调增加且无界.

当 $\mu < 0$ 时, 它的图形如图 1-10 所示, 都通过点 $(1,1)$, 在 $(0, +\infty)$ 内严格单调减少且无界, 曲线以 x 轴和 y 轴为渐近线.

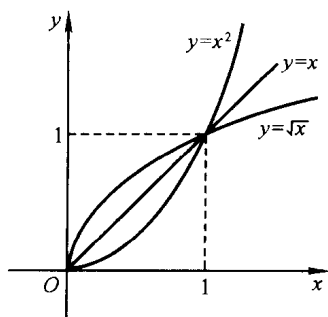


图 1-9

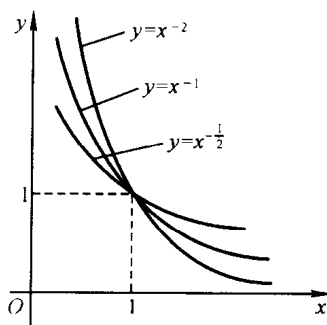


图 1-10

(3) 指数函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$).

它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 不论 x 为何值, 总有 $a^x > 0$, 且 $a^0 = 1$, 所以它的图形(如图 1-11 所示)总是在 x 轴的上方, 且通过点 $(0,1)$.

当 $a > 1$ 时, 函数 $y=a^x$ 严格单调增加且无界, 曲线以 x 轴的负半轴为渐近线;

当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $y=a^x$ 严格单调减少且无界, 曲线以 x 轴的正半轴为渐近线.

以无理数 $e=2.7182818\cdots$ 为底的指数函数 $y=e^x$ 是微积分中常用的指数函数.

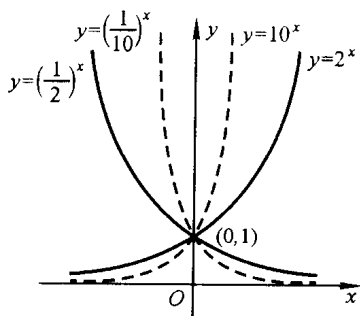


图 1-11

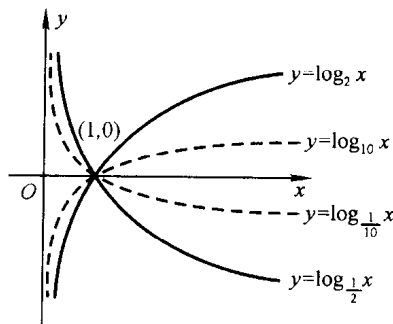


图 1-12

(4) 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$).

它的定义域为 $(0, +\infty)$, 不论 a 为何值, 对数曲线(如图 1-12 所示)都过点 $(1,0)$.

当 $a > 1$ 时, 函数 $y=\log_a x$ 严格单调增加且无界, 曲线以 y 轴的负半轴为渐近线;

当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $y=\log_a x$ 严格单调减少且无界, 曲线以 y 轴的正半轴为渐近线.

以 10 为底的对数函数叫做常用对数, 简记为 $y=\lg x$.

以无理数 e 为底的对数函数叫做自然对数, 简记为 $y=\ln x$, 它是微积分中常用的对数函数.

(5) 三角函数

三角函数有以下六个:

正弦函数 $y=\sin x$; 余弦函数 $y=\cos x$;

正切函数 $y = \tan x$; 余切函数 $y = \cot x$;

正割函数 $y = \sec x$; 余割函数 $y = \csc x$.

在微积分中, 三角函数的自变量 x 一律以“弧度”为单位. 例如 $x=1$ 就表示 1 个弧度 (1 弧度约为 $57^{\circ}17'44.8''$).

正弦函数 $y = \sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 是奇函数且是周期为 2π 的周期函数, 其图形如图 1-13 所示.

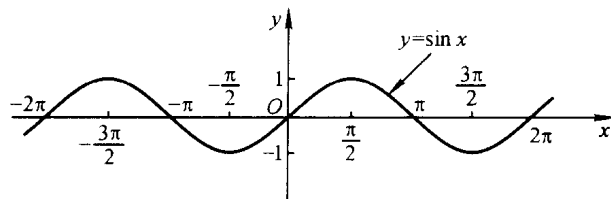


图 1-13

余弦函数 $y = \cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 是偶函数且是周期为 2π 的周期函数, 其图形如图 1-14 所示.

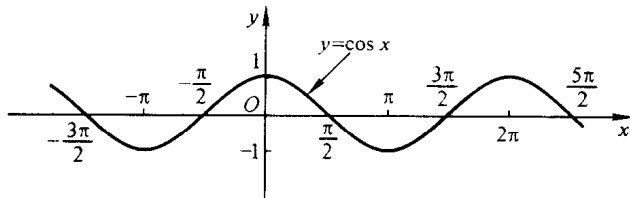


图 1-14

因为 $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$ 所以 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 都是有界函数.

正切函数 $y = \tan x$ 的定义域为 $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的一切实数, 是奇函数且是周期为 π 的周期函数, 其图形如图 1-15 所示.

余切函数 $y = \cot x$ 的定义域为 $x \neq k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的一切实数, 是奇函数且是周期为 π 的周期函数, 其图形如图 1-16 所示.

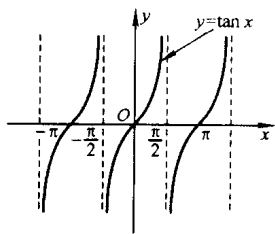


图 1-15

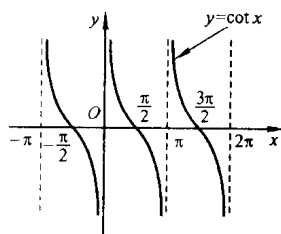


图 1-16

正割函数 $y = \sec x$ 与余割函数 $y = \csc x$ 它们分别是余弦函数与正弦函数的倒数, 即

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}; \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

它们都是以 2π 为周期的周期函数, 并且在开区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内都是无界函数.

(6) 反三角函数

常见的反三角函数有以下四个：

反正弦函数 $y = \arcsin x$ ； 反余弦函数 $y = \arccos x$ ；

反正切函数 $y = \arctan x$ ； 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 。

它们是作为相应三角函数的反函数定义出来的。由于 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 在定义域内不单调，它们的反函数不唯一，所以对于 $y = \sin x$ 只考虑 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ，对于 $y = \cos x$ ，只考虑 $x \in [0, \pi]$ ，以使它们单调，其反函数存在。此时我们称反正弦函数和反余弦函数取主值，即 $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \arccos x \leq \pi$ 。它们的图形分别为图 1-17 和图 1-18 中的实线部分。

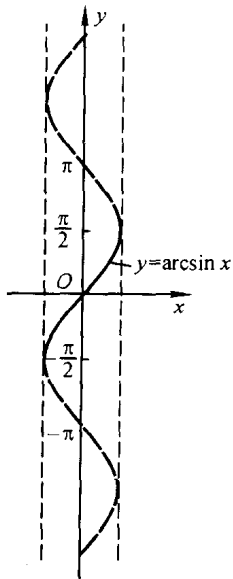


图 1-17

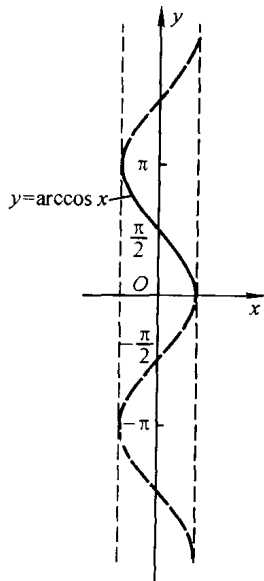


图 1-18

$y = \arcsin x$ 和 $y = \arccos x$ 的定义域都是 $[-1, 1]$ 。

同理，对于反正切函数 $y = \arctan x$ 和反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 也是分别取主值，即 $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$ 和 $0 < \operatorname{arccot} x < \pi$ 。反正切函数的图形如图 1-19 中的实线部分。

3. 复合函数

定义 设函数 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ ，当 x 在定义域内变化时，相应的 $u = \varphi(x)$ 的值也在 $y = f(u)$ 的定义域内变化。因此，当 x 确定后，根据 $u = \varphi(x)$ 就得到 u 的值，由 u 的值根据 $y = f(u)$ 又确定了 y 的一个值，这样变量 x 与 y 之间通过变量 u 而形成一个函数关系，这样的函数关系称为复合函数。记为

$$y = f[\varphi(x)]$$

其中 x 称为自变量， u 为中间变量， y 为因变量（即函数）。

必须注意：不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的。例如

$$y = \arcsin u \quad \text{与} \quad u = x^2 + 2$$

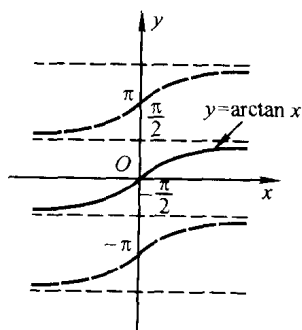


图 1-19

就不能复合成一个复合函数. 这是因为在 $(-\infty, +\infty)$ 内的任何 x 值所对应的 $u = x^2 + 2 \geq 2$, 都不能使 $y = \arcsin u$ 有意义.

另外, 复合函数不仅可以有一个中间变量, 还可以有更多的中间变量, 如 u, v, w, t 等等. 即可以通过多次复合得到一个函数.

对于复合函数, 我们必须会正确分析它是怎样由基本初等函数复合而成的, 这在微积分的学习中是非常重要的! 请读者引起足够的重视.

例 10 试分析下列函数是由哪几个基本初等函数(也称为简单函数)复合而成的?

(1) $y = \sin 2x$; (2) $y = e^{x^2}$;

(3) $y = \sqrt{\ln \tan \sqrt{x}}$; (4) $y = \ln^2 \arccos x^3$.

分析 分析一个复合函数的复合过程应由最外层向里层进行. 必须注意: 每一步的中间变量都必须是基本初等函数或是线性函数.

解 (1) 设 $y = \sin u$, (基本初等函数)

$$u = 2x. \text{ (线性函数)}$$

(2) 设 $y = e^u$, $u = x^2$. (均为基本初等函数)

(3) 设 $y = \sqrt{u}$,

$$u = \ln v,$$

$$v = \tan t,$$

$$t = \sqrt{x}. \text{ (均为基本初等函数)}$$

由于有三个中间变量 u, v, t , 所以经过三次复合过程得到复合函数 y .

(4) 设 $y = u^2$,

$$u = \ln v,$$

$$v = \arccos t,$$

$$t = x^3. \text{ (均为基本初等函数)}$$

由于有三个中间变量 u, v, t , 所以经过三次复合过程得到复合函数 y .

4. 初等函数

定义 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合而成并能用一个解析式表示的函数, 称为初等函数.

例如 $y = \sin(x^2 - x)$;

$$y = \ln^3 \arctan \sqrt{x};$$

$$y = 2^{\cos \frac{1}{x}} + \frac{x}{1+x^2} - 3.$$

它们都是初等函数.

四、函数定义域的求法

函数的定义域是指使函数表达式有意义的自变量的取值范围. 对于用解析式表示的简单函数所要求的定义域主要是:

1. 分式中的分母不能为零;
2. 负数不能开偶次方;
3. 对数中的真数必须大于零;