

● 高等学校教学用书 ●

结构矩阵分析与 程序设计

温瑞镒 主编

GAODENG
XUEXIAO
JIAOXUE
YONGSHU

311.41
2

冶金工业出版社

995336

高等学校教学用书

结构矩阵分析与程序设计

西安建筑科技大学 温瑞鉴 主编

冶金工业出版社

1998

定

则

不

雪仅

反复

一

也是

素到

，但

再挂

即挂

块中

小

定

把

258

内 容 提 要

本书结合平面刚架结构的矩阵分析,较详细地介绍了程序设计的基本方法和技巧。全书共分七章:结构矩阵分析概述,单元分析,整体分析,矩阵位移法的全过程,矩阵位移法的几个问题,结构分析程序设计,平面刚架程序。书后还附有交叉梁系、空间桁架、空间刚架结构矩阵分析及源程序和微机常用操作及 MUSE 全屏幕编辑等五个附录。

本书的特点是:各部分例题类型齐全,讲解详细、习题较多并附有答案,适于自学。除基本内容外还编入了用“*”号注明的选学内容。

本书可作为土建类专业本科生的教材,也可供有关专业研究生、教师和工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

结构矩阵分析与程序设计/温瑞鉴主编,一北京:冶金
工业出版社,1998.8
高等学校教学用书
ISBN 7-5024-2192-0

I. 结… II. 温… III. 矩阵法分析-程序设计-高等学校
-教材 IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 06527 号

出版人 卿启云 (北京沙滩嵩祝院北巷 39 号, 邮编 100009)

冶金印刷厂印刷; 冶金工业出版社发行; 各地新华书店经销

1998 年 8 月第 1 版, 1998 年 8 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16; 16.25 印张; 387 千字; 254 页; 1—3300 册

20.80 元

(本社图书如有印装质量问题, 本社发行部负责退换)

前 言

随着计算机在结构分析中的广泛应用和普及,结构矩阵分析方法成为近些年来结构力学的重要发展之一。本书是根据国家教委工科结构力学课程教学指导小组制定的高等工业学校结构力学课程教学基本要求中结构矩阵分析的基本内容和要求,以及有关提高内容,并结合多年教学实践而编写的。

书中注意使结构矩阵分析的原理与电算的实践相结合。全书结合结构力学中的计算问题,从确定算法到上机实践,详细介绍了平面杆系结构计算程序设计的全过程。为加强计算机的应用,按直接刚度法的先处理法,用“FORTRAN”语言编写了平面杆系静力计算程序,并在微机上调试通过。该程序除满足教学要求外还可应用于实际结构工程的计算。本书可作为高等工科院校工业与民用建筑专业及其相近的土建类专业本科生的计算结构力学教材,也可作有关专业的研究生、教师及工程技术人员学习结构分析程序设计的参考书。

本书的编写分工是:温瑞鉴编写第4、5、6、7章,以及附录I、II、III、IV、V。赵桂平编写第1、2、3章。温瑞鉴担任主编,并负责全书的统稿工作。

本书先后承王荫长教授、刘铮教授对全部书稿进行了审阅,提出了许多宝贵意见。在此一并表示感谢。

限于编者水平,书中难免有不妥之处,敬请广大读者指正。

编 者

1996.12

24086/0604

目 录

1	结构矩阵分析概述	1
1.1	概述	1
1.2	结构离散化	2
1.3	柔度法与刚度法简介	4
	思考题	10
2	单元分析	11
2.1	单元刚度矩阵	11
2.2	单元刚度矩阵的性质	15
2.3	杆件坐标与结构坐标的变换	15
	思考题	25
	习题	25
3	整体分析	27
3.1	结构刚度矩阵	27
3.2	结构的结点荷载	37
3.3	后处理法	44
	思考题	47
	习题	47
4	矩阵位移法全过程	52
4.1	结构的结点位移向量	52
4.2	单元的杆端内力	56
4.3	结构的支座反力	60
4.4	计算步骤及算例	66
	习题	91
	部分习题答案	92
5	矩阵位移法的几个问题	94
5.1	缩减未知量的方法	94
5.2	子结构的应用	100
5.3	弹性支座及斜支座的处理	106
5.4	支座位移、温度改变时的计算	110
	习题	114
	部分习题答案	116
6	结构分析程序设计	117
6.1	程序设计概述	117
6.2	程序的框图	117

6.3	变量、数组及公用区的程序设计	119
6.4	结构自由度分析程序设计	119
6.5	变换矩阵及单元刚度矩阵的程序设计	122
6.6	结构刚度矩阵一维变带宽存贮方法的程序设计	125
6.7	结构结点荷载列阵的程序设计	132
6.8	求解线性方程组的程序设计	139
6.9	求单元杆端力和支座反力的程序设计	145
6.10	程序设计小结	149
	习题	151
7	平面刚架程序	152
7.1	平面刚架程序的使用说明	152
7.2	数据文件的建立与输入	153
7.3	平面刚架源程序	154
7.4	上机算例	167
7.5	平面刚架程序应用的扩展	168
附录 I	交叉梁系结构矩阵分析和程序设计	178
附录 II	空间桁架结构矩阵分析和程序设计	201
附录 III	空间刚架结构矩阵分析和程序设计	221
附录 IV	微机常用操作	250
附录 V	MUSE 全屏幕编辑	252

1 结构矩阵分析概述

1.1 概述

结构力学中所介绍的力法、位移法等都是传统的解算超静定结构的方法，它们是建立在手算基础上的，对于初学结构力学的人来说，这些都是完全必要的。

应用传统的力法、位移法分析结构，当结构比较复杂时，方程组的未知量数目也随之增多，手算求解就变得十分困难，有时甚至无法精确求解。因此，以电算为基础的结构矩阵分析方法在我国于 60 年代起得到迅速发展。

在结构矩阵分析方法中，引进了线性代数中的矩阵理论，故有结构矩阵分析之称。运用矩阵进行运算，不仅能使得公式非常紧凑，而且由于这种由矩阵表达的计算公式，便于编制计算机的程序，因而最适宜用计算机进行自动化数学计算。

杆件结构的矩阵分析又称为一维有限单元法。它的基本思想是首先把结构离散成有限个单元，对各个单元进行力学特性分析，然后再考虑变形协调条件和静力平衡条件，把这些离散单元组合成原来的结构。这样就把复杂结构的计算问题转化成了简单的单元分析和组合问题，整个过程一律采用矩阵方法，由计算机自动完成，从而大大提高了计算的速度和精度。

采用结构矩阵分析方法，在理论上并没有什么变化，仍然采用传统结构力学中所采用的基本假设和基本理论：小变形假设，线性假设，叠加原理，平衡原理，变形协调原理以及虚功原理等。

与结构力学的力法和位移法这两种最基本的方法相对应，结构的矩阵分析方法也可以分为矩阵力法和矩阵位移法两大基本类型。在线弹性体系中分别称为柔度法和刚度法。

当用力法分析超静定结构时，对于同一个结构可以采用不同形式的基本结构，这样就使分析过程与基本结构的选定联系在一起。而用位移法分析时，对应一定的结构，基本结构的形式是一定的。另外，力法不能运用于求解静定结构，而位移法对超静定结构和静定结构是同样适用的，求解过程也是完全一致的。由此可见，位移法的分析过程比力法更容易规格化，也就更适宜于用计算机来实现其分析过程。因此，矩阵位移法成为计算结构力学中一种最为重要的分析方法，这一方法无论在杆件体系还是连续体结构的分析中都获得最为广泛的应用。本章着重介绍矩阵位移法的基本原理和分析过程，而将矩阵力法的有关基本概念作简要的介绍。

矩阵位移法与位移法在本质上并无区别，只是在表达形式上有所不同。在杆系结构中，将结构看成为由有限个离散的杆件单元通过有限个结点，按实际情况相联结而成的整体。各离散单元的转角位移方程用矩阵形式来表示，利用结构的变形连续条件和平衡条件将各单元组合成整体，从而建立矩阵位移法的刚度方程，求解结构的结点位移和杆端内力。概括地讲，矩阵位移法的解题过程可分为把结构离散化进行单元分析和把离散的单元组合成结构的整体分析两个主要部分。

最后指出，本书所介绍的结构矩阵分析方法仅是针对杆系结构而言的，即讨论的范围

只限于一维问题。然而，它的计算原理和解题步骤与二维或三维的弹性力学问题有很多共同之处，所以学习这部分内容可为学习弹性力学有限单元法打下一定的基础。

1.2 结构离散化

1.2.1 单元划分

杆系结构是由若干根杆件组成的结构。在进行结构矩阵分析时，首先必须把结构离散成一个个独立的单元，这里的单元一般是指结构的杆件，这些杆件只在两端与其它杆件或支座相连，我们称这些连接点为结点，因此只要确定了一个结构的所有结点，则它的各个单元也就被确定了。把一个完整的结构看成由有限个单元组成的体系，这就是结构的离散化。

对结构进行离散化的具体作法是，按照顺序，对结构进行单元编码和结点编码，通常单元编码用 (1)、(2)、 $\dots$ (m) 等表示，结点编码用 1、2、 $\dots$ n 等表示。

在本书中，我们只限于讨论等截面直杆单元，划分单元的结点应该是结构杆件的转折点、汇交点、支承点和截面突变点等，如图 1-1 (a)、(b)、(c) 所示。

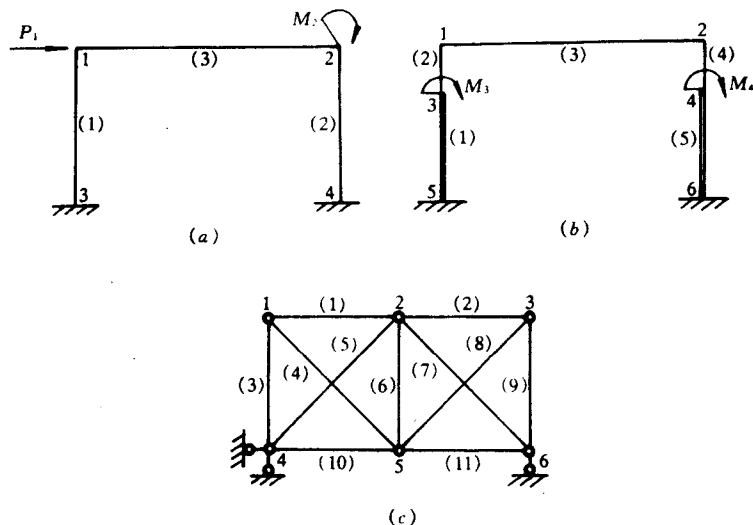


图 1-1

如果杆件截面是连续变化的，可以将杆件分成若干段，以每段中点的截面作为该段的截面，计算时仍按等截面单元进行。对于等截面的曲杆，可以将它化为分段折线来处理，每一直线段取作一个单元，显然，对这样的结构，单元划分得越多，其计算结果越接近于真实情况。

1.2.2 结点未知量

由于结构离散化后，各个单元仅在结点处连接，因此只有结点位移或结点力可以作为基本未知量。本书主要介绍矩阵位移法，故以结点位移作为基本未知量。

为了表示结点位移的方向，先为结构设定一个直角坐标系 OXY (图 1-2)，坐标系的正方向如图，遵守右手法则，这个坐标系称为结构的总体坐标系，以下简称结构坐标系。

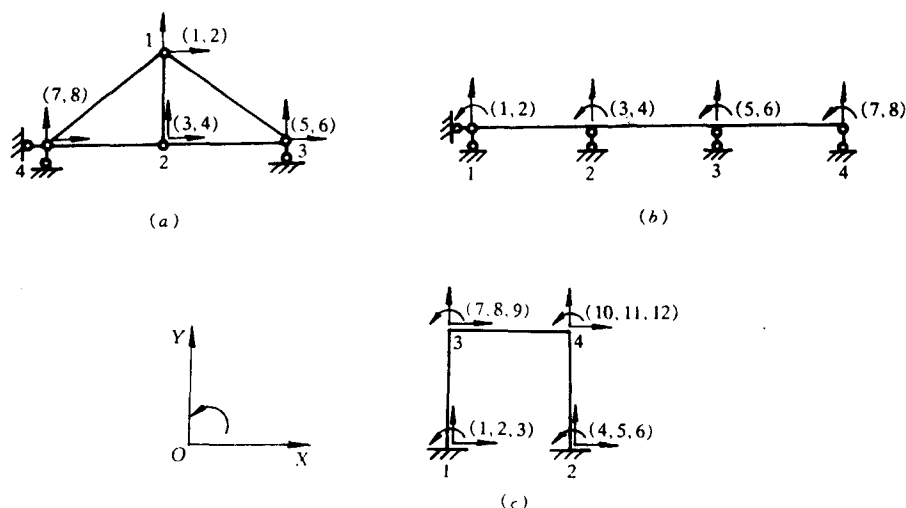


图 1-2

一般说来, 结点位移未知量的排列顺序依结点号顺序按照坐标轴 X 、 Y 及转角的方向, 先排线位移, 后排转角位移, 用 $(1, 2, 3), \dots, (m, n, \varphi)$ 等表示, 线位移与 X 、 Y 的正方向一致为正, 反之为负, 转角位移逆时针方向为正, 反之为负。下面介绍常见结构在一般情况下如何进行结点位移未知量编码。

对于图 1-2 (a) 所示的平面桁架, 在外力作用下, 桁架各单元承受轴向拉力或压力, 因此, 在不考虑支座约束情况下, 每个结点可能发生沿两个坐标轴方向的线位移, 即每个结点具有两个独立的自由度, 沿 X 、 Y 方向的线位移。

对于图 1-2 (b) 所示的连续梁, 通常不考虑轴向变形, 由于结点可以在支座处, 或变截面处, 所以在不考虑支座约束情况下, 每个结点具有沿 Y 方向的线位移和转角位移。

对于图 1-2 (c) 所示的平面刚架, 由于各个单元在结点处刚性连接, 所以在不考虑支座约束情况下, 每个结点具有三个独立的自由度, 即沿 X 、 Y 方向的线位移和结点的角位移 (转角), 这样的分析考虑了刚架杆件的轴向变形。

在矩阵位移法中, 可以先不考虑结构支座的约束情况, 将结构的所有结点自由度看作基本未知量。因此, 如果一个平面桁架共有 n 个结点, 则该桁架未知量的总数为 $2n$ 个; 如果一个平面刚架共有 n 个结点, 则该刚架未知量的总数为 $3n$ 个。图 1-2 即是如此。

另外, 也可以考虑支座结点的约束情况而进行结点位移未知量编码, 这时, 由于支座结点的位移是已知的, 在进行结点位移未知量编码时, 不作为未知量对待, 实质上就是在进行未知量编码时即对结构进行支座约束处理。有关支座约束处理的概念将在第 3.1.1 节中详细讨论。

1.2.3 单元杆端位移、杆端力

对于所讨论的杆系结构而言, 它的每个单元均是一根等截面直杆, 在单元两端的内力称为杆端力。只要求出这些杆端力, 则单元其它截面上的内力即可根据平衡条件利用这些杆端力求得。下面介绍单元杆端力的正负方向及其在矩阵公式中的表示方法。

图 1-3 (a) 所示为一典型单元, 它的始端和终端分别用 i 和 j 表示, 单元号用 (e) 表

示,为了分析方便起见,对单元(e)建立直角坐标系 $o \bar{x}y$, 并规定 $\bar{x}$ 轴与单元的杆轴线重合, 由 i 到 j 的方向为正, $\bar{y}$ 轴通过 i 点并规定由 $\bar{x}$ 轴逆时针转 90° 为正。这个坐标系称为杆件坐标系或单元坐标系或局部坐标系, 字母 $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$ 上的一横作为杆件坐标系的标志, 以示和结构坐标系的区别。

平面杆系结构在荷载等作用下, 一般情况, 一根杆件 i 、 j 两端共有六个杆端力, 如图 1-3 (b) 所示, 它们分别是 i 端和 j 端的轴力 $\bar{N}_i$ 、 $\bar{N}_j$, 剪力 $\bar{Q}_i$ 、 $\bar{Q}_j$ 和弯矩 $\bar{M}_i$ 、 $\bar{M}_j$ 。这些杆端力的正方向均规定与杆件坐标轴的正方向一致为正, 其中弯矩的正方向规定为逆时针方向。图 1-3 (b) 中单元 (e) 的杆端力方向均为正向。

若令 $\{\bar{F}\}^{(e)}$ 表示单元 ij 两端的六个杆端力, 则有

$$\{\bar{F}\}^{(e)} = [\bar{N}_i, \bar{Q}_i, \bar{M}_i, \bar{N}_j, \bar{Q}_j, \bar{M}_j]^T \quad (1-1)$$

式 (1-1) 称为单元 (e) 在杆件坐标系中的杆端力向量。

结构在外因作用下, 各单元将发生弯曲和轴向变形, 而单元的两端也将随之产生移动和转动, 这种单元端点的位移通常称为杆端位移。图 1-3 (c) 示一典型单元 (e) 的变形情况, 它由原来的位置 ij 变到 $i'j'$, 在端点处与杆端力 $\bar{N}_i$ 、 $\bar{Q}_i$ 、 $\dots$ 、 $\bar{M}_j$ 相对应也有六个杆端位移, 即 i 端和 j 端的轴向位移 $\bar{u}_i$ 、 $\bar{u}_j$, 横向位移 $\bar{v}_i$ 、 $\bar{v}_j$ 和杆端转角 $\bar{\varphi}_i$ 、 $\bar{\varphi}_j$ 。它们的正方向规定与杆端力的正方向一致。

设以 $\{\bar{\delta}\}^{(e)}$ 表示单元 ij 两端的六个杆端位移, 则有

$$\{\bar{\delta}\}^{(e)} = [\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{\varphi}_i, \bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{\varphi}_j]^T \quad (1-2)$$

式 (1-2) 称为单元 (e) 在杆件坐标系中的杆端位移向量。这里杆端位移向量和杆端力向量中各元素的排列次序是一一对应的, 不能任意排列。

在矩阵位移法中, 为了编制计算程序的方便, 一般将平面杆件单元中的杆端力 (或杆端位移) 依次编码为 1~6, 如图 1-4 所示。记作

$$\{\bar{F}\}^{(e)} = [\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4, \bar{F}_5, \bar{F}_6]^T$$

$$\{\bar{\delta}\}^{(e)} = [\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3, \bar{\delta}_4, \bar{\delta}_5, \bar{\delta}_6]^T$$

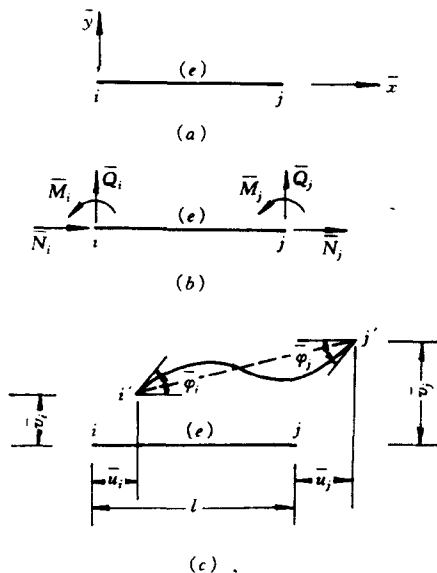


图 1-3

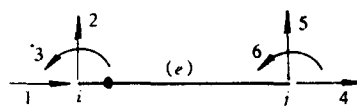


图 1-4

1.3 柔度法与刚度法简介

1.3.1 柔度法概念

柔度法即矩阵力法, 其计算原理与传统的力法相同。首先将超静定结构的多余约束去掉, 用相应的多余力来代替, 将多余力作为基本未知量, 将去掉多余约束的静定结构作为基本结构。其次, 将基本结构离散化, 分成若干单元, 分析各单元的杆端力与杆端位移之

间的关系。再根据变形协调条件，将离散单元在结点上进行组合，建立柔度法方程。最后解方程，求出多余未知力。有了多余未知力后，就可按静定结构计算其余内力、反力及位移。

下面以图 1-5 (a) 所示两跨连续梁为例，介绍柔度法的基本思路和解题过程。

两跨连续梁的荷载情况如图所示，各跨梁的 EI 为常数。用柔度法求解此连续梁的内力过程如下：

(1) 选择基本结构和多余未知力，如图 1-5 (b) 所示，该连续梁可划分为图示两个单元。

(2) 单元分析。假设只考虑弯曲变形，在单位力作用下各单元变形及杆端位移如图 1-5 (c)、1-5 (d) 所示。

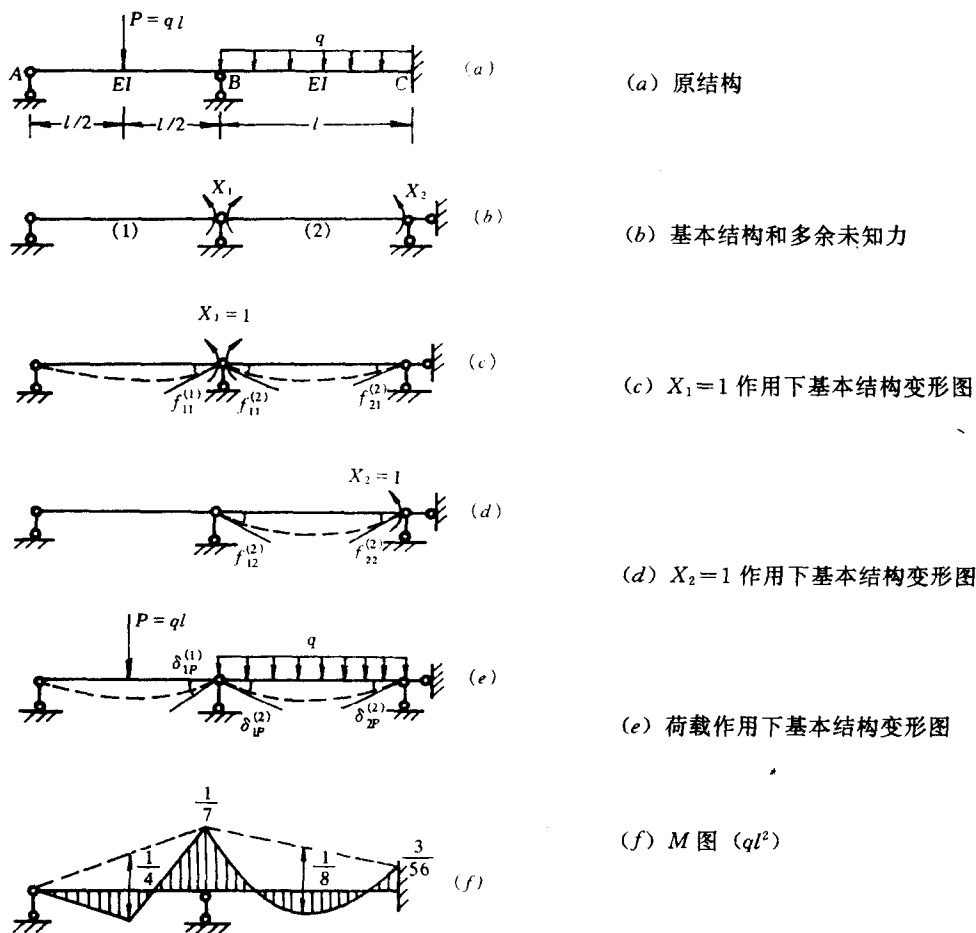


图 1-5

$X_1=1$ 作用时

单元 (1) $f_{11}^{(1)} = \frac{l}{3EI}$

单元 (2) $f_{11}^{(2)} = \frac{l}{3EI}$ $f_{21}^{(2)} = \frac{l}{6EI}$

$X_2=1$ 作用时

单元 (1) 不变形。

$$\text{单元 (2)} \quad f_{12}^{(2)} = \frac{l}{6EI} \quad f_{22}^{(2)} = \frac{l}{3EI}$$

在荷载作用下各单元变形及杆端位移如图 1-5 (e) 所示。

$$\text{单元 (1)} \quad \delta_{1P}^{(1)} = \frac{Pl^2}{16EI}$$

$$\text{单元 (2)} \quad \delta_{1P}^{(2)} = \frac{ql^3}{24EI} \quad \delta_{2P}^{(2)} = \frac{ql^3}{24EI}$$

以上各单元在单位多余力作用下和荷载作用下杆端位移的方向，均以和多余力的正方向一致为正，反之为负。其右上角括号内的数字代表单元的序号。

(3) 整体分析，根据多余力方向上的位移条件建立柔度法方程。基本结构在多余力 X_1 、 X_2 和荷载共同作用下，沿 X_1 和 X_2 方向的位移应和原结构的实际位移 Δ_1 、 Δ_2 相等。

由叠加原理，有

$$\left. \begin{aligned} (f_{11}^{(1)} + f_{11}^{(2)})X_1 + f_{12}^{(2)}X_2 + (\delta_{1P}^{(1)} + \delta_{1P}^{(2)}) &= \Delta_1 \\ f_{21}^{(2)}X_1 + f_{22}^{(2)}X_2 + \delta_{2P}^{(2)} &= \Delta_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

式 (1-3) 可统一写成

$$\left. \begin{aligned} f_{11}X_1 + f_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= \Delta_1 \\ f_{21}X_1 + f_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= \Delta_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

式 (1-4) 用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} \quad (1-5)$$

式中 f_{11} 、 f_{12} 、 f_{21} 、 f_{22} 是连续梁的柔度系数。 f_{ij} 表示基本结构上沿多余力 X_i 方向上由 $X_j=1$ 单独作用时所产生的位移。 Δ_{iP} 表示基本结构上沿多余力 X_i 方向上由荷载作用所产生的位移。

式 (1-5) 可简写为

$$[f]\{X\} + \{\Delta_P\} = \{\Delta\} \quad (1-6)$$

式 (1-6) 就是柔度法方程。其中 $[f]$ 称为柔度矩阵， $\{X\}$ 为多余未知力列阵， $\{\Delta_P\}$ 为基本结构上沿多余力方向由荷载产生的位移列阵， $\{\Delta\}$ 为原结构在多余力方向上的位移列阵。

(4) 解方程，求出多余力。由图 1-5 (a) 知

$$\{\Delta\} = \{0\}$$

代入式 (1-6)，得

$$[f]\{X\} + \{\Delta_P\} = \{0\} \quad (1-7)$$

将各系数代入式 (1-7) 的 $[f]$ 、 $\{\Delta_P\}$ 矩阵中，解得

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = ql^2 \begin{Bmatrix} -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{56} \end{Bmatrix}$$

(5) 求各单元杆端力 (弯矩)。已知多余未知力后，可由下式求出各单元的杆端力

$$\{F\}^{(e)} = \{F_P\}^{(e)} + [F_f]^{(e)}\{X\}^{(e)}$$

式中 $\{F\}^{(e)}$ ——实际结构由荷载引起的 (e) 单元杆端力矩阵;

$\{F_P\}^{(e)}$ ——基本结构由荷载引起的 (e) 单元杆端力矩阵;

$\{F_f\}^{(e)}$ ——基本结构由各单位多余力单独作用引起的 (e) 单元杆端力矩阵;

$\{X\}^{(e)}$ —— (e) 单元的杆端对应的多余力列阵。

$$\begin{aligned}\{F\}^{(1)} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{ql^2}{7} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{ql^2}{7} \end{Bmatrix} \\ \{F\}^{(2)} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{ql^2}{7} \\ -\frac{3ql^2}{56} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{ql^2}{7} \\ -\frac{3ql^2}{56} \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

根据求出的杆端力 (弯矩), 绘出连续梁的弯矩图如图 1-5 (f) 所示。

从以上例子可以看出, 柔度法的关键是研究如何形成基本结构的柔度矩阵 $[f]$ 和基本结构上由荷载作用产生的结点位移列阵 $\{\Delta_P\}$ 。在本例中, 基本结构为简支梁, 我们直接用各单元的杆端位移写出了基本结构上的 $[f]$ 和 $\{\Delta_P\}$ 。但一般结构的 $[f]$ 和 $\{\Delta_P\}$ 应根据结构的具体条件而定, 由于 $[f]$ 和 $\{\Delta_P\}$ 与基本结构密切相关, 而基本结构形式又不是惟一的, 没有统一规律, 所以难以编制计算各类结构的通用程序, 只可编制某些结构的专用程序。

1.3.2 刚度法概念

刚度法即矩阵位移法, 其计算原理与传统的位移法相同。首先要确定结构的未知结点位移, 以未知结点位移为基本未知量, 以两端固定的单跨超静定梁的组合作为基本结构。其次将基本结构离散化, 分成若干单元, 分析各单元杆端位移与杆端力之间的关系。再根据静力平衡条件和变形协调条件, 将离散单元在结点处进行组合, 建立刚度法方程。最后解方程, 求出未知结点位移。有了未知结点位移后, 就可根据杆端位移与杆端力的关系, 求出各单元的杆端力等等。

下面以图 1-6 (a) 所示两跨连续梁为例, 介绍刚度法的基本思路和解题过程。

(1) 划分单元, 确定未知结点位移。取两跨梁各为一个单元, 如图 1-6 (b) 所示, 该梁只考虑弯曲变形时, 有两个未知结点转角位移 Δ_1 和 Δ_2 。

(2) 单元分析。在各未知结点位移为单位位移时, 各单元的杆端力如图 1-6 (c) (d) 所示。

$\Delta_1=1$ 单独作用时

$$\text{单元 (1)} \quad k_{11}^{(1)} = \frac{4EI}{l}, \quad k_{21}^{(1)} = \frac{2EI}{l}$$

单元 (2) 不受力。

$\Delta_2=1$ 单独作用时

$$\text{单元 (1)} \quad k_{12}^{(1)} = \frac{2EI}{l}, \quad k_{22}^{(1)} = \frac{4EI}{l}$$

$$\text{单元 (2)} \quad k_{22}^{(2)} = \frac{4EI}{l}, \quad k_{32}^{(2)} = \frac{2EI}{l}$$

在荷载作用下各单元的固端力如图 1-6 (e) 所示。

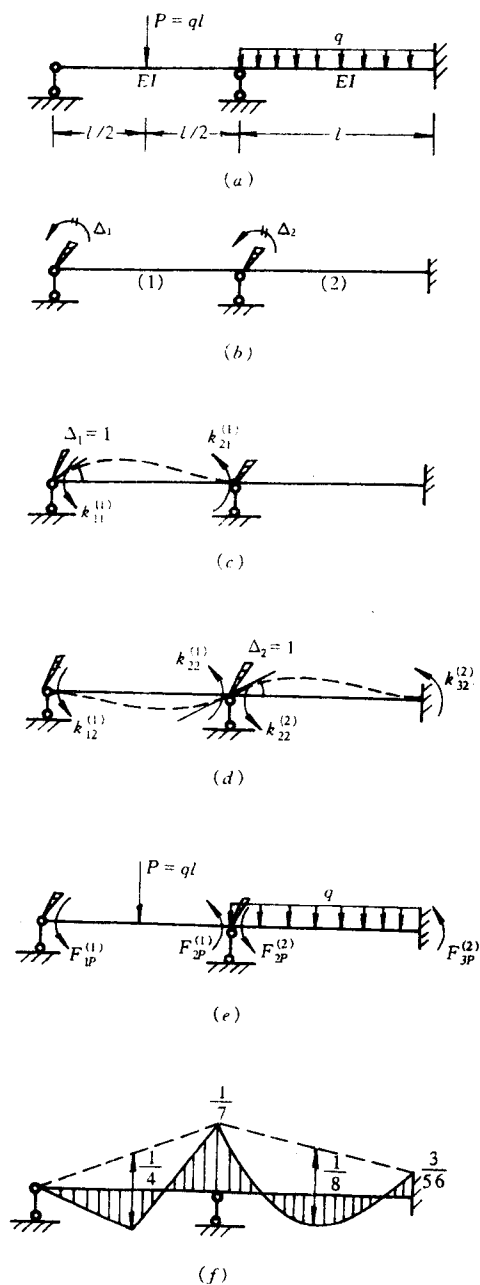


图 1-6

单元 (1) $F_{1P}^{(1)} = \frac{Pl}{8}, F_{2P}^{(1)} = -\frac{Pl}{8}$

单元 (2) $F_{2P}^{(2)} = \frac{ql^2}{12}, F_{3P}^{(2)} = -\frac{ql^2}{12}$

以上各单元在单位结点位移作用下和荷载作用下杆端力的方向，均以未知结点位移的正方向为正，反之为负。

(3) 整体分析, 根据未知结点位移方向上的结点力平衡条件建立刚度法方程。

由叠加原理, 有

$$\left. \begin{aligned} k_{11}^{(1)}\Delta_1 + k_{12}^{(1)}\Delta_2 + F_{1P}^{(1)} &= P_{1D} \\ k_{21}^{(1)}\Delta_1 + (k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)})\Delta_2 + (F_{2P}^{(1)} + F_{2P}^{(2)}) &= P_{2D} \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

式 (1-8) 可统一写成

$$\left. \begin{aligned} K_{11}\Delta_1 + K_{12}\Delta_2 &= P_{1D} + P_{1E} \\ K_{21}\Delta_1 + K_{22}\Delta_2 &= P_{2D} + P_{2E} \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

式中 K_{11} 、 K_{12} 、 K_{21} 、 K_{22} 是连续梁的刚度系数。 K_{ij} 表示基本结构上由 $\bar{\Delta}_j=1$ 单独作用时, 在 Δ_i 方向上所产生的结点力。 P_{1D} 、 P_{2D} 表示直接作用在结点 1 和结点 2 上的结点荷载, 在图 1-6 (a) 中 $P_{1D}=P_{2D}=0$ 。 P_{1E} 、 P_{2E} 是由各单元上作用的节间荷载产生的沿 Δ_1 、 Δ_2 方向上的结点力, 称为等效结点荷载。由式 (1-8) 和 (1-9) 知等效结点荷载为

$$P_{1E} = -F_{1P}^{(1)} = -\frac{ql^2}{8}, P_{2E} = -(F_{2P}^{(1)} + F_{2P}^{(2)}) = \frac{ql^2}{24}$$

令

$$P_1 = P_{1D} + P_{1E}$$

$$P_2 = P_{2D} + P_{2E}$$

则式 (1-9) 可用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (1-10)$$

式 (1-10) 可简写为

$$[K]\{\Delta\} = \{P\} \quad (1-11)$$

式 (1-11) 就是刚度法方程。其中 $[K]$ 称为结构刚度矩阵, $\{\Delta\}$ 为结构结点位移列阵, $\{P\}$ 为结构结点荷载列阵。

(4) 解方程, 求出未知结点位移。将各系数及结点荷载代入式 (1-11) 的 $[K]$ 、 $\{P\}$ 矩阵中, 解得

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \frac{ql^3}{EI} \begin{Bmatrix} -\frac{13}{336} \\ \frac{5}{336} \end{Bmatrix}$$

(5) 求各单元杆端力。未知结点位移求出后, 可按式求出各单元的杆端力

$$\{F\}^{(e)} = \{F_P\}^{(e)} + [k]^{(e)}\{\delta\}^{(e)}$$

式中 $\{F\}^{(e)}$ ——原结构在荷载作用下 (e) 单元的杆端力列阵;

$\{F_P\}^{(e)}$ ——基本结构由荷载产生的 (e) 单元的杆端力列阵;

$[k]^{(e)}$ ——基本结构 (e) 单元在单位结点位移作用下产生的杆端力矩阵;

$\{\delta\}^{(e)}$ ——(e) 单元的杆端对应的结点位移列阵。

$$\{F\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \frac{Pl}{8} \\ -\frac{Pl}{8} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{13}{336} \\ \frac{5}{336} \end{Bmatrix} \frac{ql^3}{EI} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{ql^2}{7} \end{Bmatrix}$$

$$\{F\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql^2}{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{5}{336} \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{ql^3}{EI} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{56} \end{Bmatrix} ql^2$$

根据求出的杆端力（弯矩），并按杆端弯矩以逆时针为正，判明梁端受拉边，绘出连续梁的弯矩图如图 1-6 (f) 所示。

从以上例子可以看出，用刚度法求结点位移的关键，是如何形成结构刚度矩阵 $[K]$ 和结构结点荷载列阵 $\{P\}$ 。在以上简单例子中，可直接写出 $[K]$ 和 $\{P\}$ ，但在一般情况下， $[K]$ 和 $\{P\}$ 的形成需要进行一系列的变换。

图 1-5 (a) 与图 1-6 (a) 中的连续梁的结构形式和荷载情况完全一样，用矩阵力法求得的弯矩图 1-5 (f) 与用矩阵位移法求得的弯矩图 1-6 (f)，两者完全相同。

由于矩阵位移法的规律性较强，宜于编制计算各类结构的通用程序，以下各章将具体介绍矩阵位移法的全过程。

思 考 题

- 1-1 何谓结构的离散化？在杆系结构中，单元是怎样划分的？
- 1-2 什么是单元坐标系？按右手法则如何确定单元坐标系中的杆端力和杆端位移的正方向？
- 1-3 何谓杆端位移向量和杆端力向量？向量中各元素的排列次序应注意什么？
- 1-4 在结构矩阵分析中什么叫柔度法、刚度法？

2 单元分析

单元分析的主要任务之一,是研究单元的杆端位移和杆端力之间的关系,建立单元刚度矩阵。对于杆件单元来说,单元刚度矩阵的推导可以通过两种途径得到。一种途径是采用静力法推导,另一种途径是采用能量原理或虚功原理推导。考虑到和已学过的材料力学及位移法中转角位移方程等知识的结合更紧密,本章介绍第一种方法。

2.1 单元刚度矩阵

本节对平面结构的杆件单元进行单元分析,得出单元刚度方程和单元刚度矩阵。位移法中给出的转角位移方程实际上就是梁单元的刚度方程。梁单元是杆件单元的特例。下面推导单元刚度方程时所用的方法不是新的,但有点新的内容:杆两端在横向的线位移改用绝对位移而不用相对位移,重新规定正负号规则,杆端位移和力以与杆件坐标轴正方向一致为正,转角和弯矩以逆时针为正。讨论杆件单元的一般情况,采用矩阵表示形式。

2.1.1 一般单元

图 2-1 所示为平面结构中的一个等截面直杆单元(e)。设杆件除弯曲变形外,还有轴向变形。杆件两端各有三个位移分量,两个线位移,一个角位移(转角)。这是平面结构杆件单元的一般情况。图 2-1 中所示一般单元的杆端位移和杆端力分量方向为正方向。下面讨论这种单元杆端位移和杆端力之间的关系。

在图 2-1 所示的单元杆件坐标系中,单元(e)受外因影响由 ij 位置变化到 $i'j'$ 位置,为了更清楚地了解杆端位移和杆端力之间的关系,可分别考虑各杆端位移单独作用时,引起的杆端力。

图 2-2 示出了单元(e)的六个杆端位移单独作用时,引起的杆端力。设单元杆长为 l ,横截面面积为 A ,截面惯性矩为 I ,弹性模量为 E 。在图 2-2(a)、(b)中,由材料力学中的虎克定律,按叠加原理,有

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_i &= \frac{EA}{l}\bar{u}_i - \frac{EA}{l}\bar{u}_j \\ \bar{N}_j &= -\frac{EA}{l}\bar{u}_i + \frac{EA}{l}\bar{u}_j \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

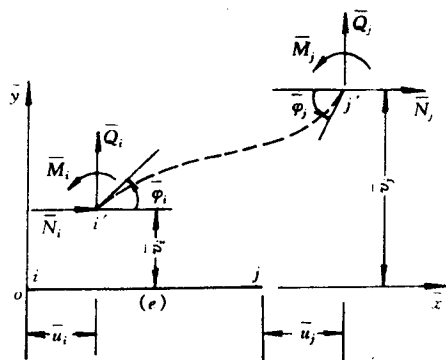


图 2-1

在图 2-2 (c)、(d)、(e)、(f) 中,由位移法中的转

角位移方程,并按照本章规定的符号和正负号,按叠加原理,有

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_i &= \frac{12EI}{l^3}\bar{v}_i + \frac{6EI}{l^2}\bar{\varphi}_i - \frac{12EI}{l^3}\bar{v}_j + \frac{6EI}{l^2}\bar{\varphi}_j \\ \bar{M}_i &= \frac{6EI}{l^2}\bar{v}_i + \frac{4EI}{l}\bar{\varphi}_i - \frac{6EI}{l^2}\bar{v}_j + \frac{2EI}{l}\bar{\varphi}_j \\ \bar{Q}_j &= -\frac{12EI}{l^3}\bar{v}_i - \frac{6EI}{l^2}\bar{\varphi}_i + \frac{12EI}{l^3}\bar{v}_j - \frac{6EI}{l^2}\bar{\varphi}_j \\ \bar{M}_j &= \frac{6EI}{l^2}\bar{v}_i + \frac{2EI}{l}\bar{\varphi}_i - \frac{6EI}{l^2}\bar{v}_j + \frac{4EI}{l}\bar{\varphi}_j \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$