● 研究生用书 ●

PRACTICAL WAVELET METHOD

华中科技大学出版社

徐长发 李国宽

实用小波方法

实用小波方法

徐长发 李国宽

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实用小波方法/徐长发 李国宽
武汉:华中科技大学出版社, 2001年7月
ISBN 7-5609-2454-9

Ⅰ. 实…
Ⅱ. ①徐… ②李…
Ⅲ. 小波分析-研究生-教材
Ⅳ. O177

实用小波方法 徐长发 李国宽

责任编辑:徐正达 封面设计:刘 卉
责任校对:戴晓莺 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

经 销:新华书店湖北发行所

录 排:华中科技大学出版社照排室
印 刷:中科院武汉分院科技印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:6.875 插页:2 字数:156 000
版次:2001年7月第1版 印次:2001年7月第1次印刷 印数:1—3 000
ISBN 7-5609-2454-9/O·229 定价:10.80元

写在"研究生用书"出版10周年

在今天，面对科技的迅速发展，知识经济已见端倪，国际竞争也日趋激烈，显然，国家之间的竞争是国家综合实力的竞争，国家综合实力的竞争关键是经济实力的竞争，而经济实力的竞争关键又在于科技（特别是高科技）的竞争，科技（特别是高科技）的竞争归根结底是人才（特别是高层次人才）的竞争，而人才（特别是高层次人才）的竞争基础又在于教育。"百年大计，教育为本；国家兴亡，人才为基。"十六个字、四句话，确是极其深刻的论断。目前，国际形势清楚表明：我们国家的强大与民族的繁荣，主要立足于自己，以"自力更生"为主；把希望寄托于他人，只是一种不切实际的幻想。这里，我们决不是要再搞"闭关锁国"，搞"自我封闭"，因为那是没有出路的；我们强调的是要"自信，自尊，自立，自强"，要以"自力更生"为主，走自己发展的道路。

显然，知识经济最关键的是人才，是高层次人才的培养，而作为高层次人才培养的研究生教育就在一个国家的方方面面的工作中，占有十分重要的战略地位。可以说，没有研究生教育，就没有威伟雄壮的科技局面，就没有国家的强大实力，就没有国家在国际上的位置，就会挨打，就会受压，就会被淘汰，还说什么知识经济与国家强大?!

"工欲善其事，必先利其器。"教学用书是教学的重要

基本工具与条件。这是所有从事教育的专家所熟知的事实。所以,正如许多专家所知,也正是原来的《"研究生用书"总序》中所指出,研究生教材建设是保证与提高研究生教学质量的重要环节,是一项具有战略性的基本建设。没有研究生的质量,就没有研究生教育的一切。

我校从1978年招收研究生以来,即着力从事于研究生教材与教学用书的建设。积十多年建设与实践的经验,我校从1989年起,正式分批出版"研究生用书"。第一任研究生院院长陈珽教授就为之写了《"研究生用书"总序》,表达了我校编写这套用书的指导思想与具体要求,"要力求'研究生用书'具备科学性、系统性、先进性"。后三任研究生院院长,也就是各任校长黄树槐教授、我本人和周济教授完全赞同这一指导思想与具体要求,从多方面对这套用书加以关心与支持。

我是十分支持出版"研究生用书"的。早在1988年我在为列入这套书中的第一本,即《机械工程测试·信息·信号分析》写"代序"时就提出:"一个研究生应该博览群书,博采百家,思路开阔,有所创见。"但这不等于他在一切方面均能如此,有所不为才能有所为。如果一个研究生的主要兴趣与工作不在"这一特定方面",他也可以选择一本有关的书作为了解与学习这方面专业知识的参考;如果一个研究生的主要兴趣在"这一特定方面",他更应选择一本有关的书作为主要学习用书,寻觅主要学习线索,并缘此展开,博览群书。这就是我赞成为研究生编写系列教学用书的原因。

目前,这套书自第一本于1990年问世以来,已经度

过了10个春秋,出版了8批共49种,初步形成规模,逐渐为更多读者所认可。在已出版的书中,有15种分获国家级、部省级图书奖,有16种一再重印,久销不衰。采用此套书的一些兄弟院校教师纷纷来信,赞誉此书为研究生培养与学科建设做出了贡献,解决了他们的"燃眉之急"。我们感谢这些赞誉与鼓励,并将这些作为对我们的鞭策与鼓励,"衷心藏之,何日忘之?!"

现在,正是江南春天,"最是一年春好处"。华工园内,红梅怒放,迎春盛开,柳枝油绿,梧叶含苞,松柏青翠,樟桂换新,如同我们的国家正在迅猛发展、欣欣向荣一样,一派盎然生机。尽管春天还有乍寒时候,我们国家在前进中还有种种困难与险阻,来自国内与来自国外的阻挠与干扰,有的还很严峻;但是,潮流是不可阻挡的,春意会越来越浓,国家发展会越来越好。我们教师所编的、所著的、所编著的这套教学用书,也会在解决前进中的种种问题中继续发展。然而,我们十分明白,这套书尽管饱含了我们教师的辛勤的长期的教学与科研工作的劳动结晶,作为教学用书百花园中的一丛鲜花正在怒放,然而总会有这种或那种的不妥、错误与不足,我衷心希望在这美好的春日,广大的专家与读者,不吝拨冗相助,对这套教学用书提出批评建议,予以指教启迪,为这丛鲜花除害灭病,抗风防寒,以进一步提高质量,提高水平,更上一层楼,我们不胜感激。我们深知,"一个篱笆三个桩",没有专家的指导与支持,没有读者的关心与帮助,也就没有这套教学用书的今天。我衷心祝愿在我们学校第三次大发展的今天,在百年之交与千年之交的时候,这套教学用书会以更

雄健的步伐，走向更美好的未来。

诗云：“嘤其鸣矣，求其友声。”这是我们的心声。

中国科学院院士
华中理工大学学术委员会主任
杨叔子
于华工园内
1999 年 5 月 15 日

前　言

小波分析是在 Fourier 分析的基础上发展起来的. 作为时-频分析方法，小波分析比 Fourier 分析有着许多本质性的进步. 小波分析提供了一种自适应的时域和频域同时局部化的分析方法，无论分析低频或高频局部信号，它都能自动调节时-频窗，以适应实际分析的需要. 小波分析在局部时-频分析中具有很强的灵活性，能聚焦到信号时段和频段的任意细节，被喻为时-频分析的显微镜. 小波分析的快速算法为分析和解决实际问题带来极大的方便. 它的这些特点使得时-频分析的方法和应用得到了辉煌的发展. 现在，小波分析方法已广泛应用于信号处理、图像处理、模式识别、语音识别、地震勘探、CT 成像、计算机视觉、航空航天技术、故障监控、通信与电子系统等众多的学科和相关技术的研究中. 由小波分析方法带来的高新技术成果迅速增加，其研究正在向纵深发展.

小波分析之所以得到如此广泛的应用，完全归功于它的数学机理的创见性和完善性. 小波分析是泛函分析、调和分析、时-频分析、数值分析、逼近论和广义函数论等众多学科知识完美结合的结晶，具有完善的理论体系. 然而，小波分析的研究背景是具体的，理论和方法是实用的，实现过程是简便的. 数学工作者有责任突破其复杂的数学障碍，显现其实用本质，让小波分析方法和 Fourier 分析方法一样，成为一种基础的、普及的、容易为广大读者所掌握和应用的数学工具.

作者试图为广大读者提供一本便于自学和实用的小波分析教科书. 为此，本书以阐述小波分析的基本原理、算法实现和基本应用为出发点，贯串着便于自学、理解的主线条，层层深入地讨论和解决问题，用通俗易懂的数学形式来描述和解释全书内容. 读者仅

具备高等数学基础知识就可顺利阅读.因此,强调可读性、强调理论和实践的统一是本书的特点.

作者研究小波分析及其应用十多年,多次讲授小波分析课程,本书在原讲义的基础上修改而成.借本书出版之际,对支持本书写作的同仁们一并表示感谢,也敬请广大读者指出本书中的不足之处.

作 者

2001年1月

目　录

第1章 Fourier 分析

众所周知，一个复杂的波形可以看做一个函数或模拟信号，也可以看做一种复杂的振动现象，它是由许多不同频率、不同振幅的谐波叠加而成的. 例如，光波为不同强度、不同波长的单色光的叠加，光波可分解为光谱. 声音也可分解为不同音调、不同音强的声谱. 天线回路中的复杂电信号可分解为不同频率、不同振幅的简谐电磁波. Fourier 分析就是对函数（模拟信号）作谐波分解、合成和分析的有力的数学工具，它在声学、光学、电学、力学等学科，特别是在数字信号处理方面，都有着非常广泛的应用.

本章介绍 Fourier 分析的基本性质、基本应用和基本注意事项，这些知识是学习以后各章节的基础知识.

1.1 函数（模拟信号）的 Fourier 级数

1. 物理背景

众所周知，以 T 为周期的任意连续函数（模拟信号）$f(t)=f(t+T)$ 可视为某种复杂的波，物理实验表明，它可由形如 $A_n\sin(nt+\theta)$ 的若干谐波叠加而成. 换句话说，周期性的模拟信号 $f(t)$ 可分解为不同频率、振幅和相位的谐波信号. 因此，完全有理由认为 $f(t)$ 有如下的表现形式：

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n\sin(nt+\theta) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} A_n\sin\theta\cos nt + A_n\cos\theta\sin nt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos nt + b_n\sin nt. \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

其中，$A_n\sin(nt+\theta)$表示 n 次谐波，其振幅是 A_n，n 表现频率，θ 表现相位.

为了确定式(1.1)中的系数，要利用公式

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\mathrm{d}x = 0,\quad m,n = 0,1,2,\cdots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x = \begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m = n,\end{cases}\quad m,n = 1,2,\cdots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x = \begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m = n,\end{cases}\quad m,n = 1,2,\cdots,$$

在式(1.1)两边同乘以 $\cos mx$ 或 $\sin mx$，并在$[-\pi,\pi]$上对 x 积分，再利用变量代换 $x=(2\pi/T)t=\Delta\omega t$，就可得到连续的周期函数 $f(t)=f(t+T)$的 Fourier 级数形式，即

$$\begin{cases}f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Delta\omega t + b_n\sin n\Delta\omega t),\\ a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos n\Delta\omega t\mathrm{d}t,\quad n = 0,1,\cdots,\\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin n\Delta\omega t\mathrm{d}t,\quad n = 1,2,\cdots,\\ \Delta\omega = 2\pi/T.\end{cases}\tag{1.2}$$

对式(1.2)作简单变形，$f(t)$的 Fourier 级数还可表现为另一形式，即

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}A_n\sin(n\Delta\omega t + \theta_n).\tag{1.3}$$

其中，$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ 和 $\theta_n=\arctan(b_n/a_n)$ 分别表现了频率为 $n\Delta\omega/(2\pi)$的谐波的振幅和相位.

式(1.2)和式(1.3)表明，周期为 T 的函数确实可以分解为若干简谐波之和，但这些谐波的频率是离散出现的，不是连续出现的，它是基频 $\Delta\omega$ 的整数倍.

2. 可用 Fourier 级数表示的函数

函数(**模拟信号**)可能有间断,这类函数可以展开为 Fourier 级数吗?

定理 1.1 设 $f(t)$是以 T 为周期的实函数,且在$[-T/2,T/2]$上连续或仅有有限个第一类间断点,允许有限个极值点而不允许无穷振荡,则在 $f(t)$的连续点处,$f(t)$由式(1.2)表示;在$f(t)$的间断点处,$f(t)=[f(t-0)+f(t+0)]/2$,即取左、右端值的中间值.

若仅在$[-T/2,T/2]$上有一段信号 $f(t)$,可从两个方面理解它的 Fourier 级数.一方面是关于 $f(t)$表现为级数的,可理解 $f(t)$作周期延拓成周期为 T 的函数,利用定理 1.1,$f(t)$可表示为 Fourier 级数;另一方面是关于 Fourier 级数表现实际信号 $f(t)$的,虽然级数在 $\mathbf{R}$ 上都有表现,但在$[-T/2,T/2]$区段上才是表现真实信号的.另外,虽然在间断点处出现中间值,实际信号并无此表现,但是这不会影响对原信号的讨论.

对一段信号 $f(t)$,$t\in[0,T/2]$延拓成周期为 T 的函数,可作奇延拓,也可作偶延拓.若作奇延拓,则 $f(t)$是周期为 T 的函数,在$[-T/2,T/2]$上是奇函数,它的 Fourier 级数中仅含 $\sin n\Delta\omega t$ 项.若作偶延拓,$f(t)$在$[-T/2,T/2]$上是偶函数,它的 Fourier 级数中仅含 $\cos n\Delta\omega t$ 项.

3. Fourier 级数的复指数形式

利用复变函数的基本知识,把

$$\cos n\Delta\omega t=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Delta\omega t}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Delta\omega t}),$$

$$\sin n\Delta\omega t=\frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Delta\omega t}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Delta\omega t})$$

代入式(1.2),就有

$$\begin{cases} f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Delta\omega t}, \\ c_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Delta\omega t}\mathrm{d}t, \end{cases}\quad n\in\mathbf{Z}. \tag{1.4}$$

称式(1.2)和式(1.3)为 Fourier 级数的**三角形式**,称式(1.4)为其**复指数形式**.这两种形式之间的联系可由下面的关系式体现:

$$\begin{cases} c_0 = A_0, \\ |c_n| = |c_{-n}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = A_n/2, \quad n = 1,2,\cdots, \\ \arg c_n = -\arg c_{-n} = \theta_n. \end{cases}$$

因此,c_n 作为一个复数,其模与幅角正好反映了函数(模拟信号)$f(t)$中频率为 $n\Delta\omega$ 的谐波的振幅与相位.同样称 c_n 为周期函数 $f(t)$的**离散频谱**,$|c_n|$为**离散振幅谱**,$\arg c_n$ 为**离散相位谱**.Fourier 级数这两种表示形式的不同之处在于:其三角形式中仅用正频率的谐波表现周期函数 $f(t)$;而复指数形式中用正频率和负频率的谐波一起来表现 $f(t)$.

1.2 函数(模拟信号)的 Fourier 变换

前面讨论了周期函数可用离散频率为 $n\Delta\omega$ 的谐波来表现.一个非周期函数 $f(t)$能否用谐波来表现呢?

1. Fourier 积分公式

将非周期函数 $f(t)$看做周期函数 $f_T(t)$当周期 $T\to+\infty$时转化的结果.于是,利用式(1.4),有

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{T\to+\infty} f_T(t) \\ &= \lim_{T\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Delta\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Delta\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\left(\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Delta\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Delta\omega t}\right]\Delta\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega. \end{aligned} \tag{1.5}$$

在以上推导中用到了式(1.2)中的关系 $\Delta\omega=2\pi/T$,还用到了关于和式极限的积分定义.上述推导是有条件的,它允许非周期函数含有有限个间断点,间断点两侧的函数值是有界的,或即 $f(t)$是有

界变差的，对$\forall\ t\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(t\pm 0)<+\infty.$$

上述推导还要求非周期函数 $f(t)$是绝对可积函数，即要求

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<+\infty,$$

这相当于对$|f(t)|$的衰减性提出了较高的要求.

综上所述，记

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t, \tag{1.6}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t, \tag{1.7}$$

对 $t\in(-\infty,+\infty)$，$f(t)$的谐波表示形式有如下的 Fourier 积分定理.

定理 1.2 对 $t\in(-\infty,+\infty)$，若 $f(t)$是有界变差且是绝对可积函数，则在 $f(t)$的连续点处，其函数值可用式(1.7)所示的 Fourier 积分表示，在 $f(t)$的间断点处，$f(t)=[f(t-0)+f(t+0)]/2$.

2. Fourier 变换

在上述 Fourier 积分中，式(1.6)可看做积分变换，它将时间 t 作自变量的时域函数 $f(t)$，$t\in(-\infty,+\infty)$，通过指定的积分运算，变换为频率 ω 作自变量的频域函数 $F(\omega)$，$\omega\in(-\infty,+\infty)$；式(1.7)可看做式(1.6)所示变换的逆变换，它将频域函数 $F(\omega)$通过类似的积分运算，变换为原来的时域函数 $f(t)$；由式(1.6)和式(1.7)所示的 $f(t)$和 $F(\omega)$是一一对应的变换对. 它们具有非常优美的对称形式，以后将会看到，它们还有着明确的物理含义和良好的运算性质，有着广泛的应用. 为此，将其定义如下.

定义 1.1 称式(1.6)为 **Fourier 变换**，记为 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，$F(\omega)$称为 $f(t)$的**像函数**；称式(1.7)为 **Fourier 逆变换**，记为 $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=f(t)$，$f(t)$称为 $F(\omega)$的**像原函数**.

应该看到，在 Fourier 变换的定义中，记号 $\mathscr{F}[f(t)]$强调了