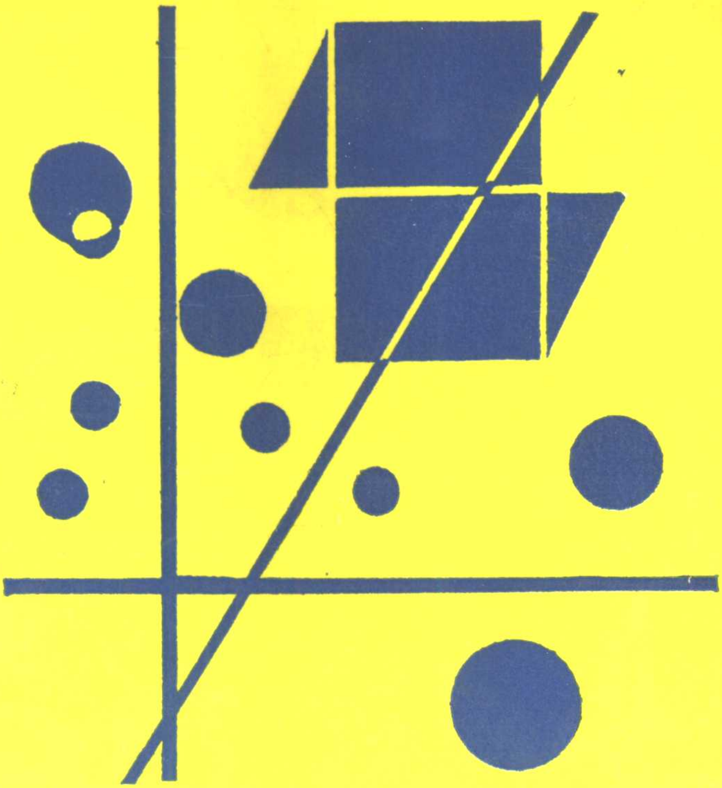


LI SAN SHU XUE

离散数学

刘叙华　虞恩蔚　姜云飞

中央广播电视大学出版社

离散数学

刘叙华　虞恩蔚　姜云飞　编

中央广播电视大学出版社

(京)新登字 163 号

离散数学

刘叙华　虞恩蔚　姜云飞　编

*

中央广播电视大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

北 京 印 刷 一 厂 印 刷

*

开本 850×1168　1/32　印张 8.875　千字 214

1993 年 2 月第 1 版　1993 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—8000

定价 6.00 元

ISBN 7-304-00758-3/O · 60

前　言

离散数学虽然是近几十年来产生的一门新课，但是就其数学内容来说却不是新的，有些内容甚至是很古典的。这些古典的数学，在强大的计算机科学的刺激下，获得了新的生命和新的自身价值。

国内外公认，离散数学包括如下内容：朴素集合论、古典数理逻辑、图论、抽象代数学（包括群、环、域、格、布尔代数等）。它们彼此间的独立性很强，每一个内容都可以做为一门课单独讲授。

而在一个学期里讲授离散数学这门课，就只能讲授各个内容的最基本的知识，为学生今后进一步学习打下基础。因此，学生在学习本课时，除了记住并理解基本的概念和知识外，更重要的是培养自己的数学思维能力。

希望读者在读这本书时，在众多的概念中要找到最重要的，在众多的定理中要找到最根本的，将这些少量的概念和定理能够透彻地理解，自如地运用，就达到了基本掌握离散数学的目的。很显然，要想在计算机科学的某个领域深造下去，还必须去读离散数学中相应内容的更深的论著。

本书由吉林大学刘叙华教授、姜云飞教授和长春广播电视大学虞恩蔚副教授编写。虞恩蔚写第一、二章，刘叙华写第三、四章，姜云飞写第五、六、七章。

编者感谢北京邮电学院陈崇昕教授（主审），辽宁大学王玉书副教授，中央广播电视大学徐六通讲师，青岛广播电视大学王可宪副教授，他们仔细审评了原稿，并提出了宝贵的意见。参加本书大

纲讨论者除上述人员外，还有中央广播电视大学李立群副教授和河北广播电视大学冯庆典副教授，对于他们所作的贡献，我们表示衷心的感谢。我们也感谢吉林大学杨凤杰讲师在编写第七章中给予的帮助。

编者虽然有在吉林大学计算机系讲授离散数学十四年的历史，可是没有给电视大学讲课的经验。面对着不同的对象，不同的要求，这本教材是否成功，编者没有把握，诚恳地希望读者提出宝贵的意见。

刘叙华

1992年10月

目　录

第一章 集　　合

§1.1 集合的概念与表示

集合是数学中一个最基本的概念，是很难精确定义的。本节对集合只给出非形式的描述。

一般地说，把一些确定的、彼此不同的事物作为一个整体来研究时，这个整体便称为一个**集合**。而组成这个集合的个别事物，称为集合的**元素**。例如，一个班级里的全体学生可以组成一个集合；全部拉丁字母可以组成一个集合；全体实数组成实数集合；平面上所有的点可以组成一个点的集合等。而上述集合中的元素分别为班级里的每一位学生、每一个拉丁字母、任一实数、平面上任意一点等。

通常用大写英文字母表示集合的名称，用小写英文字母表示集合的元素。若元素 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；若元素 a 不属于集合 A，则记作 $a\notin A$。一个集合，若其组成集合的元素个数是有限的，则称为有限集，否则称为无限集。有限集合 S 中所含元素的数目称为集合 S 的**元数**或**基数**，记作 $|S|$。

集合的表示方法一般有两种，一种是将集合的元素按任意顺序逐一列在花括号内，并用逗号分开，称为**列举法**。例如，$A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3,4,\cdots\}$，$C=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$。这当中，有时列出集合中所有元素是不现实或不可能的，如上面的集合 B 与 C。但是，只要在省略号前面或后面列出一定数量的元素，能使人们一看

就能了解哪些元素是属于这个集合就可以。

另一种是利用集合中的元素满足某种条件或具有某种性质，将条件或性质用文字或符号在花括号内竖线后面表示出来，称为**描述法**。例如，$A=\{x|x^2-1=0\}$；$B=\{a|a$ 是自然数$\}$。

集合中的元素也可以是一个集合。例如，$A=\{a,b,c,\{a\},\{a,b\}\}$。

常见的集合表示符号有下面几种。

N：正整数或自然数集合$=\{1,2,3,\cdots\}$。

I：整数集合$=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$。

Q：有理数集合$=\{x|x$ 为有理数$\}$。

R：实数集合$=\{x|x$ 为实数$\}$。

C：复数集合$=\{x|x=a+bi,a,b,\in R,i=\sqrt{-1}\}$。

下面介绍集合的一些有关概念。

定义　设有集合 A 和 B，如果 A 中的每一个元素都是 B 中的元素(即若 $a\in A$，必有 $a\in B$)，则称 A 是 B 的**子集**，或者说 A 包含于 B(或称 B 包含 A)，两个集合的这种关系称为**包含关系**，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$。反之，若 A 不是 B 的子集，则记作 $A\nsubseteq B$ 或 $B\nsubseteq A$。

定义　设 A 和 B 是两个集合，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称集合 A 与 B **相等**，记作 $A=B$。

集合 A 与 B 相等，即意味着 A 与 B 具有完全相同的元素。若 A 与 B 不相等，记作 $A\neq B$。

定义　设 A 和 B 是两个集合，若 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subset B$。即若 A 是 B 的真子集，则 B 中至少有一个元素不属于 A。

例 1　设 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{a,b,x,y\}$，$C=\{a,c\}$，则有 $C\subseteq A$，但是 $C\nsubseteq B$。

例 2　设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2\}$，$C=\{1,3\}$，$D=\{2\}$，则有 B

$\subseteq A, C\subseteq A, D\subseteq A, D\subseteq B$。

例 3　整数集 I 是有理数集 Q 的真子集，即 $I\subset Q$；有理数集 Q 又是实数集 R 的真子集，即 $Q\subset R$；而实数集 R 又是复数集 C 的真子集，即 $R\subset C$。当然有 $I\subset C, Q\subset C$。

注意从属关系与包含关系的区别，从属关系 $a\in A$ 是指集合 A 中的元素 a 与集合 A 的关系。而包含关系 $B\subseteq A$ 是指集合 A 与集合 B 之间的关系。例如，当 $A=\{a,b,c\}$，则有 $a\in A$，而 $\{a\}\subseteq A$。

根据子集的定义，包含关系具有如下一些重要性质：

(1)自反性：对于任意集合 A，有 $A\subseteq A$；

(2)反对称性：对于任意的集合 A 与 B，若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 $A=B$；

(3)传递性：对于任意的集 A、B、C，若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则有 $A\subseteq C$。

定义　不含有任何元素的集合称为**空集**，记作 ϕ。例如，$\{x\mid x^2+2=0, x\in R\}$ 是空集。但是要注意，$\phi\neq\{\phi\}$，而且 $\phi\in\{\phi\}$，因为 $\{\phi\}$ 不是空集，表示集合中有唯一元素 ϕ。

容易证明，空集是任一集合的子集，而且空集是唯一的。

定义　在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为**全集**，记作 E。

全集是一个相对性概念。由于研究的问题不同，所取的全集也不同，而且并非是唯一的，一般总是取一个比较方便的集合作为全集。例如，我们在整数范围内研究问题时，既可以取整数集 I 作为全集 E，也可以取有理数集 Q 或实数集 R 作为全集，然而取 I 为全集要比 Q 或 R 为全集更方便一些。

以后在讨论中所涉及的每个集合都可以看作是全集 E 的子集。

定义　设 A 是一个集合，由 A 的所有子集组成的集合，称为

集合 A 的幂集，记作 $\rho(A)$ 或 2^A。

例 4 设 $A=\{a\}$，则 $\rho(A)=\{\phi,\{a\}\}$；设 $B=\{a,b\}$，则 $\rho(B)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$；设 $C=\{a,b,c\}$，则 $\rho(C)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$；而 $\rho(\phi)=\{\phi\}$。

例 5 设 $A=\{x|x(x-1)(x-2)=0,x\in R\}$，求 A 的幂集。

解 $A=\{0,1,2\}$，A 的子集为 $\phi,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}$；故

$$\rho(A)=\{\phi,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}。$$

定理 1 如果有限集合 A 的元数为 n，则其幂集 $\rho(A)$ 的元数为 2^n。

证 A 的所有由 m 个元素组成的子集的个数为从 n 个元素中取 m 个元素的组合数 C_n^m。

另外，因为 $\phi\subseteq A$，所以 $\rho(A)$ 的元数 N 可以表示为

$$N=1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^m+\cdots+C_n^n=\sum_{m=0}^{n} C_n^m$$

由二项式定理可知：

$$(x+y)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}y+C_n^2x^{n-2}y^2+\cdots+C_n^ny^n。$$

令 $x=y=1$，便有

$$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=\sum_{m=0}^{n} C_n^m$$

故 $\rho(A)$ 的元数是 2^n。 证毕

例 6 设 A 和 B 是两个集合，试证明 $A\subseteq B$ 的充分必要条件是 $\rho(A)\subseteq\rho(B)$。

证 必要性，设 $A\subseteq B$，任取 $x\in\rho(A)$，则 x 是 A 的子集，所以 $x\subseteq A$，因为 $A\subseteq B$，有 $x\subseteq B$，即 x 是 B 的子集，从而 $x\in\rho(B)$，因此，$\rho(A)\subseteq\rho(B)$。

充分性，设 $\rho(A)\subseteq\rho(B)$，任取 $x\in A$，则 $\{x\}\in\rho(A)$，由 $\rho(A)\subseteq\rho(B)$ 可得 $\{x\}\in\rho(B)$，因为 $x\in B$ 当且仅当 $\{x\}\in\rho(B)$，从而 x

$\in B$，因此，$A\subseteq B$。

习　题

1. 用列举法表示下列集合：

(1) 1 至 100 的整数中的完全平方数的集合；

(2) 大于 3 而小于或等于 7 的整数集合；

(3) 12 的质因数集合；

(4) $|x|<4$ 的奇数解的集合。

2. 用描述法表示下列集合：

(1) 所有一元一次方程的解组成的集合；

(2) 被 5 除余 1 的整数集合；

(3) 平面直角坐标系中单位圆内（不包括单位圆周）的点集；

(4) 使 $y=\dfrac{1}{x^2+x-6}$ 有意义的实数 x 的集合。

3. 写出 $\{a,b,c,d\}$ 的全部子集和真子集。

4. 判定下列各题的正确与错误：

(1) $\{a\}\in\{a,b,c\}$；

(2) $\{a\}\subseteq\{a,b,c\}$；

(3) $\phi\in\{a,b,c\}$；

(4) $\phi\subseteq\{a,b,c\}$；

(5) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$；

(6) $\{a,b\}\in\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$；

(7) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,\{a,b\}\}$；

(8) $\{a,b\}\in\{a,b,\{a,b\}\}$。

5. 某集合有 20 个元素，试问：

(1) 可构成多少个子集？

(2) 其中有多少个子集的元数为奇数？

(3) 它的幂集有多少个子集?

6. 确定下列集合的幂集:

(1) $A=\{a,\{b\}\}$;

(2) $B=\{1,\{2,3\}\}$;

(3) $C=\{\phi,a,\{b\}\}$;

(4) $D=\rho(\phi)=\{\phi\}$。

7. 设 $A=\{a\}$,判定下列各题正确与错误:

(1) $\phi\in\rho(\rho(A))$; (2) $\phi\subseteq\rho(\rho(A))$;

(3) $\{\phi\}\in\rho(\rho(A))$;(4) $\{\phi\}\subseteq\rho(\rho(A))$;

(5) $\{a\}\in\rho(\rho(A))$;(6) $\{a\}\subseteq\rho(\rho(A))$。

§1.2 集合的运算

按照某些规则,对一个或多个集合进行运算,能够生成其它新的集合。本节将讨论集合的一些运算规律及其应用。

定义 设 A 和 B 是两个任意集合,所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合称为集合 A 与 B 的**并集**,记作 $A\cup B$。即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

例 1 设 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{b,c,d,e\}$,则 $A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$。

例 2 设 $A=\{x\mid -2<x<3,x\in R\}$,$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5,x\in R\}$,则 $A\cup B=\{x\mid -2<x\leqslant 5,x\in R\}$。

例 3 设 $A\subseteq B$,$C\subseteq D$,试证明 $A\cup C\subseteq B\cup D$。

证 对于任意 $x\in A\cup C$,则有 $x\in A$ 或 $x\in C$。若 $x\in A$,由 $A\subseteq B$,则 $x\in B$;若 $x\in C$,由 $C\subseteq D$,则 $x\in D$,故 $x\in B\cup D$,因此,$A\cup C\subseteq B\cup D$。

例 4 对于任意集合 A,B,试证明

$$\rho(A)\cup\rho(B)\subseteq\rho(A\cup B)$$

证 任取 $x\in\rho(A)\cup\rho(B)$，于是 $x\in\rho(A)$ 或者 $x\in\rho(B)$。若 $x\in\rho(A)$，则 x 是 A 的子集，于是 x 是 $A\cup B$ 的子集，所以 $x\in\rho(A\cup B)$。若 $x\in\rho(B)$，同理可证 $x\in\rho(A\cup B)$，故 $\rho(A)\cup\rho(B)\subseteq\rho(A\cup B)$。

定义 设 A 和 B 是两个任意集合，属于 A 同时又属于 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$。即

$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$

例 5 设全集 $E=N$，A 为素数集，B 为 N 中所有奇数组成的集合，则

$A\cup B$ 由所有正奇数和 2 组成；

$A\cap B$ 由除 2 以外的所有素数组成。

如果集合 A 与 B 没有公共元素，即 $A\cap B=\phi$，则称 A 与 B 是不相交的。

例 6 设 $A_1=\{\{1,2\},\{3\}\}$，$A_2=\{\{1\},\{2,3\}\}$，$A_3=\{\{1,2,3\}\}$，则 $A_1\cap A_2=\phi$，$A_1\cap A_3=\phi$，$A_2\cap A_3=\phi$，所以集合 A_1，A_2 和 A_3 是两两互不相交的。

由上述定义，显然可以得到以下关系式：

$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$，$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$

如果 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$

定义 设 A 和 B 是两个任意集合，属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**，记作 $A-B$。即

$A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$

定义 设有全集 E，集合 $A\subseteq E$，由 E 中所有不属于 A 的元素组成的集合称为 A 的**补集**，记作 $\sim A$。即

$\sim A=\{x\mid x\in E$ 且 $x\notin A\}$

由这两个定义，可以得到差集的一个重要等价式：$A-B=A$

$\cap \sim B$。

下面我们用定义来证明一下这个结论。

证 对于任意的 x，若 $x \in A-B$，即 $x \in A$ 且 $x \notin B$，从而 $x \in A$ 且 $x \in \sim B$，有 $x \in A \cap \sim B$，故 $A-B \subseteq A \cap \sim B$。

反之，若 $x \in A \cap \sim B$，即 $x \in A$ 且 $x \in \sim B$，从而 $x \in A$ 且 $x \notin B$，有 $x \in A-B$，故 $A \cap \sim B \subseteq A-B$，因此，$A-B=A \cap \sim B$。

上述这个结论很重要，在以后关于集合恒等式的证明中要经常用到，常常是用 $A \cap \sim B$ 代换 $A-B$ 进行应用，请读者牢牢掌握此结论。

例 7 设 $A=\{2,5,6\}$，$B=\{3,4,2\}$，$B-A=\{3,4\}$，$A-B=\{5,6\}$。

例 8 设 $A=\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 1, x \in R\}$，$B=\{x \mid 0<x<3, x \in R\}$，则 $A-B=\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 0, x \in R\}$；$B-A=\{x \mid 1<x<3, x \in R\}$。

例 9 设 $A=\{a,b,c\}$，$E=\{a,b,c,d,e,f\}$，则 $\sim A=\{d,e,f\}$。

例 10 设 $A=\{x \mid x \geqslant 5, x \in R\}$，$E=R$，则 $\sim A=\{x \mid x<5, x \in R\}$。

集合的并集与交集的运算可以推广到任意多个集合的情形。

定义 由 n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 所有元素组成的集合，称为这 n 个集合的**并集**，记作 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，即

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\{x \mid x \in A_1 \text{ 或 } x \in A_2, \cdots, x \in A_n\}$$

定义 由同时属于 n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的所有元素组成的集合称为这 n 个集合的**交集**，记作 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$，即 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i=\{x \mid x \in A_1$，且 $x \in A_2, \cdots$，且 $x \in A_n\}$。

例 11 设集合 $A_1=\{1,2\}$，$A_2=\{2,3\}$ 和 $A_3=\{1,2,3,6\}$，试

求$\bigcup\limits_{i=1}^{3}A_i$和$\bigcap\limits_{i=1}^{3}A_i$。

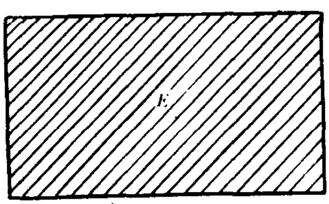
解 应有$\bigcup\limits_{i=1}^{3}A_i=\{1,2,3,6\}$，$\bigcap\limits_{i=1}^{3}A_i=\{2\}$。

例 12 设$A_i=\left[-1+\frac{1}{i},1-\frac{1}{i}\right]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，求$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$。

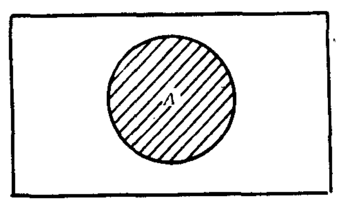
解 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=\{0\}\cap\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}\cap\left\{-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\}\cap\cdots\cap\left\{-\frac{n-1}{n},\frac{n-1}{n}\right\}$
$=\{0\}$。

集合与集合间的相互关系和它们之间的一部分运算可以用文氏图给予形象、直观地描述。文氏图(John Venn，英国数学家，1834～1883)是一种图解集合的工具，当集合的数量不多时，可以用它表达对集合的各种运算。

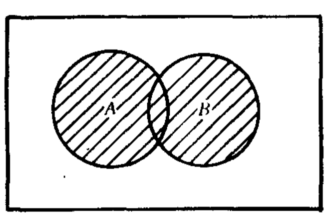
文氏图是用点的集合作为集合的示意表示。通常用一个矩形区域表示全集E，矩形中的点表示全集E中的元素。E的子集用矩形内的圆形区域表示，图 1-1 中的阴影区域表示了每个图形下边所指出的集合。



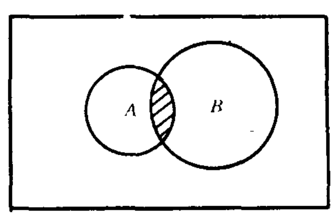
E



A



$A\cup B$



$A\cap B$