

薄壳分析

1978年5月8日

中国建筑工业出版社

薄壳分析

[英]J.E.吉布生 著

许铁生 译

中国建筑工业出版社

J. E. GIBSON
**LINEAR ELASTIC THEORY
OF THIN SHELLS**
PERGAMON PRESS
OXFORD·LONDON·EDINBURGH·NEW YORK
PARIS·FRANKFURT
1965

* * *

薄壳分析
许铁生译

*

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
中国建筑工业出版社印刷厂印刷

*

开本: 787×1092毫米1/32 印张: 51/2 字数: 118 千字
1975年1月第一版 1975年1月第一次印刷
印数: 1—11,990册 定价: 0.44 元
统一书号: 15040·3199

译 者 的 话

本书是根据英国出版的吉布生著薄壳线性弹性理论 (J.E.GIBSON, Linear elastic theory of thin shells) 一书1965年版译出的。全书根据无矩理论及有矩理论主要对各类薄壳进行数学分析, 同时介绍了采用电子计算机对复杂壳体结构进行程序设计的要领。书末, 还提供了壳体结构的实验方法以及几种壳体结构的实验研究结果。

本书的特点是采用较浅近的数学形式全面、扼要地叙述各种壳型的数学分析方法, 并附有较多的数字例题, 概念比较清晰, 便于阅读。但在利用计算机程序分析薄壳应力方面, 内容比较粗漏, 只叙述了一般性的概念。有些扩充程序则介绍得更加简略, 只罗列了这些程序的名称及个别应注意的问题。另外, 对于目前广泛应用的有限元结构分析方法及其计算机程序, 也未能介绍。这些都是本书不足之处。

读者参阅本书时, 特别对计算机程序及实验方法部分, 应结合我国具体情况加以考虑。

译校过程中除删去原作者序外, 个别地方还作了一些文字上的改动, 原书中公式符号甚至插图的错误已予以校正, 并加上*号, 个别地方还加了注释。

译文基本上使用我国目前通用的名词, 但有个别名词是译者自己拟定的, 如: feather edge 一词, 译为“羽状边界”, 因该词原文指的是无边梁但结构旁边有两块小板的边界情况, 状如结构长了羽毛一样; 又如: stress resultant 一词, 原意为材料力学中的“内力素”, 本书译为“应力总量”, 目的是与internal force (内力) 一词相区别。

ABA/10/25 05

目 录

第一章 壳体理论的一般介绍	1
1-1 引言	1
1-2 壳体曲面的参考轴	1
1-3 薄膜应力总量	2
1-4 弯曲应力总量	3
1-5 圆柱壳的薄膜理论	4
1-6 端支承的卧式圆柱形贮罐	8
1-7 盛满液体的立式圆柱形贮罐	10
1-8 承受重力作用的悬臂柱壳	11
第二章 封闭圆柱壳在轴对称荷载下的弯曲理论	14
2-1 引言	14
2-2 平衡方程式	15
2-3 薄膜应变	17
2-4 弯曲应变	18
2-5 “Z 曲面”的组合应变	19
2-6 应变-应力总量方程式	20
2-7 应变位移方程式	23
2-8 曲率位移方程式	24
2-9 应力总量位移方程式	25
2-10 化为相容方程式	26
2-11 相容方程式的解	27
2-12 盛满液体的柱形贮罐	29
2-13 有厚的端平板的柱形压力容器	32
2-14 数字例题	34
第三章 开口圆柱壳的弯曲理论	39

3-1	引言	39
3-2	平衡方程式	40
3-3	中面的应变位移方程式	43
3-4	中面的曲率位移方程式	45
3-5	应变-应力总量方程式	46
3-6	相容方程式	47
3-7	简支开口柱壳相容方程式的解	48
3-8	对称荷载下的解(余函数)	49
3-9	表格形式的余函数	52
3-10	均布荷载下的特积分	54
3-11	自由边缘的边界条件	58
3-12	数字例题	59

第四章 回转壳的薄膜理论

4-1	引言	63
4-2	平衡方程式	65
4-3	轴对称荷载下回转壳的薄膜理论	69
4-4	轴对称荷载下的简支球顶	71
4-5	球形贮罐	72
4-6	锥壳	74
4-7	数字例题	76

第五章 回转壳在轴对称荷载下的弯曲理论

5-1	引言	77
5-2	平衡方程式	79
5-3	中面的应变位移方程式	82
5-4	中面的曲率位移方程式	84
5-5	应力总量位移方程式	87
5-6	轴对称荷载下的球壳	89
5-7	轴对称荷载下球壳的简化理论	92
5-8	有刚性固定边缘的球顶	96

5-9	有筒支边缘的球顶	98
5-10	精确理论与近似理论比较	99
5-11	数字例题	100
第六章	一般形壳的薄膜理论	102
6-1	引言	102
6-2	一般形曲面的几何性质	103
6-3	薄膜平衡方程式	104
6-4	平衡方程式的变换	106
6-5	变换方程式的解	108
6-6	双曲抛物面	108
6-7	抛物锥面	117
第七章	薄壳分析的计算机程序	123
7-1	引言	123
7-2	无边梁开口多波柱壳的边界条件	124
7-3	边界条件的解	127
7-4	计算机程序	129
7-5	一般多波开口壳程序	130
7-6	一般“羽状边界”多波壳的程序举例	131
7-7	带边梁的多波柱壳	143
7-8	壳体结构一般分析用的扩充程序	148
第八章	壳体实验研究	150
8-1	引言	150
8-2	单个开口柱壳的研究	151
8-3	带小边梁的大比例柱壳的实验研究	154
8-4	小比例多波柱壳的研究	157
8-5	褶皱板结构的研究	160
8-6	底部铰接并承受静水压力的封闭柱形贮罐的研究	163
8-7	结论	166
	参考书目	167

第一章 壳体理論的一般介紹

1-1 引 言

人们对于壳体一类的结构十分熟悉，但只在最近几十年才把它用作容器、飞机机身、潜水艇壳以及屋盖结构。过去大概难于找到建造壳体的合适材料，所以很少在结构中利用壳形的固有强度。现在这个困难不存在了，一般的壳体结构可采用象钢、轻合金、塑料、木材以及钢筋混凝土等各种各样的材料来建造。

通常，壳体结构是指两个非常接近的曲面之间的固体材料。这两个曲面之间的距离就是壳体的厚度。如果这个厚度比各个边界尺寸小很多，这种壳就称为“薄壳”，否则称为“厚壳”。本书基本上只就“薄壳”进行分析。

为了简化起见，假设建造壳体的材料是均匀的、各向同性的和完全弹性的。严格地说，只有采用具有这种物理特性的材料（钢是一个有代表性的例子）来建造壳结构，才能在设计中采用它的分析结果。对于钢筋混凝土材料来说，虽然仅仅在低应力范围才表现出适当的弹性，但在实践中大多数的钢筋混凝土壳体屋盖仍按弹性结构设计。

1-2 壳体曲面的参考轴

为了确定壳面上的各点，最好选择位于两个边界面中间的曲面，即所谓“中面”作为参考面，并在它的上面建立正

交的坐标系，由此即可定出中面上任何一点的位置。这样的坐标系 x 、 y 、 z ，如图 1 所示，图中为标出了中面的壳体微元，它的周边分别与 xz 和 yz 平面相平行。

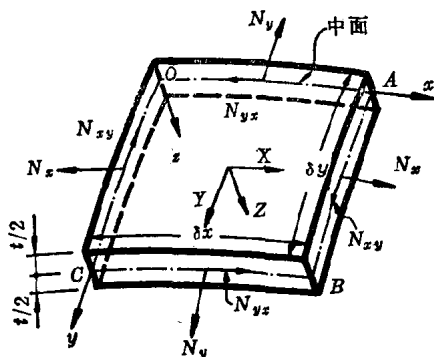


图 1 薄膜应力总量

1-3 薄膜应力总量

为了弄清壳体内由于外力的影响所产生的应力，最好区分两种典型作用，一种称为“薄膜作用”，另一种称为“弯曲作用”。

在“薄膜作用”下，假定壳不能抵抗任何弯矩，外力只由壳面中的内力来承担。抵抗内压力的气球张力就是这样一个显明例子。为了方便起见，在壳体理论中把作用于壳体的微元各边的力定义为该边单位长度上的力，而把这些力统称为“应力总量”。图 1 表示作用于微元边 δx 和 δy 上的这样一组“薄膜应力总量”。 N_x 和 N_y 是这样两个总量：即分别与 δy 和 δx 边相垂直的各边单位长度上的力。 N_{xy} 和 N_{yx} 则分别为作用在 δy 和 δx 所在的平面内单位长度上的剪力。本书全部采用这种记法。如果这些应力总量，它的方向与图 1 所示相

同，即为正值。所以正的应力总量 N_x 和 N_y 总是代表拉伸。

为方便起见，把作用于壳面上的外力分解为 X 、 Y 、 Z 三个分量，使它们的方向与坐标轴一致，如图所示。这些分量即作用在壳面每单位面积上的力，如果它们沿坐标轴的正方向作用则代表正值。

本章后面部分将表明，在推导壳体的薄膜理论时，仅应用静力学的基本定律。

1-4 弯曲应力总量

仅有薄膜应力总量还不足以分析壳体微元的真实弹性性质，因为外力必定要引起壳的挠曲或弯曲，这种弯曲只能由壳体的内力矩和内力来抵抗。图2表示这样的一组力矩和力。

在计算这组应力时，为了方便起见，采用作用边每单位长度上的力矩和力。在图2中， M_x 和 M_y 分别为作用在微元边 δy 和 δx 每单位长度的弯矩， M_{xy} 和 M_{yx} 则分别为作用在微元边 δy 和 δx 每单位长度上的扭矩。

Q_x 和 Q_y 为每单位长度上的横剪力。这些力矩和横剪力，方向如图2所示时，代表正值。求导这些力矩和横剪力的理论通常称为壳的“弯曲理论”。此时，为了算得这些应力总量的值只有静力学方程式是不够的，还必须进一步研究包含应变和位移的方程式才能求出解答。

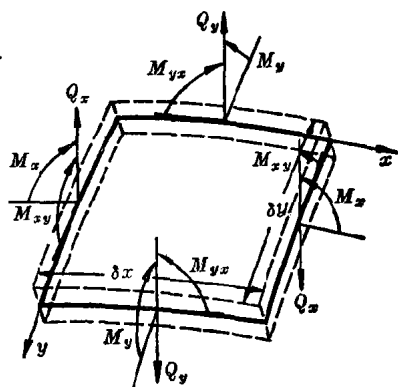


图2 弯曲应力总量

若把薄膜理论和弯曲理论分开，好象“薄膜作用”和“弯曲作用”是单独发生的一样，虽然在数学上不够准确，但在某些情形下，这样的分析也能得到适当准确的计算结果。现拟分别详细研究壳体内的应力情况。为了简单起见，先研究圆柱壳的薄膜应力。

1-5 圆柱壳的薄膜理论

考察圆柱壳时，假定它的母线是水平的 并与 x 轴 相 平 行。壳面上某一微元将由两根相邻的母线和两个垂直于 x 轴的横截面所包围而成。壳上任一点的位置 可由坐标 x 和 $y=R\varphi$ 来确定。这里角度 φ 如图 3 所示应从固定的竖轴开始量起， R 是壳的半径。

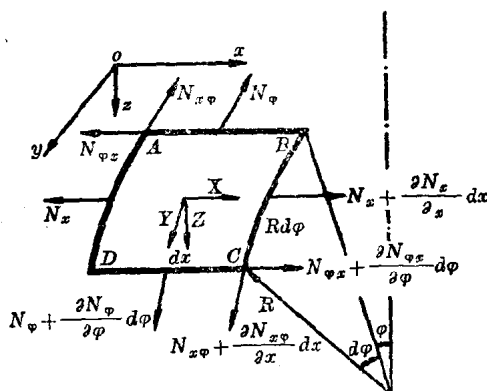


图 3 在圆柱壳内的薄膜应力总量

因为圆柱壳的半径 R 等于常量，所以 $dy = R d\varphi$ ，在偏微分情形下就构成 $\partial/\partial y = \partial/R\partial\varphi$ 。

考察图 3 所示的微元曲面，它的边长为 dx 和 $Rd\varphi$ 。 N_x 和 N_φ 是微元沿 x 和 $y=R\varphi$ 方向的薄膜应力总量， $N_{\varphi x}$ 和 $N_{x\varphi}$

是沿 x 和 y 方向的剪应力总量，所有这些应力总量都定义为在它们所作用的边上每单位长度上的力。

作用于微元上的外力沿坐标轴方向具有三个分量 X 、 Y 和 Z ，它们全部都定义为每单位面积上的力。

在 AD 边应力总量 N_x 垂直作用于 AD 并平行于 x 轴，而在其对边 BC 上它的值增加至 $N_x + \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \right) dx$ 。与此类似，在 AB 边应力总量 N_φ 垂直作用于 AB 并平行于 y 轴，而在其对边 CD 上它的值增加至 $N_\varphi + \left(\frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} \right) d\varphi$ 。

研究剪应力总量。在 AB 边剪应力总量 $N_{\varphi x}$ 平行作用于此边（沿 x 方向），而在其对边 CD 上它的值增加至 $N_{\varphi x} + \left(\frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} \right) d\varphi$ 。同理，在 AD 边和 BC 边剪应力总量分别等于 $N_{x\varphi}$ 和 $N_{x\varphi} + \left(\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} \right) dx$ ，如图 3 所示。

微元 $ABCD$ 在这些应力总量和外力的作用下处于平衡。首先，沿 x 轴的正方向取投影，则求得 BC 边的合力等于应力总量乘以边长，即

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) R d\varphi$$

同样，在 AD 边的合力为 $-N_x R d\varphi$ 。其次，求出 AB 边和 CD 边的剪应力总量 $N_{\varphi x}$ 的分力，在 AB 边为 $-N_{\varphi x} dx$ ，在 CD 边为

$$\left(N_{\varphi x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} d\varphi \right) dx$$

沿 x 方向外力的总分力的值为

$$X dx R d\varphi$$

由于在 x 方向上必须平衡, 把这些力全部总和起来并使之等于零, 则得

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) R d\varphi - N_x R d\varphi + \left(N_{\varphi x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} d\varphi \right) dx - N_{\varphi x} dx + X dx R d\varphi = 0$$

在上式中消去同类项, 并将各项全部除以 $dx R d\varphi$, 可求得 x 方向的平衡方程式:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{R \partial \varphi} + X = 0 \quad (1-1)$$

在推导方程式 (1-1) 时已详细地作了解释, 用同样方法可以毫无困难地确定 y 方向的平衡方程式为

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi y}}{R \partial \varphi} + Y = 0 \quad (1-2)$$

沿 z 方向取投影, 从图 4(a) 可以看出, 剪应力在这个方向的合力为零。

$N_{x\varphi}$ (AD 边上) 沿 z 的分量当从点 D 移动至点 A 时, 其方向如图 4 所示发生改变, 所以它在 z 方向的合力应该为零。同理也可推论 BC 边上剪应力的合力。

由图 4(b) 可知, AB 边的法应力总量 N_φ 在 z 方向有一个大小为 $N_\varphi dx \sin(d\varphi/2)$ 的分力, 因为 $d\varphi$ 是一个小角, 它的一阶微量等于 $N_\varphi dx d\varphi/2$, CD 边的法应力总量 $N_\varphi + (\partial N_\varphi / \partial \varphi) d\varphi$ 在 z 方向也有一个分力, 它的一阶微量等于 $N_\varphi dx d\varphi/2$ 。因此, 上述分力在 z 方向的总和应为 $N_\varphi dx d\varphi$ 。加上外荷载引起的分力 $Z dx R d\varphi$ 并使之等于零, 用 $d\varphi dx$ 遍除等式各项, 最后求得 z 方向的平衡方程式为:

$$N_\varphi + Z R = 0 \quad (1-3)$$

最后, 对 z 轴取矩, 求得

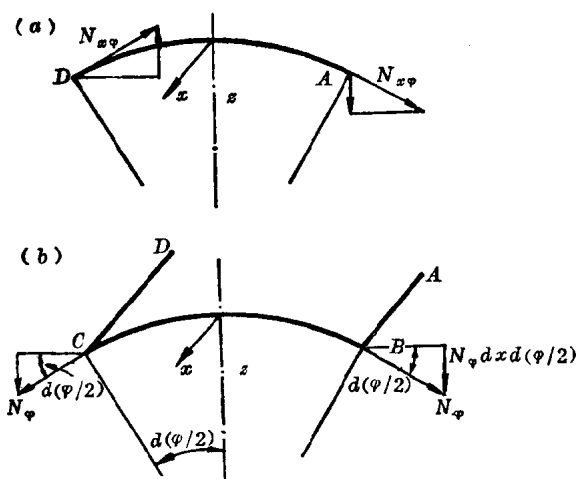


图 4 应力总量在 z 方向的分力

$$N_{x\varphi}Rd\varphi dx - N_{\varphi x}dx R d\varphi = 0$$

在上式内除以 $dxRd\varphi$, 可得

$$N_{x\varphi} = N_{\varphi x} \quad (1-4)$$

这四个静力平衡方程式完全可以确定应力总量 N_x 、 N_φ 、 $N_{x\varphi}$ 和 $N_{\varphi x}$ 。利用等式 (1-4), 还可以简化为三个方程式:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{R \partial \varphi} + X = 0 \quad (1-5)$$

$$\frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial x} + \frac{\partial N_\varphi}{R \partial \varphi} + Y = 0 \quad (1-6)$$

$$\frac{N_\varphi}{R} + Z = 0 \quad (1-7)$$

如果外力 X 、 Y 和 Z 为已知, 由方程式 (1-7) 立刻可以求出 N_φ 。把这个数值代入方程式 (1-6), 并对 x 进行积分,

就可求出 $N_{\varphi x}$ ，再把所算出的 $N_{\varphi x}$ 值代入方程式 (1-5) 并进行积分，即可求出 N_x 。下面将研究如何应用这三个薄膜方程式去计算各种形式的圆柱壳的应力总量。

1-6 端支承的卧式圆柱形贮罐

试研究一长为 L ，半径为 a 的卧式圆柱形贮罐。其内充满密度为 ρ 的液体， φ 角由竖轴开始量起，任一点 A 的静水压力（见图 5）

$$p = \rho a (1 - \cos \varphi)$$

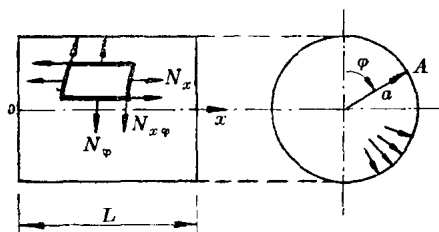


图 5 圆柱形容器

由于作用力 Z 的正向必须沿 z 轴指向圆心，而静水压力的方向是离开圆心的，所以分量 Z 应为

$$Z = -p = -\rho a (1 - \cos \varphi)$$

又由于在 x 和 y 轴方向都不存在外力，故 X 和 Y 应当等于零。

这样，由方程式 (1-7)

$$N_{\varphi} = -Za = \rho a^2 (1 - \cos \varphi) \quad (a)$$

将 N_{φ} 的值代入方程式 (1-6)，则

$$\frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial x} + \rho a \sin \varphi = 0 \quad (b)$$

将上式对 x 进行积分, 得

$$N_{\varphi x} = -\rho a x \sin \varphi + A \quad (c)$$

这里 A 只是 φ 的函数。

把方程式 (c) 的 $N_{\varphi x}$ 代入方程式 (1-5), 求得

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho x \cos \varphi + \frac{\partial A}{a \partial \varphi} = 0 \quad (d)$$

将上式对 x 进行积分, 得

$$N_x = \rho \frac{x^2}{2} \cos \varphi - \frac{x}{a} \frac{\partial A}{\partial \varphi} + B \quad (e)$$

这里 B 也只是 φ 的函数。

函数 A 和 B 必须满足下列边界条件。为简单起见, 假设贮罐的支承端不存在 N_x , 于是有两个边界条件:

$$(1) \text{ 当 } x = 0, \quad N_x = 0$$

$$(2) \text{ 当 } x = L, \quad N_x = 0$$

将条件 (1) 代入方程式 (e), 立即求得 $B = 0$ 。在 (e) 式中应用条件 (2) 并考虑到 $B = 0$ 得

$$0 = \rho \cos \varphi L^2 / 2 - L \frac{\partial A}{\partial \varphi} / a$$

将上式对 φ 进行积分, 得

$$A = \rho L a \sin \varphi / 2$$

将这些值代入公式 (a)、(c) 和 (e), 最后给出

$$N_{\varphi} = \rho a^2 (1 - \cos \varphi)$$

$$N_{\varphi x} = \rho a (L/2 - x) \sin \varphi$$

$$N_x = -\rho x (L - x) \cos \varphi / 2$$

从这些值可以看出: φ 从 0 变到 π 时 (贮罐底部), N_{φ} 从 0 变到 $2\rho a^2$ 。 N_x 在两端 $x=0$ 和 $x=L$ 处为零, 而在中心 $x=L/2$ 处则具有最大值 $-\rho L^2 \cos \varphi / 8$ 。

应该看到 N_x 的数值与把贮罐假设为两端简支的圆环形

截面的梁在承受每单位长度上由于液体重量所引起的均布荷载 $\rho\pi a^2$ 时所求得的数值相同。此时梁截面绕中和轴的惯性矩 I 为 $\pi a^3 t$, t 为贮罐的壁厚。任意横截面处的弯矩 M 等于 $\rho\pi a^2 x(L-x)/2$, 横截面上任一点距中和轴的距离 y 为 $a \cos \varphi$, 应用梁的一般公式可得 $f = My/I$, 同时注意到 $N_x = ft$ 于是

$$N_x = ft = \rho x(L-x) \cos \varphi / 2$$

这个结果与由薄膜理论所求出的数值是一样的。利用梁内的剪应力公式, 也可以证明, 所得公式与上面已算出的剪应力 $N_{\varphi x}$ 的表达式相同。

1-7 盛满液体的立式圆柱形贮罐

试考察一半径为 a , 长度为 L , 盛满液体密度为 ρ 的圆柱形贮罐, 在 x 处的压力由 $(L-x)$ 的静水压力所引起。因此, 作用力 X 、 Y 和 Z 分别为

$$X = 0$$

$$Y = 0$$

$$Z = -\rho(L-x)$$

由方程式 (1-7), 有

$$N_{\varphi} = -ZR = \rho a(L-x) \quad (a)$$

把 N_{φ} 值代入方程式 (1-6), 得 $\partial N_{\varphi x} / \partial x = 0$, 对 x 进行积分, 得 $N_{\varphi x} = A$, 这里 A 只是 φ 的函数。

把 $N_{\varphi x} = A$ 代入方程式 (1-5), 则

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial A}{a \partial \varphi} = 0$$

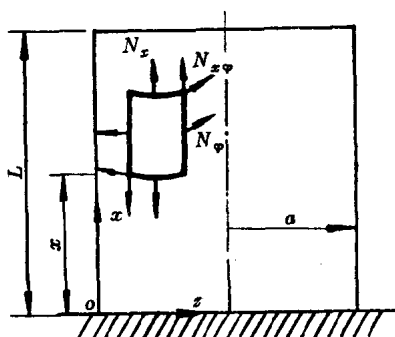


图 6 盛满液体的圆柱形贮罐