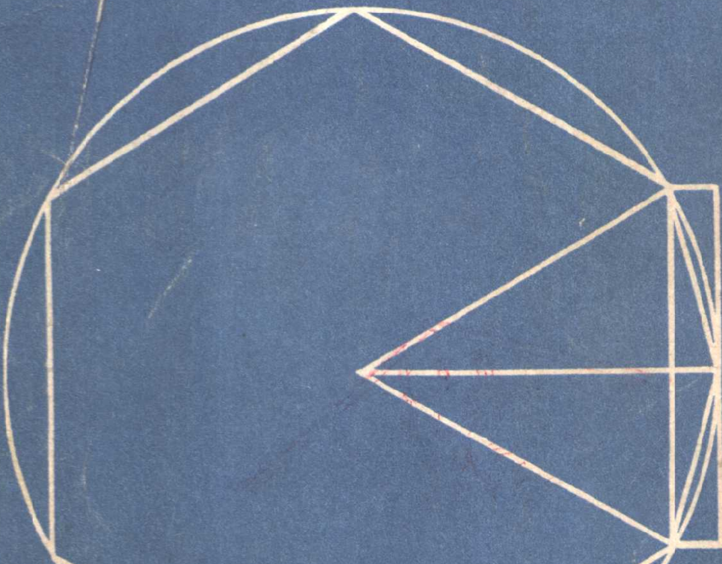
高等数学提要与解题范例

周鸿印 甘以炎 李远聆



水利电力出版社

高等数学提要与解题范例

周鸿印　甘以炎　李远聆

水利电力出版社

高等数学提要及解题范例

周鸿印　甘以炎　李远聆

*

水利电力出版社出版

（北京三里河路6号）

新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售

水利电力印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　27.75印张　620千字

1984年9月第一版　1984年9月北京第一次印刷

印数 00001—44190册　定价 3.95元

书号 15143・5435

前　言

本书是一本高等数学自学参考用书。其内容深广度与现行工科高等数学教学大纲基本相符，某些重点部分有所加深和拓广。

本书各章节由内容提要及解题示例两部分组成。内容提要除简明地介绍有关内容外，对于初学者容易混淆或较难理解的问题，还作了必要的说明，希望起到提要钩玄的作用。这样既有助于读者掌握要点，也可供复习查考之用；解题示例共精选各种有代表性的例题500余例，解题时注意交代解题思路和解题方法，并给出一题的多种解法，有的还结合例题，进行了必要的叙述，指出解题中易犯的错误和应注意的问题，希望对读者起到举一反三的作用，提高读者分析问题、解决问题的能力。此外，各节均配有一定数量的习题，给予答案或提示，书末附录有综合题，其中部分选自近年来一些高等院校选拔出国生及研究生的试题，以期提高读者综合运用所学知识的能力。书中用到集合、逻辑的符号及基本知识，可参看附录二、三。

本书由武汉水利电力学院周鸿印副教授主编，其中第三、四、五章及附录二、三由周鸿印编写，第一章一、二、三节及第六、七章及附录一由甘以炎副教授编写，第一章四、五、六节及第二章由李远聆讲师编写。

全书初稿经北方交通大学陈长荫副教授认真审阅，提出

了许多宝贵意见，对提高本书质量起了较大的作用，谨致衷心的谢意。

由于我们水平有限，本书一定存在不少缺点和不妥之处，敬希读者批评指正。

编　　者

1982年11月

内 容 提 要

本书是一本高等数学自学参考用书，其内容的深广度与现行工科高等数学教学大纲基本相符。全书共七章，各章均由内容提要与解题示例两部分组成。内容提要分别对一元函数的微分学及积分学、空间解析几何与矢量代数、多元函数微分学及积分学、级数及常微分方程等主要内容作了简明的介绍，其中某些重点部分并有所加深和拓广；解题示例精选了500余有代表性的例题。为提高读者的解题能力，范例中特别交代解题思路和解题方法、提供一题的多种解法，并指出解题时易犯的错误。各章节配有一定数量的习题，并给予答案或提示。书末附录有选自一些高等院校研究生入学考试题的综合题以及有关集合及逻辑的基本知识。

本书可供有关科研、工程技术人员以及工科高等院校师生参考。

目　　录

第一章　一元函数微分学

§1.1　函　数

内　容　提　要

1.1.1　绝对值与不等式

1.绝对值的定义

$$|a|=\sqrt{a^2}=\begin{cases} a, & \text{当} a\geqslant 0; \\ -a, & \text{当} a<0。\end{cases} \tag{1-1}$$

2.绝对值的运算

$$\left.\begin{aligned} &||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b| \\ &|ab|=|a|\,|b| \\ &\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|} \end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

3.绝对值的性质

$$\left.\begin{aligned} &|a|\geqslant 0 \quad |a|^2=a^2 \quad |a|=|-a| \\ &-|a|\leqslant a\leqslant|a| \\ &|a|\leqslant r\Longleftrightarrow -r\leqslant a\leqslant r\ (r>0) \\ &|a|>A\Longleftrightarrow a>A \text{或} a<-A\ (A>0) \\ &a^2\leqslant b^2\Longleftrightarrow|a|\leqslant|b| \end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

4.不等式的性质

性质（1）　如果$a>b$，则$a+c>b+c$；

性质（2）　如果$a>b$并且$c>0$，则$ac>bc$；

性质（3）　如果$a>b$并且$c<0$，则$ac<bc$。

1.1.2　函数

1. 函数的概念

设X与Y是实数的两个集合，若按照某规律（法则）对于每一个$x\in X$，有唯一的数$y\in Y$与之对应，则说在集合X上定义了单值**函数**y，并记为

$$y=f(x)$$

集合X称为函数的**定义域**或**存在域**，集合$V=\{y \mid y=f(x), x\in X\}\subset Y$称为函数的**值域**。

如果对于x的每一个值对应着多个y值，则称这种函数为**多值函数**。

2. 反函数

设函数$y=f(x)$的定义域为X，值域为V。如果对于任何$y_0\in V$，都存在一个（或多个）$x_0\in X$，使

$$f(x_0)=y_0$$

这样，在V内就确定了单值（或多值）函数$x=\varphi(y)$，这个函数称为函数$y=f(x)$的**反函数**。反函数亦可记为

$$x=f^{-1}(y)。$$

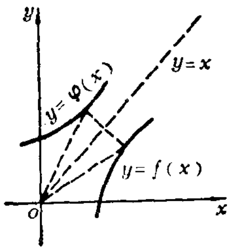


图 1-1

如仍以x表示自变量，y表示函数，把$x=\varphi(y)$写为$y=\varphi(x)$，则在同一坐标系里$y=\varphi(x)$与$y=f(x)$的图形对称于直线$y=x$（见图1-1）。

3. 复合函数、初等函数

设$y=f(u)$，而$u=\varphi(x)$。$u=\varphi(x)$的定义域是X，$y=f(u)$的定义域是U。如果存在$X_1\subset X$，当$x\in X_1$时，$u=\varphi(x)$的值域$U_1\subset U$。则y成为x的函数，记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

这个函数叫做由函数 $y=f(u)$及$u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，它的定义域为X_1，u叫做中间变量。

初等函数是能用一个分析式子表示的函数，而这个分析式子是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算以及有限次的函数复合步骤形成的。

4.有界函数

有上界：若存在常数M，使得当 $x\in X$ 时，$f(x)\leqslant M$，则称函数$f(x)$在X内为**有上界**的。

有下界：若存在常数m，使得当$x\in X$时，$f(x)\geqslant m$，则称函数$f(x)$在X内为**有下界**的。

有界：若存在常数m和M，使得当$x\in X$时，$m\leqslant f(x)\leqslant M$，则称函数$f(x)$在$X$内为**有界**的。

5.奇函数与偶函数

设函数$f(x)$在对称区间$(-l,\ l)$内有定义。

奇函数：若对于任何$x\in(-l,\ l)$，有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称$f(x)$是**奇函数**。

偶函数：若对于任何$x\in(-l,\ l)$，有

$$f(-x)=f(x)$$

则称$f(x)$是**偶函数**。

6.周期函数

设T为不等于零的常数，当$x\in X$时，$x+T\in X$且$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$是**周期函数**。如果存在 $f(x)$ 的一个正周期T_0，而满足$0<T<T_0$的任意T都不是$f(x)$的周期，则称T_0为$f(x)$的**最小正周期**。

7.单调函数

设$x_1\in X$，$x_2\in X$，如果$x_1<x_2$，有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$（$f(x_1)$

$\geqslant f(x_2)$），则称$f(x)$在X上是不减少（不增加）的函数。不减少与不增加的函数统称为**单调函数**。

若$x_1<x_2$，有$f(x_1)<f(x_2)$（$f(x_1)>f(x_2)$），则称函数$f(x)$是（严格）单调增加（减少）的。

解 题 示 例

1.绝对值与不等式

例 1 解下列不等式：（1）$-2<\frac{1}{x+2}<2$；（2）$(x-1)(x+2)<0$；（3）$0\leqslant\cos x\leqslant\frac{1}{2}$。

解 （1）当$x+2>0$时，原式变为：

$$-2(x+2)<1<2(x+2)$$

解右边不等式得$x>-\frac{3}{2}$；解左边不等式得$x>-\frac{5}{2}$。故所求不等式的解，应为它们的公共解，即$x>-\frac{3}{2}$。

当$x+2<0$时，原式变为

$$-2(x+2)>1>2(x+2)$$

其解为$x<-\frac{5}{2}$。

故原不等式的解为：$\left\{x\mid x<-\frac{5}{2}\right\}\cup\left\{x\mid x>-\frac{3}{2}\right\}$。

（2）两因式相乘为负数，两因式符号必相反，即

$$\begin{cases}x-1<0\\x+2>0\end{cases}\qquad(a)$$

或

$$\begin{cases}x-1>0\\x+2<0\end{cases}\qquad(b)$$

解不等式组（a），其解为：$-2<x<1$；

不等式组(b)无解。

故原不等式的解为：$-2<x<1$

（3）当$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right]$时，$0\leqslant\cos x\leqslant\frac{1}{2}$。由于$\cos x$的周期为$2\pi$，故原不等式的解为：

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi-\frac{\pi}{3}\text{或}\ 2k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

（$k=0,\ \pm1,\ \cdots$）。

例 2 解下列不等式：（1）$0<(x-2)^2\leqslant4$；

（2）$\left|\frac{x-2}{x+1}\right|>\frac{x-2}{x+1}$。

解 （1）因为$\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$，所以（1）变为：$0<|x-2|\leqslant2$。而$|x-2|$只在$x=2$时为零，所以$|x-2|>0$即为$x\neq2$。因此原不等式等价于

$$\begin{cases}x\neq2\\|x-2|\leqslant2\end{cases}$$

而$|x-2|\leqslant2$的解为$0\leqslant x\leqslant4$，从其中除去$x=2$，便得原不等式的解，即

$$\{x|\ 0\leqslant x<2\}\cup\{x|\ 2<x\leqslant4\}$$

（2）因为

$$\left|\frac{x-2}{x+1}\right|=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+1} & \left(\dfrac{x-2}{x+1}\geqslant0\right)\\[2ex]-\dfrac{x-2}{x+1} & \left(\dfrac{x-2}{x+1}<0\right)\end{cases}$$

所以题设不等式成为

① $\frac{x-2}{x+1}>\frac{x-2}{x+1}\qquad\left(\frac{x-2}{x+1}\geqslant0\right)$， ② $-\dfrac{x-2}{x+1}>\dfrac{x-2}{x+1}$ $\left(\dfrac{x-2}{x+1}<0\right)$;

显然，①无解。而②成立的条件是：$\dfrac{x-2}{x+1}<0$，即

$$\begin{cases}x-2<0\\x+1>0\end{cases} \tag{a}$$

或

$$\begin{cases}x-2>0\\x+1<0\end{cases} \tag{b}$$

不等式组(a)的解为$-1<x<2$，不等式组(b)无解。

故原不等式的解为：$-1<x<2$。

例 3 证明柏努利（Bernoulli）不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx \quad (x>-1) \tag{1-4}$$

对自然数$n\geqslant 2$都成立（等号只在$x=0$时成立）。

证 与n有关的命题，均可试用归纳法证明。

当$n=2$时，$(1+x)^2=1+2x+x^2\geqslant 1+2x$（因$x^2$是非负数），故$n=2$时命题正确（等号只在$x=0$时成立）。

设$n=k(\geqslant 2)$时命题正确，即

$$(1+x)^k\geqslant 1+kx$$

则$n=k+1$时，有

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1}&=(1+x)^k(1+x)\geqslant(1+kx)(1+x)\\&=1+(k+1)x+kx^2\geqslant 1+(k+1)x\end{aligned}$$

（k为正整数，x^2是非负数）

且等号只在$x=0$时成立。

故对任何$n\geqslant 2$的自然数，不等式成立。

2.函数的定义域

当函数由分析式子表示时，若未指明自变量的变化范

围，则把使分析式子有意义的自变量的全体，理解为这函数的定义域。

本书所讨论的对象是实数，自变量及函数值都只能取实数值。所以在求函数的定义域时，凡使函数没有意义或不为实数的自变量值都应除去。例如，函数的表示式中，若含有偶次方根 $\sqrt[2n]{\varphi(x)}$，则使 $\varphi(x)<0$ 的 x 值应除去；含有对数式 $\ln\psi(x)$ 时，则使 $\psi(x)\leqslant 0$ 的 x 值应除去；含有分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 时，则使 $Q(x)$ 为零的那些 x 的值应除去；含有 $\arcsin\theta(x)$ 时，则使 $|\theta(x)|>1$ 的 x 值应除去等等。

例 4 求下列函数的定义域：

（1）$y=(x-2)\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$；（2）$y=\lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$；

（3）$y=\sqrt{\lg(x-5)}$；

（4）$y=\sqrt[4]{6x^2+7x+2}+\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$。

解 （1）因式 $x-2$ 对于 x 的任何值都有意义，$\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$ 只在 $x\neq 1$，且 $\dfrac{x+1}{1-x}\geqslant 0$ 时，才取实数值，因此，所求函数的定义域应是下列不等式组的解：

$$\begin{cases}x+1\geqslant 0\\1-x>0\end{cases}\quad 或 \quad\begin{cases}x+1\leqslant 0\\1-x<0\end{cases}$$

即 $-1\leqslant x<1$。

（2）要使对数取实数值，真数必须大于零，故所求函数的定义域由不等式 $\sin\dfrac{\pi}{x}>0$ 确定，该不等式成立的条件为：

$$2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

以下就k的情况来讨论x的取值范围：

当$k=0$时，$0<\frac{\pi}{x}<\pi$，即$1<x<+\infty$

当$k>0$时，$2k<\frac{1}{x}<2k+1$，x为正数，故

$$\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k} \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

当$k<0$时，$2k<\frac{1}{x}<2k+1$　　（此时x为负数），即

$$\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}(k=-1,\ -2,-3,\cdots)$$

故所求函数的定义域为$\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left\{x\ \middle|\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}\right\}$，当$k=0$时，集合$\left\{x\ \middle|\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}\right\}$理解为集合$\{x|1<x<+\infty\}$。

（3）x所取的值必须使$\lg(x-5)\geqslant0$，即$x-5\geqslant1$，因此$x\geqslant6$为所求函数的定义域。

（4）由$\sqrt[4]{6x^2+7x+2}$，应$6x^2+7x+2=(3x+2)\times(2x+1)\geqslant0$，解之得$x\in\left(-\infty,\ -\frac{2}{3}\right]\cup\left[-\frac{1}{2},\ +\infty\right)$。

由$\arcsin\frac{2x}{1+x}$，应

$$-1\leqslant\frac{2x}{1+x}\leqslant1,\ x\neq-1 \qquad (a)$$

当$x<-1$，即$x+1<0$时，不等式组(a)变为$-(1+x)\geqslant2x\geqslant1+x$，无解；

当$x>-1$，即$x+1>0$时，不等式组(a)变为$-(1+x)$

$\leqslant 2x\leqslant 1+x$，其解为$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$。

故所求函数的定义域为：$x\in\left\{\left(-\infty,\ -\frac{2}{3}\right]\cup\left[-\frac{1}{2},\ +\infty\right)\right\}\cap\left[-\frac{1}{3},\ 1\right]=\left[-\frac{1}{3},\ 1\right]$

3.求函数值

例 5 设$f(x)=(|x|+x)(1-x)$，求使下列关系成立的x值：（1）$f(x)=0$；（2）$f(x)<0$。

解 （1）要使$f(x)=(|x|+x)(1-x)=0$，必须至少有一因式为零，即$|x|+x=0$或$1-x=0$，而$|x|+x=0$的解为$x\leqslant 0$。

故当 $x\leqslant 0$或$x=1$时，$f(x)=0$。

（2）要$f(x)=(|x|+x)(1-x)<0$，必须两因式异号，即$|x|+x>0$，且$1-x<0$或$|x|+x<0$，且$1-x>0$。因$|x|+x<0$无解，故仅当$|x|+x>0$且$1-x<0$时，即$x>1$时，才能使$f(x)<0$。

例 6 设$f(x)=ax^2+bx+c$，证明 $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0$。

证 如用u表示x，则$f(u)=au^2+bu+c$，当$u=x+3$，$x+2$，$x+1$及x时，分别算出相应的$f(u)$，经过简单的计算，可得：

$$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0$$

例 7 设$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$ $(x>0)$，求$f(x)$。

解 将函数的自变量用u表示，即$f\left(\frac{1}{u}\right)=u+\sqrt{1+u^2}$ $(u>0)$。设$u=\frac{1}{x}$，因为$u>0$，所以$x>0$，$\sqrt{x^2}=x$，