

生活与科学文库

头发的根数

钟表针的更换

老师的怪癖

数学奥林匹克问题

用三个空瓶换一瓶

1000万日元的幸运

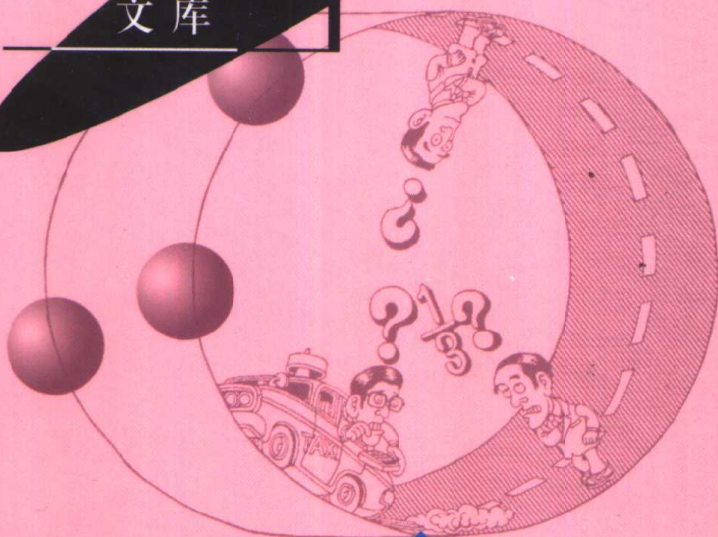


田村三郎 著

〔日〕藤村幸三郎

趣味数学入门

生活与科学
文库



科学出版社

生活与科学文库

趣味数学入门

(日) 藤村幸三郎 著
田村三郎
周尚文 译
鲁增贤 杨波 审校

科学出版社

「パブル数学入門」藤村幸三郎 田村三郎

©Kozaburo Fujimura/Saburo Tamura

All right reserved

First published in Japan in(1977) by Kodansha Ltd. Tokyo

Chinese version published by Science Press

Chinese Academy of Sciences

Under license from Kodansha Ltd.

本书据日本讲谈社 1997 年第 14 次印刷版译

图字:01-2000-0051

图书在版编目(CIP)数据

趣味数学入门〔日〕藤村幸三郎,田村三郎著;
周尚文译.-北京:科学出版社,2002
(生活与科学文库)

ISBN 7-03-009591-X

I.趣… II.①藤… ②田… ③周… III.数学-
普及读物 IV.O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 038410 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

定价:11.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

沿此斜线剪下一角，收集10枚，寄至科学出版社发行处，将寄赠您选定的本套丛书中的一本。



内 容 简 介

◎ 本书共分十个部分。每部分首先介绍一个有趣的游戏，通过这个游戏，引出在游戏中用到的数学思想和数学方法。接着又提出一些我们实际生活中遇到的小问题，并和读者一起用这些数学思想、数学方法来解决这些问题。每部分最后还提供了一些有趣的练习，供读者独立地解决一些生活中的小问题。

本书读者为具有初中以上文化程度度的所有数学爱好者。

(Z-0374.0101)

责任编辑◇杨 波

封面设计◇王 浩

如果把在从东京到京都的新干线上奔驰比作在教室里学习数学,那么数学游戏就好比乘坐在旅游列车上轻松地愉快旅行。

数学这门学问是完美而井然有序的理论体系。要想不走弯路,按照其体系顺序健康发展,从教学方面来说,最大的愿望是尽量选定恰当的目标,花费尽量少的时间和精力走捷径。与此相反,从学习的另一侧面来说,只是无目标地往里装知识,是不会产生什么激情的,就好像是嚼沙子一样枯燥无味。总之,这样对学习数学感到很吃力是可想而知的。

数学的理论体系并非一开始就是那么完美无缺的。为了创建这个体系很多先哲进行了大量的努力,在不断探索的过程中历经了千辛万苦。另一方面,在这个进程中也感受到在很多发现和发明中的无穷乐趣。所以在学习数学中,我们也追踪一下相同的过程,使我们一开始就能够从内心深处感受到数学是一门趣味性很深的学问。但是遗憾的是在现在

的教育制度下,似乎没有时间能够慢慢地品味数学的奥妙.

在这本书中,采纳的数学游戏正是为了弥补以上的不足,这的确是切实有效的好素材,可能有的读者单纯地把游戏抽出来进行解答,从上面谈到的理由来看,我认为能够真正地理解数学性的基本观点、掌握数学方法这才是最根本的.总而言之,就是从不断摸索中培养自己独立的思考能力,形成自己的学习风格这才是最重要的事情.

人们常常因为引用例子费尽心思,据说概率论最初就是从赌博开始的.赌博当然不同于游戏,但是其巧妙之处就像游戏那样能引起人们强烈的好奇心.数学学者用之取得以上研究结果并开辟了数学的一个重要分支.

最近一个很好的例子,就是到目前为止有的问题虽属于难题范围,但随着计算机的开发利用,促使信息理论的研究也有了长足的进展.将来必定在那些问题的某些方面得到较大的发展.总之,能够引起读者对未知的东西倾注以浓厚的兴趣是作者的最大欣慰.

藤村幸三郎
昭和 51 年 12 月

目 录

I 基础游戏	1
游戏内容(1)	
游戏的考虑方法	
(A)一一对应 (B)简单化,图形化 (C)二值化,二分法 (D)反例 (E)反证法 (F)房屋分割论法 (G)数学归纳法	
(问题1)板状巧克力 (问题2)人事组阁 (问题3)追赶女友 (问题4)宴会上的握手 (问题5)头发的根数 (问题6)朋友数(问题7)秃头	
练习内容(1)	
II 算术游戏	33
魔术内容(1)	
行驶问题计算法	
(问题8)忘掉东西 (问题9)平均速度 (问题10)往返路程 (问题11)出租车费 (问题12)错装钟表针 (问题13)围棋会 (问题14)做俳句	
练习内容(2)	
III 代数游戏	50
游戏内容(2)	
速算法	

(问题 15)什么是十二生肖 (问题 16)失常的天平 (问题 17)划分表盘 (问题 18)井的深度 (问题 19)用三个空罐换一罐饮料 (问题 20)和差积商 (问题 21)有理数和无理数

练习内容(3)

IV 整数游戏 69

魔术内容(2)

去九法

(问题 22)昭和年号和公元年号 (问题 23)丢番图的墓碑
(问题 24)平方数 (问题 25)覆面算 (问题 26)各位数的积 (问题 27)数列的和 (问题 28)余数定理

练习内容(4)

V 图形游戏 88

游戏内容(3)

证明的发现

(问题 29)植树 (问题 30)两色地图 (问题 31)三个正方形 (问题 32) $2\angle A = \angle B$ (问题 33)角的大小 (问题 34)数学奥林匹克问题 (问题 35)三角形的面积

练习内容(5)

VI 组合游戏 106

魔术内容(3)

棋盘格的路径

(问题 36)散步道 (问题 37)禁止通行 (问题 38)付款方式 (问题 39)多边形的分割 (问题 40)相交直线 (问题 41)三角形游戏

练习内容(6)

VII 概率问题 124

游戏内容(4)

约定

(问题 42)是男还是女 (问题 43)老师的陋习 (问题 44)

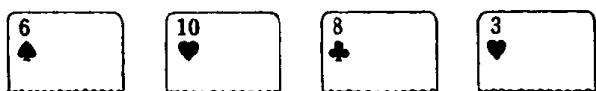
四坏球 (问题 45)情书 (问题 46)玩升官图游戏 (问题 47)出生日的一致 (问题 48)是奇数还是偶数	
练习内容(7)	
VIII 理论难题	143
魔术内容(4)	
记号化的语言	
(问题 49)比智慧 (问题 50)轻浮的妻子 (问题 51)红白帽子 (问题 52)说谎俱乐部 (问题 53)1000 万日元的幸运 (问题 54)正直菩萨和说谎菩萨 (问题 55)奇妙的对偶	
练习内容(8)	
IX 几种游戏	161
游戏内容(5)	
转盘子	
(问题 56)世界历史测验 (问题 57)混合双打比赛 (问题 58)首领的存在 (问题 59)六个棒球队 (问题 60)草席的铺法 (问题 61)会议地点的设定 (问题 62)连接城市	
练习内容(9)	
X 难解游戏	181
魔术内容(5)	
计算机和游戏	
(A)3 倍加 1 (B)逆顺的和 (C)覆面算	
(问题 63)积的数字根 (问题 64)50 厘米的尺子 (问题 65)变形魔方阵 (问题 66)单调递增数列 (问题 67)绕顶点 (问题 68)黑白三角形 (问题 69)三等分点代数学	
练习内容(10)	
XI 未解决的难题	201

I 基础游戏

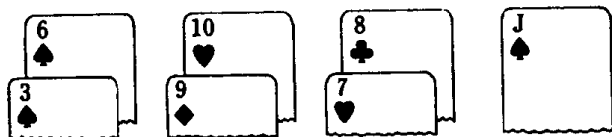
本章采纳的游戏都很简单，恐怕不用看后面的答案就能立即知道问题的解。但是，解答问题的思维方式是非常重要的。后面的问题也反复地采用同样的方式考虑。在这个意义上，它是很基础的东西。

游戏内容(1)

[扑克牌算命] 这是一个人玩的扑克游戏，除去大小王两张牌，将剩下的 52 张纸牌洗好拿在手里，首先将 4 张横向排成一排。



如果在它们中间有相同花色的牌，将较小的牌去掉(花色上面的数字，以 A 为最大)。在上图中和红桃 10 相比就应去掉红桃 3，然后稍微错开一些再补上一排(右端只有一张)。



右端和左端相比去掉黑桃 3，再比较右端和左端将黑桃 6 也去掉。向左端的空位移动方块 9 和红桃 7

中的一张.如果移动方块 9,那么将红桃 10 和红桃 7 比较,就可以把红桃 7 去掉.(如果移动红桃 7,因为没有牌能去掉,这就受损.可以移动与上面牌相重合的相同花色的牌.)因为在上面积列的牌都是不同花色的牌,所以按照上面的方法再排列出 4 张牌进行比较.

这样一来,依次把能去掉的牌去掉.如果最后只剩下 4 张 A 排成一排,就是最好的情况,若手里剩下的牌越多,就表示运气越不好.

游戏的考虑方法

游戏是很有趣的,寻求其有趣的原因,主要有以下几个方面,即问题本身的趣味性、解决问题时的趣味性、解决问题方法的美妙性和问题结果的意外性等.

一般来说,大多数游戏书是将问题本身的趣味性及其结果的意外性等放在重要位置.而以“游戏”为素材,引导人们“数学入门”是本书的目的,为此我想把“解决问题的趣味性”和“解决问题方法的美妙性”作为本书的重点.

所以,关于游戏中应用数学独特的思维方法,我想举一些实际例子加以说明.

(A) 一一对应

假如要想知道给某房间配者多少把椅子,那么只需将放在该房间的椅子数和这个房间中的人数进行比较,而没有必要将椅子数和人数分别去数一遍.要求一把椅子上只坐一个人,很明显,全体都坐着,若椅子有余,说明椅子多;若没有空椅子,并且有站着的人,那就是人多.另外,若房间中的人全部坐着,没有空椅子,椅子和人都是一个与一个对应(一一对应)着的,可知椅子的个数和人数是相等的.

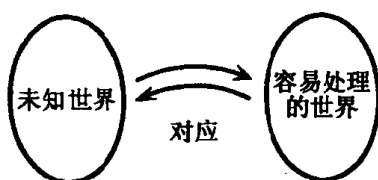
对于不能数很大数的尚未开化的人来说,即使只用两只手的指头也能准确地约定好经过几天(10日后)见面的事,这是因为使指头的根数与天数一一对应的缘故。

很明显,比起一个个数(数的概念)来说,按照一一对应的考虑是最基本的方法.也许有人认为,对于我们来说无论多么大的数都能够任意地数.没必要考虑这类幼稚的一一对应问题,然而一一对应的方法却在破解游戏以及考虑数学问题方面是非常方便的.为此举这样一个例子。

例题 1 织田信长命令下属:“你们数一下这个杉树林一共有多少棵树?”有一位下属就一棵,二棵……这样地数下去,可是不一会就数乱了,然而另一位叫木下藤吉郎的下属想出了一个准确地数树的好方法,于是得到了信长的表扬.那么藤吉郎是用什么方法数的呢?

恐怕读者很快就领悟到了吧.其做法就是先准备好 1000 根绳子,让部下分别往树上系绳子,

最后数一下剩下的绳子,用 1000 减去剩下绳子的根数立即就会知道树的棵数了。



这就是用杉树和绳子一一对应的方法,代替了直接数杉树的基本法.这样一来,当直接数某物的个数遇到困难时,我们就可以根据与该物的某种一一对应关系很容易得到这种难数物的数量。

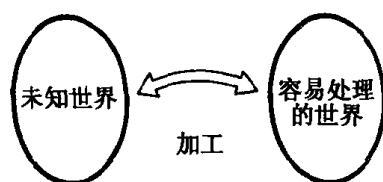
例题 2 昭和 51 年夏季,在甲子园有 41 所学校参加棒球比赛,樱美林高中最后获得冠军,问总共进行了多少场比赛?需要说明的是,没有出现平局,并且,比赛采取的是淘汰制.

也许有人这样想,没有比赛的编组根本无法判断,然而比赛次数与编组方式是无关的.因为不能出现平局,只要比赛,在比赛中就有输的队,于是在比赛中输队和赢队是一一对应的,而且因输队数是从出场比赛学校中除去胜队后剩下的 40 个队,所以所求的比赛次数就是 40 次.

一一对应的考虑方法不仅在解游戏问题中用到,而且在研究数学问题中也常常用到.不仅数有限个东西常用到,而且数无限个东西时也常被有效地利用.

(B)简单化,图形化

在解游戏或数学问题时,有时要将解决的问题整理成数学式子,作成图或列出表格进行表示.这样做相当于把问题简化成为容易处理的形式.就像解释“一一对应”时所叙述过的那样,直接面对容易处理的世界.在研究清楚各种关系的基础上,再返回到开始的未知世界,未知世界就会得到认识.



如果能把内容简单化、抽象化,就会使问题变得非常容易处理了.如果把问题能抽象为数学式子的形式,剩下的就只需利用数学式子的变形术——代数了.如果能把问题表现为图形,就能够进行直观的分析,研究起来就非常容易.有时只需将问题整理成为表格的形式就能解决它.

例题 3 突然下起雨来了,可是没带雨伞,遇到这种情况时你该怎么办呢?

这个问题是形成数学问题以前的一个素材,一般的教科书中和考试卷中出现的数学题,都是由出题者把问题加以抽象使问题变成能够解的数学形式,就是所谓的“数学问题”。

由于大家所见到的往往是按照某种方法归纳整理出来的数学问题. 所以从某现象中抽象出数学内容,自己造数学问题不那么容易。

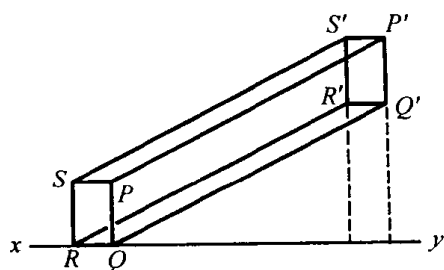
在上面的问题中,为了应付这一事件,不外乎是等待雨停啦、钻到别人的伞下面啦、打电话让家人送伞来之类的解决方法。

但是,这类情况全都可以不考虑,请想像广阔的田野中只有你一个人的情况,进行这样虚构的想像就是抽象化的一种。

而且假定当时没有风,一直下同样大的雨,并且把跑起来精神舒畅、被淋湿时的惨状之类的感情性因素也去掉. 跑起来以后气喘吁吁的情况,飞溅起来的泥水把衣服弄脏的情况也都不考虑. 这样一来将比较难处理的方面全部去掉,最后仅仅剩下的就是考虑跑起来湿的程度是不是很低的问题了. 由于人体的形状很复杂,严格计算处理起来非常困难,所以,为了研究方便,把人体看作是长方体,并且因为身体倾斜的程度不同,被雨点打湿的状态也要发生变化,为此采取身体一直保持竖直,像长方体一样立着以水平方向移动。

问题的意义终于明确了,这样一来问题就变成下面的样子,在无风的情况下,雨以相同程度不断地下着,人处在广阔田野中被雨淋着。

长方体在移动,雨也在不断地从上而下地降着,对于这样的考虑自然很难处理.为此认为出发时空中某处的雨保持原有的状态停止不动,用静止的雨滴表示向长方体降落下来的雨滴.恰似该长方体面向天空往静止在空中的雨滴中奔跑那样.



这个图是长方体沿着平行方向移动时的断面图.这里的长方体就是前进的距离乘以长方形 $PQRS$, 因为前进

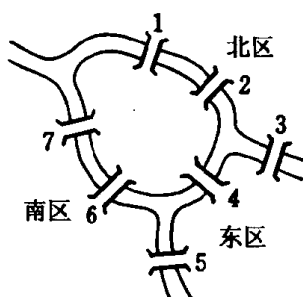
的距离是一定的,把它看作为 1 而不考虑,即相当于把人体看作是长方形 $PQRS$.

那么到了目的地时,落下来的雨滴,开始应该是在空中 $P'Q'R'S'$ 处遇到的雨滴.因此,从出发点到目的地移动期间落下来的雨滴,可以视为长方形移动的面积——平行四边形 $P'Q'QP$ 和平行四边形 $P'PSS'$ 面积之和.

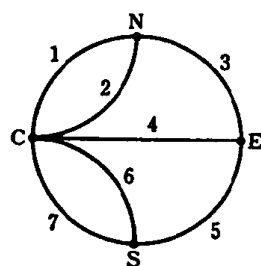
可是,平行四边形 $P'Q'QP$ 的面积是一定的,与平移速度快慢没有关系(因为平行四边形 $P'Q'QP$ 的面积是 PQ 乘上甲和乙之间的距离).而平行四边形 $P'PSS'$ 随着移动速度的加快高度降低,因而面积就减少了.

结果,落在身体前面的雨,即使移动速度发生变化也是一定的.而淋到头上的雨移动速度越快越少.所以整体移动速度越快湿得越少.

例题 4 在哥尼斯堡,有一条叫帕瑞格尔河流过市中心.为此在河上面架设了 7 座桥,要求同样一座桥只通过一次,那么依次通过这 7 座桥应怎样通过呢?



用点表示这类渡桥问题的四个地区.若以线表示桥,那么就可以画成一个很简单的图形(我们把这个图形称做是线族).于是,要想每个桥都只通过一次,就相当于让线族中的每条线只通过一次.所以,渡桥的问题就成了所谓的“一笔画线”问题了.



对于用一笔画线族来说,必定有开始画点(始点)和终了画点(终点).除此以外的点(中途点),因为只要有任何入线的话必定有出线,所以在中途点处集中的线一定是偶数(某点处汇集的线数是偶数、奇数时,就把那个点称为偶点或奇点).于是,中途的点都是偶点,因为当始点和终点相同时,那个点也是偶点,所以线族全部都是偶点.始点和终点不相同时,只有始点和终点是奇点,其他全部都是偶点,所以奇点只有两个,从这一点来看,用一笔画的线可以叙述如下: (*) 可用一笔画的线族的奇点数只能是 0 个或 2 个.

因将哥尼斯堡七桥问题变为所画的线族,有四个奇点,按照 (*) 的结论可知这个线族用一笔是画不出