高等数学辅助教材

高等数学解题指导

许闻天　崔玉泉　蒋晓芸　主编

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指导/许闻天，崔玉泉，蒋晓芸主编．济南：山东大学出版社，2001.8

ISBN 7-5607-2340-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．①许…②崔…③蒋…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 060676 号

山东大学出版社出版发行

(山东省济南市山大南路 27 号　邮政编码：250100)

山东省新华书店经销

济南新华印刷厂印刷

787×1092 毫米　1/16　16.75 印张　378 千字

2001 年 8 月第 1 版　2001 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—7300 册

定价：22.00 元

序

数学的发展可以归结为其基本问题的提出、尝试与解决。学习数学最有效的方法是通过演练一定数量的习题来洞悉前人的思想，从而提高独立解决问题的能力。正如P. Halmos总结的那样:“问题是数学的中心。”

高等数学是当代大学生应该具备的重要素养之一。山东大学理、工、医科学生的全部，以及文科学生的绝大多数都必修高等数学课程。在教学过程中迫切需要一本指导书，帮助学生掌握正在学习的数学内容。为此，许闻天、崔玉泉、蒋晓芸三位老师在多年教学经验的基础上编写了这本书。我相信本书对广大学生会大有裨益，所以很高兴为之作序。

展涛

2001.5.15

前　言

高等数学是各专业一门重要的基础课。它不仅是学习其他专业的重要工具，同时也能使学生通过数学知识和方法的学习，获得理性思维的训练和数学美的享受，对培养和提高学生综合素质及能力具有重要意义。在高等数学的学习中，学生要理解基本概念，掌握基本理论，还要通过解题训练培养分析能力，体会数学思维的方法，这是保证和提高教学质量的一个至关重要环节。但是，数学思维方法的领会、分析问题能力的加强和解题水平的提高，仅仅靠阅读教材是不能完全满足这方面的需要，还必须通过课外解题以及习题课等多方面的总结归纳和动手训练。要做到这一点，需要有一本能帮助学生就整个学习内容进行复习、归纳和深化的书籍，它既有对基本内容简明扼要的总结，又有关于各种数学方法的综合；既有对数学思维的剖析，也有关于解题的启示；既能突出每部分的重点，又有关于各部分之间相互联系的分析。为此我们结合多年来从事高等数学及习题课教学的经验和长期积累的资料，编写了这本高等数学解题指导，供教师和学生参考使用。

本书根据教育部有关非数学类高等数学教学要求编写而成，对高等数学的内容和方法作了比较系统的总结和概括。全书共十四章，每章由目的要求、内容提要、例题与分析、练习题四部分组成，每章都配合教材内容，在内容提要中扼要的叙述了各章的基本概念、定理、公式等，帮助学生将所学知识进行整理与归纳，选编的例题均为典型题目，除对例题进行了分析与详解外，还给出了解同类题目的一般方法及注意事项，题目难易适度，紧扣课本，是对书本知识的进一步巩固和加深，每章后面的练习是为帮助学生进一步了解和运用各章基本内容与方法而选配的，既有一般用以所学基本知识的练习题，也有一定难度的智力型综合练习题，书中附有练习题答案、模拟试题和 2001 年全国研究生入学考试的试题各一套，并给出了参考答案，可供学生自测和参考。

本书作者是多年来从事高等数学及习题课教学的老师，由许闻天教授统稿，在编写过程中我们参考了数学院有关老师编写的研究生入学考试数学参考材料，得到数学与系统科学学院羊丹平院长、刘建亚院长等领导的大力支持，刁在筠、徐加义、曹惠中、刘保东等老师也提出许多宝贵意见，另外，本书的出版还得到了山东大学出版基金和山东大学出版社的大力支持。对此表示衷心的感谢。

本书在正式出版前，已在山东大学1999 级和2000 级教学中试用，反映良好。经过补充完善后，现在正式出版。但由于时间仓促，缺点与疏漏，在所难免，恳望广大读者批评指正。

编　者

2001 年3 月

《高等数学解题指导》编委会

主　编：许闻天　崔玉泉　蒋晓芸

参编人员：察可文　李汝修　郭　环　高寒振　华玉爱
张秀丽　谢　波　窦方军　徐风林　徐恭学
刘爱奎　杨昌兰　方梅仙　娄永年　王镇英
张焕英　王　妍　吴　强　王　倩　王照明
潘建勋　杜世田　韩国平　郑修才　张天德
王　玮　刘华雯　李久平　孙庆华　戎晓霞
朱冬梅　孙儒军　叶　宏　李乐学　赵华祥
马克颖　徐加义　崔　明　秦　静　崔明荣
刘　扬　吴　臻　贾广岩　张玉海　史玉明
刘蕴贤　马树萍　刘保东

目　　录

第一章　函数、极限、连续

一、目的要求

（1）掌握函数的概念和性质，掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念.

（2）理解复合函数、隐函数、分段函数以及反函数的概念.

（3）掌握极限的概念和性质，理解左、右极限的概念以及极限存在与左、右极限之间的关系.

（4）掌握无穷小、无穷大的概念及其性质

（5）掌握函数连续（在一点 x_0 处连续以及连续函数）的概念，理解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质.

（6）会讨论有关定义域，函数值，函数表达式以及复合函数的问题，会建立简单应用问题中的函数关系式.

（7）熟练掌握极限的四则运算法则和两个重要极限，掌握极限的两个重要准则，能熟练运用上述结论以及等价无穷小，复合函数的极限公式等求各种极限.

（8）会利用定义讨论函数的连续性，会判断函数的间断点，会应用闭区间上连续函数的性质讨论问题.

二、内容提要

（一）重要概念

1. 函数的概念

（1）函数　设有两个变量 x 和 y，如果对于区间 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则，变量 y 都有一个确定的值与之对应，则称变量 y 是 x 的函数，记作

$$y = f(x), \qquad x \in D.$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，而 D 称为这个函数的定义域.

因此，函数概念的两个要素是定义域和对应关系，函数的表示只与定义域和对应关系有关而与使用什么字母无关.

（2）反函数　设 y 是 x 的函数 $y = f(x)$，若把 y 当作自变量，x 当作因变量，即由关系式 $y = f(x)$ 确定的新函数 $x = \varphi(y)$ 称为原来函数 $y = f(x)$ 的反函数. 由于习惯上记 x 为自变量，y 为因变量，故 $y = f(x)$ 的反函数常记作 $y = \varphi(x)$ 或 $y = f^{-1}(x)$，原来函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

（3）基本初等函数　常量函数 $y = c$，幂函数 $y = x^{\mu}$，指数函数 $y = a^x$，$(a > 0, a \neq$

1) 对数函数 $y=\log_a x$ 以及三角函数、反三角函数这六类函数统称为基本初等函数.

对基本初等函数,要掌握它们的定义域、图形、基本性质和主要公式.

(4) 复合函数　若对由函数 $u=\varphi(x)$ 确定的变量 u 的值,通过函数 $y=f(u)$ 有确定的 y 值与之对应,从而得到的一个以 x 为自变量,y 为因变量的函数,称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,记作

$$y=f[\varphi(x)] \quad \text{或} \quad y=f(u),u=\varphi(x)$$

其中 u 称为中间变量.

某些复合函数是由基本初等函数多次复合而成.

(5) 初等函数　由基本初等函数经过有限次四则运算以及复合所构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数.它是高等数学课程中讨论的主要对象.

(6) 隐函数和分段函数　由因变量未解出的方程所确定的函数称为隐函数.

在自变量的不同变化范围内,对应法则用不同式子来表示的函数,称为分段函数,常见的分段函数:

① $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0; \\ -x, & x<0. \end{cases}$

② 符号函数　$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1, & x>0; \\ 0, & x=0; \\ -1, & x<0. \end{cases}$

2. 数列极限的定义

对给定的数列$\{x_n\}$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A \iff \forall\, \varepsilon>0,\exists$ 一个正整数 N,使对 $n>N$ 的一切 x_n,恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$.

3. 函数极限的定义

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \iff \forall\, \varepsilon>0,\exists$ 一个正整数 M,当 $|x|>M$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ (或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$) $\iff \forall\, \varepsilon>0,\exists$ 一个正整数 M,使当 $x>M$(或 $x<-M$) 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \iff \forall\, \varepsilon>0,\exists\, \delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

(4) 左、右极限　$f(x)$ 在 x_0 的左极限记成 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$,

$f(x)$ 在 x_0 的右极限记成 $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

它们的定义是:

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ (或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$) $\iff \forall\, \varepsilon>0,\exists\, \delta>0$,当 $-\delta<x-x_0<0$(或 $0<x-x_0<\delta$) 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

函数极限和左、右极限的关系是

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \iff f(x_0-0)=f(x_0+0)=A.$$

该等价性常用来判断分段函数在分段点处是否有极限

(5) 函数极限与数列极限的关系　$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \to \lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$.

4. 无穷小量与无穷大量

(1) 无穷小量　在自变量 x 的一定趋势($x\to x_0$ 或 $x\to\infty$)下,如果变量 $\alpha(x)$ 的极限为零,则称 $\alpha(x)$ 为这种变化趋势下的无穷小量,可记为 $\alpha(x)=o(1)$ ($x\to x_0$ 或 $x\to\infty$).

(2) 无穷小量的阶　设 $\alpha(x),\beta(x)$ 都是自变量 x 在同一变化趋势下的无穷小量,如果

$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小,记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$,

$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c,(c\neq 0)$,则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶的无穷小,记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$,

$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小量,记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$,

$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=c,(c\neq 0)$,则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小量,亦可记为 $\alpha(x)=o(\beta^k(x))$,

$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$,(或 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$),则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小量.

(3) 无穷大量

任意大的 $G>0$,$\exists\ \delta>0$,使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)|>G$,则称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷大量.

显然,不为零值的无穷小量的倒数是无穷大量,反之,无穷大量的倒数是无穷小量.

5. 连续的概念

(1) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义,如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

上述定义也可表述为:$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$,使当 $|x-x_0|<\delta$ 时,恒有.

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

由上面定义可知,函数在点 x_0 连续有三个要求:

① $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域(包括 x_0)内有定义;

② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,

③ $f(x)$ 在 x_0 的函数值恰等于极限值,即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

(2) 左连续和右连续　设 $\delta>0$ 为某一任意小的正数,若 $f(x)$ 在 x_0 的左邻域 $(x_0-\delta,x_0]$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续. 类似可定义函数 $f(x)$ 在 x_0 点右连续.

显然,$f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在点 x_0 左连续且右连续.

(3) 函数 $f(x)$ 在区间上连续的概念　设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有定义且 $\forall\ x_0\in(a,b)$,恒有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续,或 $f(x)$ 是 (a,b) 内的连续函数.

如果函数 $f(x)$ 在(a,b)内连续且在左端点 $x=a$ 处右连续，在右端点 $x=b$ 处左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，或 $f(x)$ 是闭区间$[a,b]$上的连续函数.

*(4) 一致连续的定义　设$f(x)$在某区间D上有定义，如果对于预先给定的任意小的正数ε，总存在一个正数δ，使在区间D上任意两点x_1,x_2，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(x)$ 在该区间上一致连续.

(5) 函数的间断点　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处，(1) 中三个要求中有任何一个不满足，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，点 x_0 称为 $f(x)$ 的间断点.

其中，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在但不相等，或$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点，后者又称为可去间断点.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 中至少有一个不存在，则称x_0为$f(x)$的第二类间断点，若其中至少有一个是 ∞，则又称为 $f(x)$ 的无穷间断点.

(二) 重要性质

1. 函数 $f(x)$ 的性质

(1) 奇偶性　设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，如果 $\forall\, x\in D$，恒有 $f(x)=f(-x)$(或 $f(x)=-f(-x)$)，则称 $f(x)$ 为区间 D 上的偶函数(或奇函数).

显然，函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若定义域关于原点不对称，则该函数就 不具有奇偶性. 另外，从函数的图像看，偶函数关于 y 轴对称，奇函数关于坐标原点对称.

(2) 周期性　设函数 $f(x)$ 在区间D上有定义，若存在一个与x无关的正数T，使对任一$x\in D$，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，并且通常把满足关系式的最小正数称为函数 $f(x)$ 的周期.

若 $f(x)$ 的周期是 T，则函数 $f(ax+b)$ 亦是周期函数，周期为$\dfrac{T}{|a|}$，并且若 $f(x)$，$g(x)$ 分别是以 T_1,T_2 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1,T_2 的最小公倍数为周期的周期函数.

(3) 有界性　设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，如果存在 $M>0$，使对一切 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 D 上有界，否则，$f(x)$ 在 D 上无界.

注意，函数 $f(x)$ 有界或无界是相对于某个区间而言，无穷大量是相对于某一点的一个变化过程，因此是不同的概念，$f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 的必要条件，而$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域无界的充分条件. 例如函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1]$上无界，但当 $x\to+0$ 时，$y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不是 ∞.

(4) 单调性　设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，如果 $\forall\, x_1,x_2\in D$，$x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是单调增加(单调减少)的.

2. 数列极限的性质

(1) 惟一性　若数列$\{x_n\}$收敛，则其极限惟一.

(2) 有界性　若数列$\{x_n\}$收敛，则数列$\{x_n\}$有界，反之不真，但单调有界数列必收敛.

(3) 保号性　若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A,A>0$(或$A<0$),则存在正整数$N,n>N$时,恒有

$$x_n>0(\text{或}\ x_n<0).$$

反之,若存在正整数N,使当$n\geqslant N$时,有$x_n\geqslant 0$(或$x_n\leqslant 0$)且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$).

(4) 夹逼性　若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,且存在正整数$N$,当$n>N$时,恒有$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

3. 函数极限的性质

(1) 惟一性　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则其极限惟一.

(2) 局部有界性　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,存在,则$\exists\ \delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)|\leqslant M,(M>0)$.

(3) 保号性　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,而$A>0$(或$A<0$),则$\exists\ \delta>0$,

当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

反之,若$\exists\ \delta_0>0$,当$0<|x-x_0|<\delta_0$时,有$f(x)\geqslant 0$(或$f(x)\leqslant 0$)且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则　$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$).

(4) 夹逼性　若$\exists\ \delta_0>0$,当$0<|x-x_0|<\delta_0$时,恒有$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

4. 闭区间上连续函数的性质

设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则有:

(1) $f(x)$在$[a,b]$上有界.

(2) 最大、最小值定理　$f(x)$在$[a,b]$上有最大值和最小值,即至少存在点ξ和$\eta\in[a,b]$,使对一切$x\in[a,b]$,有$f(\eta)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi)$.

(3) 介值定理　设μ是介于$f(a),f(b)[f(a)\neq f(b)]$间的任何一个数,则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使$f(\xi)=\mu$.

(4) 零值定理　若$f(a)\cdot f(b)<0$,则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使$f(\xi)=0$.

*(5) 一致连续性定理　$f(x)$在$[a,b]$上一致连续.

(三) 重要运算性质和公式

1. 极限的四则运算法则

若$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$(A,B均为有限数),则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,$$
$$\lim f(x)\cdot g(x)=A\cdot B,$$
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B},(\text{当}\ B\neq 0).$$

2. 极限存在的两个准则

(1) 单调有界数列必有极限.

(2) 夹逼准则(见(二),2,3).

3. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

4. 无穷小量的运算性质

(1) 有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量.

(2) 有限个无穷小量的积仍是无穷小量.

(3) 无穷小量与有界函数的乘积仍是无穷小量.

(4) 等价无穷小代换. 设 $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ 是自变量同一变化过程中的无穷小且 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$, $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 存在,则 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta}{\alpha'}=\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$.

注意:

① 作等价无穷小代换时,只能代换乘积中的无穷小因子而不能代换和、差中的因子.

② 当 $x\to 0$ 时,常用的与 $x\to 0$ 等价的无穷小有:

$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2,\ln(1+x)\sim x$,

$\mathrm{e}^x-1\sim x,(1+x)^a-1\sim ax,(1-ax)^{\frac{1}{n}}-1\sim-\dfrac{a}{n}x$ 等.

5. 连续函数的运算性质

(1) 连续函数的四则运算　若 $f(x)$, $g(x)$ 在点 x_0 连续,则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 处亦连续.

(2) 反函数的连续性　设 $y=f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上单值、严格单调的连续函数且 $f(a)=\alpha,f(b)=\beta.$,则其反函数 $y=\varphi(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上也单调连续.

(3) 复合函数的连续性　设函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续,$u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续且 $u_0=\varphi(x_0)$,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 连续.

复合函数的连续性又可写成:

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]$$

$$\text{或}\quad \lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u),\qquad [u=\varphi(x),\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=a].$$

上面两个式子在求复合函数的极限时常常用到,第一个式子表示求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的极限时,函数符号 f 与极限号可以交换次序,第二个式子表示求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$ 时,可以作代换 $u=\varphi(x)$,化为 $f(u)$ 求 $u\to a$ 时的极限.

三、例题与分析

1. 关于函数的表达式及函数性质

求函数的表达式时,常常利用函数表达式与所用字母无关的特性.

例 1　设 $f(x)$ 满足方程　$af(x)+bf(\dfrac{1}{x})=\dfrac{c}{x}$,其中 a,b,c 为常数且 $|a|\neq|b|$,求 $f(x)$ 并证明它是奇函数.

分析　由$f(x)$所满足的方程，无法直接求出$f(x)$的表达式，但作代换令$x=\frac{1}{t}$，可以得到新的方程，联立并消去$f(\frac{1}{x})$即可解出$f(x)$，再利用奇函数定义即可证之.

解　在原方程中作代换$x=\frac{1}{t}$，可得　$af(\frac{1}{t})+bf(t)=ct$，即

$$af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx$$

与原方程联立，并消去$f(\frac{1}{x})$，可解出　$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}(\frac{a}{x}-bx)$

又　$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}(-\frac{a}{x}+bx)$，$f(x)+f(-x)=0$，故$f(x)$为奇函数.

2. 关于求反函数

求$y=f(x)$的反函数，首先由$y=f(x)$解出$x=\varphi(y)$，再把所得表达式中的x与y对换，即得所求函数的反函数.

例2　设$f(x)=\begin{cases}x, & -2<x<1;\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2;\\ 2^x, & 2<x\leqslant 4.\end{cases}$　求$f^{-1}(x)$.

分析　$f(x)$是分段函数，因此要分别求出各区间段的反函数及定义区间

解　由$y=x$，$-2<x<1$，可得　$x=y$，　$-2<y<1$.

故它的反函数是　$y=x$，　$-2<x<1$.

由　$y=x^2$，$1\leqslant x\leqslant 2$，可得　$x=\sqrt{y}$，　$1\leqslant y\leqslant 4$.

故其反函数是$y=\sqrt{x}$，　$1\leqslant x\leqslant 4$.

由　$y=2^x$，$2<x\leqslant 4$，可得　$x=\log_2 y$，　$4<y\leqslant 16$，

故其反函数是$y=\log_2 x$，　$4<x\leqslant 16$，

所以$f(x)$的反函数是　$y=\begin{cases}x, & -2<x<1;\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 4;\\ \log_2 x, & 4<x\leqslant 16.\end{cases}$

3. 关于复合函数

将两个或两个以上函数进行复合，求其表达式主要是使用代入法，即把一个函数的表达式代替另一个函数中的自变量即得由这两个函数构成的复合函数.

而要讨论含有分段函数的复合函数，应抓住最外层函数定义域的各区间段，再结合中间变量的表达式和中间变量的定义域进行分析.

例3　求下列复合函数

(1) 设$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$，求$f[f(f(x))]$及其定义域D.

(2) 设$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　$g(x+1)=x^2+x+1$，求$f[g(x)]$及$g[f(x)]$.

分析　(2)中出现分段函数，求$f[g(x)]$时，外层是分段函数，先求出$g(x)$的表达式，再依$g(x)>0$或$g(x)<0$代入$f(x)$的表达式，求$g[f(x)]$的表达式$g[f(x)]$

$= f^2(x) - f(x) + 1$ 应先求出 $f^2(x)$ 后依 $f^2(x) - f(x) + 1$ 大于零或小于零一并代入，得到的依然是分段函数.

解 (1) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$，$x \neq -1$. 所以 $f[f(x)] = \dfrac{f(x)-1}{f(x)+1} = -\dfrac{1}{x}, x \neq 0$.

$$f[f(f(x))] = \frac{f[f(x)]-1}{f[f(x)]+1} = \frac{-\frac{1}{x}-1}{-\frac{1}{x}+1} = \frac{1+x}{1-x}, \quad x \neq 1.$$

定义域为 $x \neq -1, 0, 1$.

(2) $g(x+1) = x^2 + x + 1 = x^2 + 2x + 1 - x = (x+1)^2 - x - 1 + 1$

$= (x+1)^2 - (x+1) + 1$.

所以 $g(x) = x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$.

因为 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x, & x \geqslant 0. \end{cases}$ 所以，$f[g(x)] = g(x) = x^2 - x + 1$.

$g[f(x)] = f^2(x) - f(x) + 1$.

又因为 $f^2(x) = f(x) \cdot f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$

所以 $g[f(x)] = \begin{cases} 0 - 0 + 1, & x < 0, \\ x^2 - x + 1, & x \geqslant 0, \end{cases}$

即 $g[f(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0; \\ x^2 - x + 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$

4. 用定义求极限

例 4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - n + 3}{5n^2 + 2n - 4} = \dfrac{1}{5}$.

分析 要证明上述结论，一方面需要正确理解数列极限的定义，另一方面需能熟练运用不等式的放大或缩小等技巧.

证明 任给 $\varepsilon > 0$，由于 $\left|\dfrac{n^2 - n + 3}{5n^2 + 2n - 4} - \dfrac{1}{5}\right| = \left|\dfrac{-7n + 19}{5(5n^2 + 2n - 4)}\right|$，

当 $n > 3$ 时，由于 $\dfrac{7n - 19}{5(5n^2 + 2n - 4)} < \dfrac{7n}{25n^2} < \dfrac{1}{n}$，

故，要使 $\left|\dfrac{n^2 - n + 3}{5n^2 + 2n - 4} - \dfrac{1}{5}\right| < \varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$，即 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ 即可，

因此令 $N = \max\{3, [\frac{1}{\varepsilon}]\}$，则对于任给 $\varepsilon > 0$，取 $N = \max\{3, [\frac{1}{\varepsilon}]\}$，当 $n > N$ 时，恒有 $\left|\dfrac{n^2 - n + 3}{5n^2 + 2n - 4} - \dfrac{1}{5}\right| < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ 成立. 证毕.

例 5 证明 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$.

分析 证明该结论，一方面需要正确理解函数极限的定义，另一方面需熟练掌握运用不等式的技巧.

证明 任给 $\varepsilon > 0$，要找 $\delta > 0$，使当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时，有 $\left|\dfrac{x^3 - 1}{x - 1} - 3\right| < \varepsilon$ 成

立.

因为是研究当 $x \to 1$ 时的极限,因此不妨假定 $0 < |x-1| < 1$,

由于 $\left|\dfrac{x^3-1}{x-1}-3\right| = |x^2+x-2| = |x-1||x+2|$.

而 $|x+2| = |(x-1)+3| \leqslant |x-1|+3 < 4$ 成立.

故要使 $\left|\dfrac{x^3-1}{x-1}-3\right| < \varepsilon$ 成立,只要 $4|x-1| < \varepsilon$ 即可,也即:$|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

因此令 $\delta = \min\{1, \dfrac{\varepsilon}{4}\}$,则对于任给 $\varepsilon < 0$,取 $\delta = \min\{1, \dfrac{\varepsilon}{4}\}$,当 $0 < |x-1| < \delta$ 时,恒有 $\left|\dfrac{x^3-1}{x-1}-3\right| < 4|x-1| < \varepsilon$ 成立.　证毕.

5. 利用极限存在准则求极限

利用夹逼定理求极限,要对数列(或函数)进行适当放大或缩小,并注意夹逼两端的极限值一定要相同.

例 6　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

分析　分析 $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$,它是 n 项之和,虽然无法求出其和,但各项之间递减,因此可以将 x_n 进行放大,缩小,试用夹逼定理.

证　记　$x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$,

则　$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} < x_n < \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

而　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} = 1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} = 1$,

故由夹逼定理　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = 1$.　证毕.

例 7　设 $a>0$ 为常数,数列 $\{x_n\}$ 由下式定义:$x_n = \dfrac{1}{2}(x_{n-1}+\dfrac{a}{x_{n-1}})$　$(n=1,2,\cdots)$ 其中 x_0 为大于零的常数. 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \sqrt{a}$.

分析　先利用极限的存在准则,判别 $\{x_n\}$ 是单调有界数列,因此极限存在,然后再求极限.

证明　由于 $x_n = \dfrac{1}{2}(x_{n-1}+\dfrac{a}{x_{n-1}})$,故有　$x_{n-1}^2 - 2x_nx_{n-1} = -a$.

从而　$x_{n-1}^2 - 2x_nx_{n-1} + x_n^2 = x_n^2 - a$,　　即　$(x_{n-1}-x_n)^2 = x_n^2 - a$.

由此可得:$x_n^2 - a \geqslant 0$,也即 $x_n^2 \geqslant a$,故该数列有下界.

又　$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{a}{x_n})}{x_n} = \dfrac{1}{2}(1+\dfrac{a}{x_n^2}) \leqslant 1$,所以　$x_{n+1} \leqslant x_n$.

因而该数列单调递减，由极限的存在准则知，该数列$\{x_n\}$有极限.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$，则对$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}})$两边取极限，

可得：$A = \frac{1}{2}(A + \frac{a}{A})$，

解得：$A = \sqrt{a}$，即：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \sqrt{a}$.

6. 常见的求极限问题

包括数列极限和函数极限，这是高等数学中最重要的运算之一. 常用求极限的方法有：

(1) 极限的四则运算法则.

(2) 两个重要极限.

(3) 等价无穷小代换.

(4) 函数的连续性以及复合函数求极限法则.

在求极限过程中，要灵活选用适当的方法，并注意及时将被求极限式化简以及作恒等变换将其变形. 除了上述方法外，在第三章中，我们还要介绍求未定式极限的洛必达法则以及泰勒公式等方法.

例 8 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$.

分析 利用对数性质可化为求$\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$，再利用对数函数的连续性及第二个重要极限即可求出极限.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$.

例 9 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x}$.

分析 直接求极限比较困难，因此进行变换$u = a^x - 1$，则$x = \log_a(1+u)$，且$\lim\limits_{x\to 0}(a^x - 1) = 0$，于是转换为求$u\to 0$的极限.

解 作代换$u = a^x - 1$，于是由复合函数的连续性，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{u}{\log_a(1+u)} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{\log_a(1+u)^{\frac{1}{u}}}$$

$$= \frac{1}{\log_a(\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}})} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

例 10 求$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2 + \frac{\sin x}{x}}$.

分析 该极限可利用第一个重要极限及连续函数的极限，即可求出.

解 由于$\lim\limits_{x\to 0}(x^2 + \frac{\sin x}{x}) = 0 + 1 = 1$及函数$f(u) = \sqrt{u}$在点$u_0 = 1$的连续性.

因此有$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2 + \frac{\sin x}{x}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x^2 + \frac{\sin x}{x})} = \sqrt{1} = 1$.

例 11 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

分析　可利用极限的性质，四则运算法则来求极限. 由于 $\sin n\pi = 0$，因此，可首先利用和差化积公式，而后利用极限的四则运算法则及无穷小量的性质求出该极限.

解　$$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \lim_{n\to\infty}[\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) - \sin n\pi]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[2\cos\frac{\pi\sqrt{n^2+1}+n\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi}{2}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}2\cos\left(\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{2}\pi\right)\cdot\sin\left[(\sqrt{n^2+1}-n)\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$
$$= 2\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{2}\pi\right)\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\cdot\dfrac{\pi}{2} = 0$，而 $\left|\cos\dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{2}\pi\right| \leqslant 1$，由有界函数与无穷小量的乘积仍为无穷小量，可知：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = 0$

例 12　求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

分析　由于 $x\to0$ 时，$\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\to1$，而 $\dfrac{1}{x^2}\to\infty$，故可考虑用第二个重要极限.

解　$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0}\left(1+\frac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to0}\left(1+\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3}{2}x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to0}\left(1+\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3}{2}x}{\cos 2x}\right)^{\frac{\cos 2x}{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3}{2}x}\cdot\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3}{2}x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos 2x}}.$$

因为　$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{3}{2}x}{\cos 2x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{2\sin\frac{x}{2}}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sin\frac{3}{2}x}{x}\right)\cdot\frac{1}{\cos 2x} = \frac{3}{2}.$$

所以　$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

例 13　求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}$.

分析　当 $x\to1$ 时，分子分母均为无穷小量，但表达式复杂，因此可利用等价无穷小代换来求极限. 由于 $\ln(x+\sqrt[3]{x-1}) = \ln[1+(x-1)+\sqrt[3]{x-1}]$，

当 $x\to1$ 时，$\ln[1+(x-1)+\sqrt[3]{x-1}] \sim (x-1)+\sqrt[3]{x-1} \sim \sqrt[3]{x-1}$，

而当 $x\to1$ 时，$\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1} \sim 2\cdot\sqrt[3]{x^2-1}$，由此可简化求极限的过程.

解　由于当 $x\to1$ 时，$\ln(x+\sqrt[3]{x-1}) \sim \sqrt[3]{x-1}$，

$\arcsin 2\cdot\sqrt[3]{x^2-1} \sim 2\cdot\sqrt[3]{x^2-1}$.

故原式 $= \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{x+1}}$