中国科学院研究生教学丛书

李群及其在微分方程中的应用

田 畴 编著

科 学 出 版 社

内 容 简 介

李群和微分流形对于研究非线性微分方程的性质和求解有重要意义.本书系统论述李群和微分方程不变群的基本理论,还介绍了微分流形的基本知识.本书内容精练,叙述严谨,只要具有线性代数、微分方程和微分几何的基本知识就可阅读.书中每章后附有一定数量的习题,这有助于理解本书的内容.

读者对象:高等院校数学专业、应用数学专业和理论物理专业的研究生,数学系高年级的本科生.

图书在版编目(CIP)数据

李群及其在微分方程中的应用/田畴编著.-北京:科学出版社,2001.10
(中国科学院研究生教学丛书/白春礼主编)
ISBN 7-03-009665-7

Ⅰ.李… Ⅱ.田… Ⅲ.李群-应用-微分方程-研究生-教学参考资料
Ⅳ.O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 062127 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 10 月第 一 版 开本:850×1168 1/32
2001 年 10 月第一次印刷 印张:9 3/8
印数:1—3 000 字数:244 000

定价: 20.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前　　言

李群是数学中应用极其广泛的一个重要分支．李群与微分方程的联系由来已久，李群的奠基人 S. Lie（李）正是在研究微分方程的对称性（即在变换下的不变性）的过程中提出李群的概念的．20 世纪 80 年代以来，随着非线性微分方程研究的需要，通过微分方程的不变性来研究非线性偏微分方程的性质，特别是求方程的精确解已成为一个十分重要的课题．

本书包括李群和微分方程的不变群两部分，作为李群理论的基础，微分流形的基本知识也是必备的组成部分．由于考虑到在微分方程中的需要，微分流形和李群的讲授中除着重于微分流形和李群的基础理论以外，还特别注意与微分方程的联系，如第一章中 Frobenius 定理和第二章中的李变换群．第三章中最后一节用对称求偏微分方程的精确解是作者的研究成果，它是已有的延拓方法的一个改进．

作者自 20 世纪 80 年代初就在中国科学技术大学数学系开始讲授本门课程，先后有七八次之多．讲义几经修改，力图使内容的选择不仅适应当前研究工作的要求，而且充分考虑到教学的需要，并配有习题．只要学过线性代数、微分方程和微分几何等基础课就可以阅读本书．它可以作为数学专业、应用数学专业和理论物理专业研究生的教材，也可以作为数学系高年级学生的教材，作为高年级学生的教材时，可以只讲授本书的第一、二章的内容．

作者在学习和讲授李群课程时，曾阅读过北京大学数学系已故的吴光磊教授所作的李群笔记，吴先生的笔记言简意赅，作者从中获益匪浅．2001 年是吴光磊教授诞辰 80 周年，逝世 10 周年．出版此书也是对吴先生的深切怀念．

本书的出版和编写得到中国科学院研究生教材出版基金和国家自然科学基金（19971084）的资助.

田　畴

2001 年 3 月

于中国科学技术大学数学系

第一章　微分流形

§1　张量代数

设 V 是域 F 上的一个 n 维**向量空间**，V 中的元素称为**向量**，F 中的元素称为**数**．定义在 V 上的取值于 F 的函数

$$f: V \to F$$

称为**线性的**，如果

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \tag{1.1.1}$$

对任意的 $x, y \in V$ 和任意的 $\lambda, \mu \in F$ 成立．若在 V 中任意取定一组基 $e_1, \cdots, e_n$，则 V 中的任意一向量 x 可以表示为

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i. \tag{1.1.2}$$

$x^i (i=1,\cdots,n)$ 称为 x 对这组基的坐标．以下常采用 Einstein 的和式约定：如无特别声明，在一个单项式中，凡重复的上、下指标，均表示该式关于这个指标在它的取值范围内求和，略去和式号．例如，(1.1.2)可写成

$$x = x^i e_i. \tag{1.1.2$'$}$$

由(1.1.1)，线性函数 f 在 x 的值为

$$f(x) = f(x^i e_i) = x^i f(e_i).$$

可见，一个线性函数由它在给定的任意一组基上的值确定．

将定义在 V 上的取值于 F 的全体线性函数的集合记作 V^*，并在 V^* 中规定线性运算．对任意的 $f, g \in V^*$，$x \in V$，$\lambda, \mu \in F$，定义 f 与 g 的和，λ 与 f 的乘积如下：

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

显然，$f + g$ 和 λf 仍然是线性函数，因而也都是 V^* 中的元素．不

难验证,V^* 对上述加法和数乘运算也构成一个向量空间,称为向量空间 V 的**对偶空间**. V^* 中的元素,即 V 上的线性函数,又常称为**余向量**或**一次形式**.

设 $e_i(i=1,\cdots,n)$是向量空间 V 的一组基,$e^1,\cdots,e^n$ 是 V^* 中的元素,规定它们在上述给定的基上的值为

$$e^i(e_j) = \delta^i_j, \qquad i,j = 1,\cdots,n,$$

其中

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j, \end{cases} \qquad i,j = 1,\cdots,n.$$

这样就得到了由 V 中的这组基 $e_i(i=1,\cdots,n)$完全确定的 V^* 中的 n 个元素 $e^i(i=1,\cdots,n)$.

定理 1.1.1 $e^1,\cdots,e^n$ 是 V^* 的一组基.

证明 先证明 $e^i(i=1,\cdots,n)$是线性无关的. 若有 $a_1,\cdots,a_n\in F$,使

$$a_ie^i = 0,$$

则对任意的 $x\in V$,均有

$$a_ie^i(x) = 0.$$

特别,对所有的 $e_j(j=1,\cdots,n)$,

$$a_ie^i(e_j) = 0,$$

而

$$a_ie^i(e_j) = a_i\delta^i_j = a_j.$$

即 $a_j=0,j=1,\cdots,n$,所以,$e^1,\cdots,e^n$ 是线性无关的.

其次,设 f 是 V^* 中的任意的一个元素,

$$f(e_j) = f_j, \qquad j = 1,\cdots,n.$$

于是

$$(f_ie^i)(e_j) = f_ie^i(e_j) = f_i\delta^i_j = f_j,$$

即 f 与 f_ie^i 在所有基向量的值相等,所以

$$f = f_ie^i,$$

即 f 可以表示为 $e^i(i=1,\cdots,n)$的线性组合. 定理证毕.

这样由 V 中给定的一组基 $e_i(i=1,\cdots,n)$ 所确定的 V^* 中的一组基 $e^i(i=1,\cdots,n)$ 称为 V^* 中的关于 V 中的基 $e_i(i=1,\cdots,n)$ 的**对偶基**.

设 $x\in V$, x^i 是 x 对基 $e_i(i=1,\cdots,n)$ 的坐标,即 $x=x^ie_i$,则

$$e^j(x)=e^j(x^ie_i)=x^ie^j(e_i)=x^i\delta_i^j=x^j.$$

进一步地,设 $f\in V^*$, f_i 是 f 对基 $e^i(i=1,\cdots,n)$ 的坐标,即 $f=f_je^j$,则

$$f(x)=f_je^j(x^ie_i)=f_jx^ie^j(e_i)=f_jx^i\delta_i^j=f_ix^i. \quad (1.1.3)$$

设 V 和 W 分别为 n 和 m 维的向量空间,

$$f:\quad V\to W$$

为一线性映射,现定义 W 的对偶空间 W^* 到 V 的对偶空间 V^* 的一个映射

$$f^*:\quad W^*\to V^*.$$

$$(f^*w^*)(v)=w^*(f(v)),\qquad w^*\in W^*, v\in V.$$

容易证明,f^*w^* 是 V 上的线性函数,即 $f^*w^*\in W^*$,又因为

$$f^*(\lambda w^*)(v)=\lambda w^*(f(v))=\lambda(f^*w^*)(v),$$

$$\begin{aligned}f^*(w_1^*+w_2^*)(v)&=(w_1^*+w_2^*)(f(v))\\&=w_1^*(f(v))+w_2^*(f(v))\\&=(f^*w_1^*)(v)+(f^*w_2^*)(v),\end{aligned}$$

对任意的 $w^*, w_1^*, w_2^*\in W^*$, $v\in V$ 和 $\lambda\in F$ 成立. 所以,f^* 为 W^* 到 V^* 的一个线性映射,并称之为 f 的**对偶映射**.

自然会进一步考虑 V^* 的对偶空间 $(V^*)^*$. 设 φ 是 V^* 上的一个线性函数,它在 V^* 的基 $e^i(i=1,\cdots,n)$ 的值

$$\varphi^i=\varphi(e^i),\qquad i=1,\cdots,n.$$

$f=f_ie^i$ 是 V^* 的任一元素,于是

$$\varphi(f)=f_i\varphi^i.$$

命 $x=\varphi^ie_i\in V$,则有

$$f(x)=f_i\varphi^i,$$

所以

$$f(x)=\varphi(f)$$

对 V^* 中的任意元素 f 成立. 这就得到了 V^* 上的线性函数 φ 与 V 中间的向量 x 之间的一个一一对应关系. 也就是说, 按 $\varphi(f)=f(x)$, V 中的任意元素 x 都可以看作是 V^* 上的一个线性函数 φ; 反之, V^* 上的一个线性函数 φ 也可以看作 V 中的向量 x. 因此, 按照这样的对应关系, V^* 的对偶空间就是 V, 并且, $e^i(i=1,\cdots,n)$ 的对偶基就是 $e_i(i=1,\cdots,n)$. 总之, 对偶关系是相互的. 由于这个相互关系, 我们可以定义 V 中元素 V 与 V^* 中元素 v^* 之间的配合:

$$\langle v,v^*\rangle=v^*(v).$$

它是 $V\times V^*$ 上的一个双线性函数.

特别, 若 V 是欧氏向量空间, R 为实数域, y 为 V 中的任一元素, 命

$$y:\quad x\to x\cdot y,\qquad x\in V,$$

其中 $x\cdot y$ 表示 x 与 y 的内积, 这样就得到定义在 V 上的一个线性函数

$$y:\quad V\to R.$$

显然, 这是一个线性函数, 所以, V 中的任一元素都可以看作为 V 上的一个线性函数, 即 V^* 中的一个元素. 反之, 通过上述内积, V 上的任一线性函数也可以看作为 V 中的一个元素. 这就把 V 和 V^* 等同起来, 也就是说, 欧氏向量空间 V 的对偶空间就是 V, 并且, 若 $e_i(i=1,\cdots,n)$ 是 V 的一组标准正交基, 即

$$e_i\cdot e_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j,\\ 0, & \text{当 } i\neq j.\end{cases}$$

则其对偶基 $e^i=e_i(i=1,\cdots,n)$, (1.1.3) 就化为通常的内积在标准基中的坐标表示:

$$f(x)=f\cdot x=\sum_{i=1}^{n}f_ix_i,$$

其中 f_i 和 x_i 分别为 f 和 x 在标准基 $e_i(i=1,\cdots,n)$ 的坐标.

设 V 和 W 分别为域 F 上的 n 和 m 维的向量空间, $V\times W$ 是

它们的笛卡儿积,定义在 $V\times W$ 上的函数

$$f:\ V\times W\to F$$

称为**双线性的**,如果它对每一个变元都是线性的,即

$$f(\lambda v_1+\mu v_2,w)=\lambda f(v_1,w)+\mu f(v_2,w),$$

$$f(v,\lambda w_1+\mu w_2)=\lambda f(v,w_1)+\mu f(v,w_2)$$

对任意的 $v,v_1,v_2\in V,w,w_1,w_2\in W$ 和任意的 $\lambda,\mu\in F$ 成立.

将上述全体双线性函数的集合记作 $L(V,W,F)$,自然可按通常的函数加法和数乘函数规定其中的线性运算,且不难证明,$L(V,W;F)$ 对此线性运算构成一个向量空间,设 $a_i(i=1,\cdots,n)$ 和 $b_\alpha(\alpha=1,\cdots,m)$ 分别为 V 和 W 的基,$v=v^ia_i$ 和 $w=w^\alpha b_\alpha$ 分别为 V 和 W 中的任意元素,则

$$f(v,\omega)=f(a_i,b_\alpha)v^iw^\alpha.$$

因此,f 由它在基 $(a_i,b_\alpha)(i=1,\cdots,n;\alpha=1,\cdots,m)$ 上的值 $f(a_i,b_\alpha)$ 完全确定,并且,这 $n\times m$ 个数 $f(a_i,b_\alpha)$ 可以取任意的值.所以,$L(V,W;F)$ 是 $n\times m$ 维的向量空间.

设 $v^*\in V^*,w^*\in W^*$,现定义 $v^*\otimes w^*$ 作为 $V\times W$ 上的函数:

$$v^*\otimes w^*(v,w)=v^*(v)w^*(w),v\in V,w\in W,$$

并称为 v^* 与 w^* 的**张量积**.显然,作为映射

$$v^*\otimes w^*:\ V\times W\to F,$$

它是双线性的,即 $v^*\otimes w^*\in L(V,W;F)$.

将由全体 $v^*\otimes w^*$ 生成的空间记作 $V^*\otimes W^*$,称为 V^* 和 W^* 的张量积空间.显然,它是 $L(V,W;F)$ 的子空间.

设 a^i 和 $b^\alpha(i=1,\cdots,n;\alpha=1,\cdots,m)$ 分别为 V^* 和 W^* 关于 V 和 W 的基 a_i 和 b_α 的对偶基,不难证明,作为 $V^*\otimes W^*$ 的元素 $a^i\otimes b^\alpha$,它们是线性无关的,因此,$V^*\otimes W^*$ 是 nm 维的向量空间,即有

$$V^*\otimes W^*=L(V,W;F).$$

因为 V 和 W 又分别为 V^* 和 W^* 的对偶空间,故又可以定义

张量积 $V\otimes W$，并且

$$V\otimes W = L(V^*,W^*;F).$$

张量积 $V\otimes W$ 和 $V^*\otimes W^*$ 是互为对偶的，只须定义

$$\begin{aligned}\langle v\otimes w, v^*\otimes w^*\rangle &= v^*\otimes w^*(v\otimes w)\\ &= v^*(v)w^*(w) = \langle v,v^*\rangle\langle w,w^*\rangle.\end{aligned}$$

特别

$$\langle a_i\otimes b_\alpha, a_j\otimes b^\beta\rangle = \delta_i^j\delta_\alpha^\beta = \begin{cases}1, & 当(i,\alpha)=(j,\beta),\\ 0, & 当(i,\alpha)\neq(j,\beta).\end{cases}$$

所以，$a_i\otimes b_\alpha$ 和 $a^i\otimes b^\alpha$ $(i=1,\cdots,n,\alpha=1,\cdots,m)$ 互为对偶基，并且

$$V^*\otimes W^* = (V\otimes W)^*.$$

进一步地，可以定义任意有限个向量空间的张量积，前面所定义的双线性函数的概念也可以推广到多变量，即**多线性函数**，不难证明，在它们之间也存在如上所述的关系.

常用的是一种特殊的多线性函数，即通常所谓的张量.

定义1.1.1 $r+s$ 线性函数

$$x:\overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{r个}\times\overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{s个}\to F$$

称为向量空间 V 上的一个 (r,s) 阶**张量**，或 r 阶逆变，s 阶协变的**混合张量**.

特别，$(0,s)$ 阶张量称为 s 阶**协变张量**，$(r,0)$ 阶张量称为 r 阶**逆变张量**，一阶逆变张量就是 V 中的向量，一阶协变张量就是 V^* 中的余向量，通常又将 F 中的数称为 $(0,0)$ 阶或零阶张量.

设 $T^{r,s}(V)(r,s\geqslant 0)$ 是 V 上的全体 (r,s) 阶张量所构成的向量空间，如前所述，它就是张量积空间

$$\overbrace{V\otimes\cdots\otimes V}^{r个}\otimes\overbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}^{s个},$$

这是一个 n^{r+s} 维的向量空间，特别

$$T^{(0,0)}(V)=F,$$

$$T^{(1,0)}(V)=V,$$

$$T^{(0,1)}(V) = V^*.$$

若 $e_i(i=1,\cdots,n)$是 V 的一组基,$e^i(i=1,\cdots,n)$是它在 V^* 中的对偶基,则由它们构成的 n^{r+s}个(r,s)阶张量

$$e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes e^{j_2}\otimes\cdots\otimes e^{j_s}$$

$(i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s=1,\cdots,n)$构成 $T^{r,s}(V)$的一组基.于是,任意一个(r,s)阶张量 t 都可以惟一地表示为

$$t = t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s},$$

且

$$\left(t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\right)$$

称为张量 t 对给定的基$e_i(i=1,\cdots,n)$的坐标.显然,

$$t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} = t(e^{i_1},\cdots,e^{i_r},e_{j_1},\cdots,e_{j_s}),$$

由于一个张量由它在给定的一组基上的值惟一确定,所以,张量就由它对给定的基的坐标所刻画,两个张量相等必须且只须它们对任意给定的一组基的坐标相等.

现在考虑向量空间 V 上的全体张量的集合

$$T(V) = \sum_{r,s\geqslant 0} T^{r,s}(V),$$

式中的和号表示向量空间的弱直和.显然,对所规定的线性运算,$T(V)$构成一线性空间.进一步还可以在 $T(V)$中规定任意两个张量的乘积,设 a 和 b 分别为(r,s)阶和(r_1,s_1)阶张量,a 和 b 的乘积定义为一个$(r+r_1,s+s_1)$阶张量,并记作 $a\otimes b$,

$$\begin{aligned} &a\otimes b(v^1,\cdots,v^{r+r_1},v_1,\cdots,v_{s+s_1}) \\ &= a(v^1,\cdots,v^r,v_1,\cdots,v_s)b(v^{r+1},\cdots,v^{r+r_1},v_{s+1},\cdots,v_{s+s_1}), \\ &\quad v_1,\cdots,v_{s+s_1}\in V, v^1,\cdots,v^{r+r_1}\in V^*. \end{aligned}$$

且容易验证,下列运算规律

$$(a\otimes b)\otimes c = a\otimes(b\otimes c),$$
$$(\lambda a)\otimes b = \lambda(a\otimes b),$$

$$(a+b)\otimes c = a\otimes c + b\otimes c,$$
对任意的 $a,b,c\in T(V)$和 $\lambda\in F$ 成立.

$T(V)$连同在它上面所定义的线性运算和乘积运算称为向量空间 V 上的一个**张量代数**.

对 V 中任意给定的一组基$e_i(i=1,\cdots;n)$,上述张量运算都可以表示为坐标的运算,设 a 和b 分别为(r,s)和(r_1,s_1)阶张量,其坐标分别为$\left(a^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\right)$和$\left(b^{i_1\cdots i_{r_1}}_{j_1\cdots j_{s_1}}\right)$,则$(r+r_1,s+s_1)$阶张量 $a\otimes b$ 的坐标为
$$\left((a\otimes b)^{i_1\cdots i_r i_{r+1}\cdots i_{r+r_1}}_{j_1\cdots j_s j_{s+1}\cdots j_{s+s_1}}\right) = \left(a^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} b^{i_{r+1}\cdots i_{r+r_1}}_{j_{s+1}\cdots j_{s+s_1}}\right).$$
$\lambda a(\lambda\in F)$仍然是一个(r,s)阶张量,其坐标为
$$\left((\lambda a)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\right) = \left(\lambda a^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\right).$$
若 a 和b 为同阶张量,即$(r,s)=(r_1,s_1)$,则 $a+b$ 仍然是一个(r,s)阶张量,其坐标为
$$(a+b)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} = \left(a^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} + b^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\right).$$

利用坐标表示张量及其运算显得自然而又方便,但是,由于坐标是依赖于向量空间 V 中的基的选取的.所以,我们必须考虑坐标变换.

设 $e_{i'}(i'=1,\cdots,n)$是 V 的另一组基,$e^{i'}(i'=1,\cdots,n)$是它在 V^* 中的对偶基,且
$$e_i = c_i^{i'}e_{i'},\qquad i=1,\cdots,n. \tag{1.1.4}$$
显然,$(c_i^{i'})$是一个非奇矩阵,又设
$$e^j = c_{j'}^{j}e^{j'},\qquad j=1,\cdots,n. \tag{1.1.5}$$
由于
$$\begin{aligned}\delta_i^j = e^j(e_i) &= c_{j'}^{j}c_i^{i'}e^{j'}(e_{i'})\\ &= c_{j'}^{j}c_i^{i'}\delta_{j'}^{i'} = c_{i'}^{j}c_i^{i'},\qquad i,j=1,\cdots,n,\end{aligned}$$

所以,$(c_{i'}^{i})$是$(c_{i}^{i'})$的逆矩阵,并有

$$e_{i'} = c_{i'}^{i} e_i, \quad e^{i'} = c_{i}^{i'} e^{i}, \quad i, i' = 1, \cdots, n. \tag{1.1.6}$$

设张量 a 对基$e_{i'}(i=1,\cdots,n)$的坐标为$\left(a_{j_{1'}\cdots j_{s'}}^{i_{1'}\cdots i_{r'}}\right)$,即

$$a_{j_{1'}\cdots j_{s'}}^{i_{1'}\cdots i_{r'}} = a(e^{i_{1'}}, \cdots, e^{i_{r'}}, e_{j_{1'}}, \cdots, e_{j_{s'}}). \tag{1.1.7}$$

将(1.1.6)代入(1.1.7)的右端,则得到

$$\begin{aligned} &a(e^{i_{1'}}, \cdots, e^{i_{r'}}, e_{j_{1'}}, \cdots, e_{j_{s'}}) \\ &= c_{i_1}^{i_{1'}} \cdots c_{i_r}^{i_{r'}} c_{j_{1'}}^{j_1} \cdots c_{j_{s'}}^{j_s} a(e^{i_1}, \cdots, e^{i_r}, e_{j_1}, \cdots, e_{j_s}), \end{aligned}$$

即

$$a_{j_{1'}\cdots j_{s'}}^{i_{1'}\cdots i_{r'}} = c_{i_1}^{i_{1'}} \cdots c_{i_r}^{i_{r'}} c_{j_{1'}}^{j_1} \cdots c_{j_{s'}}^{j_s} a_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}, \tag{1.1.8}$$

反之

$$a_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r} = c_{i_{1'}}^{i_1} \cdots c_{i_{r'}}^{i_r} c_{j_1}^{j_{1'}} \cdots c_{j_s}^{j_{s'}} a_{j_{1'}\cdots j_{s'}}^{i_{1'}\cdots i_{r'}}. \tag{1.1.9}$$

这就是张量的坐标应满足的变换规律.张量 a 就由这些满足坐标变换的坐标所刻画.因此,一个(r,s)阶张量也可以定义为,对 V 中任意给定的一组基$e_i(i=1,\cdots,n)$,它对应 n^{r+s}个数

$$\left(a_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\right)$$

且满足坐标变换规律(1.1.8)或(1.1.9).

§2 外 代 数

在本节中讨论一类特殊的张量.

定义 1.2.1 一个 p 阶协变(或逆变)张量 a 称为**对称的**,如果自变量经任意的排列,张量 a 的值不变,即对任意的 $x_1,\cdots,x_p\in V$(或 V^*),

$$a(x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}) = a(x_1, \cdots, x_p), \tag{1.2.1}$$

其中$(i_1,\cdots,i_p)$是$(1,\cdots,p)$的一个任意的排列.

定义 1.2.2 一个 p 阶协变(或逆变)张量 a 称为**反称的**,如果自变量经任意的偶排列,张量 a 的值不变,而自变量经任意的奇排列,张量 a 的值反号,即对任意的 $x_1,\cdots,x_p\in V$(或 V^*),

$$a(x_{i_1},\cdots,x_{i_p}) = \sigma(i_1\cdots i_p)a(x_1,\cdots,x_p), \quad (1.2.2)$$

其中$(i_1,\cdots,i_p)$是$(1,\cdots,p)$的一个任意的排列,$\sigma(i_1,\cdots,i_p)$是这个排列的符号,即

$$\sigma(i_1\cdots i_p) = \begin{cases} 1, & \text{当}(i_1,\cdots,i_p)\text{是}(1,\cdots,p)\text{的偶排列}, \\ -1, & \text{当}(i_1,\cdots,i_p)\text{是}(1,\cdots,p)\text{的奇排列}. \end{cases}$$

根据排列与对换的关系,一个 p 阶协变(或逆变)张量 a 是对称的,必须且只须它对 V 中某一组基的坐标关于任意两个指标都是对称的;a 是反称的,必须且只须它的坐标关于任意两个指标都是反称的.

设 a 任意给定的 p 阶协变(或逆变)张量,则可以由它惟一确定一个 p 阶协变(或逆变)张量(a):

$$(a)(x_1,\cdots,x_p) = \frac{1}{p!}\sum_{(i_1,\cdots,i_p)} a(x_{i_1},\cdots,x_{i_p}), \quad (1.2.3)$$

其中 $x_1,\cdots,x_p$ 是 V(或 V^*)中的任意元素,$(i_1,\cdots,i_p)$是$(1,\cdots,p)$任意排列,式中和号表示对$(1,\cdots,p)$的所有排列求和.显然,对自变量的任意排列,(a)的值不变,所以(a)是对称张量,并称为张量 a 的**对称化**.容易证明,张量 a 是对称的必须且只须

$$(a) = a.$$

a 也可以惟一确定一个 p 阶协变(或逆变)的反称张量$[a]$:

$$[a](x_1,\cdots,x_p) = \frac{1}{p!}\sum_{(i_1,\cdots,i_p)} \sigma(i_1,\cdots,i_p)a(x_{i_1},\cdots,x_{i_p}), \quad (1.2.4)$$

并称之为张量 a 的**反称化**.显然,张量 a 是反称的必须且只须

$$[a] = a.$$

设 $e_i(i=1,\cdots,n)$是 V 中任意给定的一组基,a 是一个 p 阶

协变张量,它对这组给定基的坐标为

$$(a_{i_1\cdots i_p}).$$

因为 $a_{i_1\cdots i_p}=a(e_{i_1},\cdots,e_{i_p})$,由(1.2.3),$a$ 的对称化(a)的坐标为

$$(a)_{i_1\cdots i_p}=\frac{1}{p!}\sum_{(i_1,\cdots,i_p)}a_{j_1\cdots j_p},\tag{1.2.5}$$

式中$(j_1,\cdots,j_p)$是$(i_1,\cdots,i_p)$的任意排列,和号表示对所有的排列求和.通常也将$(a)_{i_1\cdots i_p}$记作$a_{(i_1\cdots i_p)}$.

又由(1.2.4),a 的反称化$[a]$的坐标为

$$[a]_{i_1\cdots i_p}=\frac{1}{p!}\delta^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_p}a_{j_1\cdots j_p},\tag{1.2.6}$$

其中

$$\delta^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_p}=\begin{cases}1, & \text{若 } i_1,\cdots,i_p \text{ 各不相同,}\\ & \text{且}(j_1,\cdots,j_p)\text{ 是}(i_1,\cdots,i_p)\text{ 的偶排列,}\\ -1, & \text{若 } i_1,\cdots,i_p \text{ 各不相同,}\\ & \text{且}(j_1,\cdots,j_p)\text{ 是}(i_1,\cdots,i_p)\text{ 的奇排列,}\\ 0, & \text{其他情形.}\end{cases}$$

通常也将$[a]_{i_1\cdots i_p}$记作$a_{[i_1\cdots i_p]}$.

定义 1.2.3 域 F 上的 n 维向量空间 V 上的一个 $p(\geqslant 2)$阶反称协变张量称为一个 p **次外形式**,协变向量即余向量又称为**一次外形式或一次形式**,F 中的数又称为**零次外形式或零次形式**.

假设域 F 的特征数不等于 2.

若 $p>n$,p 次外形式α 对 V 中任意一组基$e_i(i=1,\cdots,n)$的坐标为

$$\alpha_{i_1\cdots i_p}=\alpha(e_{i_1},\cdots,e_{i_p}),\quad i_1,\cdots,i_p=1,\cdots,n.$$

因此,$e_{i_1},\cdots,e_{i_p}$中至少有两个是重复的,由 α 的反称性,

$$\alpha_{i_1\cdots i_p}=0,\quad i_1,\cdots,i_p=1,\cdots,n.$$

所以,高于 n 次的外形式只有零.

设 $F_p(V)$是 V 上的全体p 次外形式的集合,显然

$$F_0(V)=F,\qquad F_1(V)=V^*.$$

因为任意两个 p 次外形的和仍是 p 次外形式,任意一个数与任意一个 p 次外形式的乘积仍是 p 次外形式,所以,$F_p(V)$ 是 $T^{0,p}(V)$ 的一个向量子空间.作为张量,任意两个外形式自然可以作张量乘积,问题是得到的乘积一般不只是外形式,我们需要在外形式之间定义一种特殊的乘积,即所谓外积.

定义 1.2.4 一个 p 次外形式 α 与一个 q 次外式 β 的张量积 $\alpha\otimes\beta$ 的反称化 $[\alpha\otimes\beta]$ 称为 α 与 β 的**外积**,记作 $\alpha\wedge\beta$.

显然,$\alpha\wedge\beta$ 是一个 $p+q$ 次外形式.

设 $x_1,\cdots,x_p,x_{p+1},\cdots,x_{p+q}$ 是 V 中的任意元素,由外积的定义

$$
\begin{aligned}
&\alpha\wedge\beta(x_1,\cdots,x_p,x_{p+1},\cdots,x_{p+q})\\
&=[\alpha\otimes\beta](x_1,\cdots,x_p,x_{p+1},\cdots,x_{p+q})\\
&=\frac{1}{(p+q)!}\delta^{i_1\cdots i_p i_{p+1}\cdots i_{p+q}}_{1\cdots p p+1\cdots p+q}\alpha(x_{i_1},\cdots,x_{i_p})\beta(x_{i_{p+1}},\cdots,x_{i_{p+q}}),
\end{aligned}
$$

或者用坐标表示为

$$
\begin{aligned}
&(\alpha\wedge\beta)_{i_1\cdots i_p i_{p+1}\cdots i_{p+q}}\\
&=\frac{1}{(p+q)!}\delta^{j_1\cdots j_p j_{p+1}\cdots j_{p+q}}_{i_1\cdots i_p i_{p+1}\cdots i_{p+q}}\alpha_{j_1}\cdots\alpha_{j_p}\alpha_{j_{p+1}}\cdots\alpha_{j_{p+q}}.
\end{aligned}
$$

定理 1.2.1 外积适合下列运算规律.

1. 结合律.对任意的外形式 α,β 和 γ,

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma).$$

2. 分配律.若 α 和 α_2 是同次的外形式,

$$(\alpha_1+\alpha_2)\wedge\beta=\alpha_1\wedge\beta+\alpha_2\wedge\beta.$$

3. 反交换律.若 α 是 p 次外形式,β 是 q 次外形式,

$$\alpha\wedge\beta=(-1)^{pq}\beta\wedge\alpha.$$

证明 性质 2 是显然的,以下证明性质 1 和 3.

1. 设 α,β 和 γ 分别为 p,q 和 r 次的外形式,$x_1,\cdots,x_p$,$x_{p+1},\cdots,x_{p+q},x_{p+q+1},\cdots,x_{p+1+r}$ 是 V 中的任意元素,由外积的定义,

$$
\begin{aligned}
&(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma(x_1, \cdots, x_{p+q+1}) \\
&= \frac{1}{(p+q+r)!} \delta^{i_1 \cdots i_{p+q+r}}_{1 \cdots p+q+r} \\
&\quad \cdot (\alpha \wedge \beta)(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{p+q}}) \gamma(x_{i_{p+q+1}}, \cdots, x_{i_{p+q+r}}) \\
&= \frac{1}{(p+q+r)!} \delta^{i_1 \cdots i_{p+q+r}}_{1 \cdots p+q+r} \frac{1}{(p+q)!} \delta^{j_1 \cdots j_{p+q}}_{i_1 \cdots i_{p+q}} \alpha(x_{j_1}, \cdots, x_{j_p}) \\
&\quad \cdot \beta(x_{j_{p+1}}, \cdots, x_{j_{p+q}}) \gamma(x_{i_{p+q+1}}, \cdots, x_{i_{p+q+1}}) \\
&= \frac{1}{(p+q+r)!} \delta^{i_1 \cdots i_{p+q+r}}_{1 \cdots p+q+r} \alpha(x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}) \\
&\quad \cdot \beta(x_{i_{p+1}}, \cdots, x_{i_{p+q}}) \gamma(x_{i_{p+q+1}}, \cdots, x_{i_{p+q+r}}) \\
&= \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)(x_1, \cdots, x_{p+q+r}),
\end{aligned}
$$

所以

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

3. 设 $x_1, \cdots, x_{p+q}$是 V 中的任意元素，由外积的定义，

$$
\begin{aligned}
&\alpha \wedge \beta(x_1, \cdots, x_{p+q}) \\
&= \frac{1}{(p+q)!} \delta^{i_1 \cdots i_{p+q}}_{1 \cdots p+q} \alpha(x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}) \beta(x_{i_{p+1}}, \cdots, x_{i_{p+q}}) \\
&= \frac{(-1)^{pq}}{(p+q)!} \delta^{i_{p+1} \cdots i_{p+q} i_1 \cdots i_p}_{1 \cdots p+q} \beta(x_{i_{p+1}}, \cdots, x_{i_{p+q}}) \alpha(x_{i_1}, \cdots x_{i_p}) \\
&= \frac{(-1)^{pq}}{(p+q)!} \delta^{i_1 \cdots i_q i_{q+1} \cdots i_{q+p}}_{1 \cdots q+p} \beta(x_{i_1}, \cdots, x_{i_q}) \alpha(x_{i_{q+1}}, \cdots, x_{i_{q+p}}) \\
&= (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha(x_1, \cdots, x_{p+q}),
\end{aligned}
$$

所以

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

特别，若 α 和 β 都是一次外形式，则

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha,$$

并由此得到

$$\alpha \wedge \alpha = 0.$$

设