奥林匹克

# 全国高中数学联赛
## 模拟训练试卷精选

预赛·初赛·决赛

命题人　全国著名教练
国际金牌得主
国家集训队员

中国青年出版社

# 全国高中数学联赛
# 模拟训练试卷精选

主　编　王人伟　李延林

中国青年出版社

（京）新登字 083 号

图书在版编目（CIP）数据
全国高中数学联赛模拟训练试卷精选/王人伟，李延林主编.
—北京：中国青年出版社，2003
ISBN 7-5006-4932-0

Ⅰ．全…　Ⅱ．①王…②李…　Ⅲ．数学课—高中—习题　Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 001928 号

*

中国青年出版社出版 发行
社址：北京东四 12 条 21 号　邮政编码：100708
网址：www. cyp. com. cn
编辑部电话：（010）64079077　发行部电话：（010）64010813
天利华印刷有限公司印刷　新华书店经销

*

850×1168　1/32　9.25 印张　1 插页　308 千字
2003 年 1 月北京第 1 版　2003 年 1 月北京第 1 次印刷
印数：1—15,000 册　定价：18.00 元
本图书如有任何印装质量问题，请与出版处联系调换
联系电话：（010）64033570
雄狮书店：（010）84039659

# 让成功与你同行

## ——写在前面

近20年来，省、市、区、国家及国际的奥林匹克数学、物理、化学、信息学、生物学五学科竞赛，为满足中学生的学科兴趣爱好和展示他们的聪明才智提供了宽广的舞台，已成为当代中学生素质教育的一项重要内容。尤其是竞赛活动与高考保送生的选拔制度接轨后，更加受到重点高中、中学教师、中学生及学生家长的高度重视，广大中学生的参与热情空前高涨。近几年来，每年有近70万人次参加数学、物理、化学、信息学、生物学五学科竞赛！今天，中学生如何参与这项盛大的赛事活动，沿着“科学选拔人才，提高学科素养”的方向来展示自身价值，已成为竞赛教练员和选手们共同孜孜求索的目标。毫无疑问，搞好赛前模拟训练，是实现这一目标必不可少的步骤。

目前已面世的各类竞赛训练辅导图书林林总总，目不暇接。于此情况下，怎样使竞赛爱好者能在茫茫“书海”中，寻找到自己的阅读需求，便是本书的编写初衷。我们特意邀请了在国际国内竞赛中立下了赫赫战功的教练员、摘取了国际金牌桂冠的佼佼者以及被选拔到国家集训队的优秀选手们，把他们对竞赛的理解和感悟连同他们获得奖牌的实战经验一起融入书中，领引你与成功同行。

本书作者大多来自国内竞赛活动中久负盛名的地区和学校。他们参与竞赛不惟获奖，而是追索着其中的意义；他们坚决反对题海战术，但又大胆尝试求解难题的方法与技巧。众所周知，竞赛教练员和选手的实力与水平最终就体现在一纸试卷上。他们所创编的好题具有较高的探索价值和借鉴价值。本书精选的模拟试卷蕴涵着竞赛健儿们的勤奋与心智，具有**适用、实效、创新、开放**四大亮点。

## 亮点之一——注重适用

由浅入深地精选了一类由预赛难度逐渐过渡到复赛及决赛水平的试题，这与高中学生实际参赛的情况相吻合，对高中生中成绩良好的竞赛爱好者和成绩优秀的竞赛夺魁者都具有适用性。

## 亮点之二——把握实效

遵循竞赛大纲，跟踪历年竞赛好题，较系统地总结了历次竞赛试卷中的热点和难点知识，使读者确实能捕获到竞赛命题的信息，把握住竞赛解题方法和技巧。

## 亮点之三——赋予创新

由获奖选手命竞赛题，在同类竞赛辅导书中绝无仅有。夺得了金牌的选手、国家集训队队员以及训练他们参赛的教练员们，以获得成功的切身经历，多形式、多角度地运用竞赛难点、热点知识命题与解题，使试卷体现了对竞赛命题信息的预测和竞赛成功经验的效仿价值，并且更易被同龄参赛者所接受。

## 亮点之四——立足开放

他山之石可以攻己之玉。国内各地的著名教练与选手云集同一本书中，打破了传统意义上地域的狭隘与封闭，别具一格地进行了竞赛培训交流，这在国内竞赛培训中也属首创，备受业内人士称道。

亲爱的读者，解读这一份份精雕细刻的模拟试卷，其可圈可点之处会使你觉得，这不仅仅是在做竞赛模拟试题，还有更多更多……

我们的祝愿是：**让成功与你同行！**

# 目 录

# 模拟训练试卷①

总分 150 分　时量 100 分钟

**命题人　曾宪乙**

毕业于湖北省武钢三中，就读于北京大学数学学院。荣获第43届国际数学奥林匹克竞赛金牌。曾多次在全国初中、高中数学、物理、化学等学科竞赛中取得优异成绩。荣获第 12 届全国中学生"希望杯"数学竞赛金牌，2001年保加利亚数学奥林匹克对抗赛一等奖。



## 第　一　试

（总分 150 分，时量 100 分钟）

**一、选择题(36 分，每小题 6 分)**

1. 已知 **Z** 为整数集，集合 $A=\{x\mid |x-3|<\pi, x\in\mathbf{Z}\}$

$B=\{x\mid x^2-11x+5<0, x\in\mathbf{Z}\}$

$C=\{x\mid |2x^2-11x+10|\geqslant|3x-2|, x\in\mathbf{Z}\}$

$\overline{C}$ 是 $C$ 在 **Z** 中的补集. 则 $A\cap B\cap\overline{C}$ 的真子集的个数为(　　).

A. 7　　B. 8　　C. 15　　D. 16

2. 命题 1：正方体的表面可以分别分割成 2 个、3 个、4 个完全全等的图形.

命题 2：空间中到正方体 8 个顶点距离之和最小的点有且只有 1 个，则两个命题中(　　).

A. 两个都不正确　　B. 前一个不正确，后一个正确

C. 前一个正确，后一个不正确　　D. 两个都正确

3. a. $y=\sin x+\cos x$; b. $y=\sin x-\cos x$; c. $y=\sin x\cdot\cos x$; d. $y=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\left(x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in Z\right)$. 4 个函数中，在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增的是(　　).

A. a　　B. b　　C. c 和 a　　D. d 和 b

4. $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相切，它们的半径分别为 3 和 7，若恰存在 3 个半径为 $r$ 的圆与 $\odot O_1$，$\odot O_2$ 都相切，则 $r$ 的所有可能取值为(　　).

A. $r=10$　　　　B. $r=3$ 或 $r=4$ 或 $r=7$

C. $r=4$　　　　D. $r=4$ 或 $r=3$

5. $(1+x+x^2+\cdots+x^{p-1})^{p+1}$展开式为 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{p^2-1}x^{p^2-1}$. 其中 $p$ 是一个不小于3的系数. 则 $a_0+a_p+a_{2p}+\cdots+a_{p^2-p}$值为(　　).

A. $p^{p-1}$　　B. $p^p$　　C. $p^{p^2-1}$　　D. $p^{p+1}$

6. $n$ 是1个不小于2的正整数，设 $n$ 条直线最多把平面划分成 $M_n$ 个部分，$n+2$ 条射线最多可以把平面分成 $N_{n+2}$个部分，则对一切 $n\geqslant 2$，$M_n$ 与 $N_{n+2}$的关系是(　　).

A. $M_n>N_{n+2}$　　　　B. $M_n<N_{n+2}$

C. $M_n=N_{n+2}$　　　　D. 不确定

**二、填空题(54 分，每小题 9 分)**

7. 以 $p$ 为圆心的圆与$(x+1)^2+y^2=1$ 外切，与 $x^2+y^2-2x-8=0$ 内切，则所有满足条件的点 $p$ 中距原点距离最远的点的坐标为______.

8. 不等式 $\left|\dfrac{1}{\dfrac{2}{\tan x}-1}\right|>2$ 的解集为______.

9. $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为单位正方体，则直线 $AC$ 与 $A_1D$ 间的距离为______.

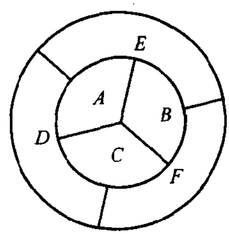



**图 1**

10. 给图 1 中 $A$、$B$、$C$、$D$、$E$、$F$ 6 块区域进行染色，每块区域只染 1 种颜色，相邻的区域不同色，若共有 4 种颜色供选择，则共有________种不同染色方案.

11. $\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2}+\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+2\sqrt{3}y+8+4\sqrt{3}}+\sqrt{x^2+y^2+8x+4\sqrt{3}x-4y+32+16\sqrt{3}}$　$(x、y\in\mathbf{R})$的最小值为______.

12. 若复数 $Z_1, Z_2$ 满足$|Z_1|=a$，$|Z_2|=1$，若 $Z_1Z_2=-a$，则 $Z_1-aZ_2$ 的取值范围为______.

**三、解答题(60 分，每小题 20 分)**

13. 数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$满足：$\{a_n+b_n\}$是等差数列，$\{a_n-b_n\}$是公比不为

$\pm 1$ 的等比数列，$c_n = a_n^2 + b_n^2$ 且 $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 2$. 求 $\{a_n\}$.

14. $l$ 是双曲线 $a$：$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$ 的 1 条切线，切点为 $T$. $l$ 交 $a$ 的渐近线于 $A$、$B$ 两点. 线段 $AB$ 中点为 $M(2,1)$.

椭圆 $\dfrac{x^2}{a_0^2} + \dfrac{y^2}{b_0^2} = 1 \quad (a_0, b_0 > 0)$ 的两个端点为 $C(0, b_0)$、$D(a_0, 0)$ 且 $O$、$T$ 在 $CD$ 异侧，$\angle CTD$ 的两条平分线（内平分线和外角平分线）交 $x$ 轴于 $E$、$F$. $\triangle TEF$ 面积为 $S$. 求：

(1) 点 $T$ 的坐标. (2) 使 $S$ 达到最小值的 $CD$ 中点的轨迹方程.

15. 正三棱锥 $S—ABC$ 中，$AB = 4$，$\triangle ABC$ 为正三角形. $A'$、$B'$、$C'$ 分别为 $SA$、$SB$、$SC$ 的中点. $A'B'$ 的中点为 $D$. 四面体 $S—ABC'$ 的外接球球心为 $O$，若 $OC^2 - OD^2 = AB^2$ 成立，试求 $S—ABC$ 的体积.

## 第 二 试

（总分 150 分，时量 120 分钟）

**一、(50 分)**

$\odot O$、$\odot I$ 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆，$\odot O$ 半径为 6，$\odot I$ 半径为 2. $\odot I$ 分别切 $AB$、$AC$、$BC$ 于点 $F$、$E$、$D$，$M$ 为 $\triangle DEF$ 的重心. 试求 $\dfrac{IM}{OM}$ 的值.

**二、(50 分)**

实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均大于 0 （$n$ 是 1 个不小于 4 的自然数）且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ 成立.

试求 $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k^2}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} \quad (a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2)$ 的最大值.

**三、(50 分)**

某天晚上 21 个人之间通了电话，某好事者发现，这些人共进行了 102 次通话，且每两个人之间至多通一次电话。最后他还发现，存在 $m$ 个人，他们中第 1 个与第 2 个通了话，第 2 个与第 3 个通了话…第 $m-1$ 个与第 $m$ 个通了话，第 $m$ 个又与第 1 个通了话讲的是同一件事，但他不肯透漏 $m$ 的具体数值，只肯说 $m$ 是个奇数。求证，21 个人中必存在 3 个人，他们两两通了话.

# 答案与分析

## 第　一　试

**一、选择题(36 分,每小题 6 分)**

1. A

显见$A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$

$B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

至于 $C$. $|2x^2-11x+10|\geqslant|3x-2|\Leftrightarrow(2x^2-11x+10)^2-(3x-2)^2\geqslant0$
$\Leftrightarrow(2x^2-8x+8)(2x^2-14x+12)\geqslant0\Leftrightarrow(x-2)^2(x-1)(x-6)\geqslant0$

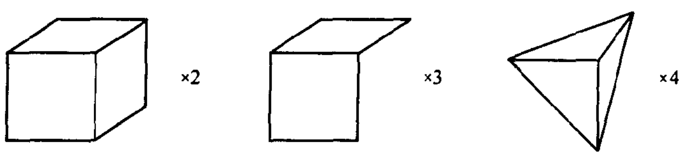
所以 $C=\{x\mid x\leqslant1$,或 $x\geqslant6$ 或 $x=2,x\in\mathbf{Z}\}$

所以 $\overline{C}=\{3,4,5\}$

所以 $A\cap B\cap\overline{C}=\{3,4,5\}$.它有 $2^3-1=7$ 个真子集.

2. D

命题 1. 分法如图所示




命题 2. 设正方体为 $ABCD-A'B'C'D'$. $O$ 为其中心,$P$ 为空间任一点则 $PA+PC'\geqslant AC'$,$PB+PD'\geqslant BD'$,$PC+PA'\geqslant CA'$,$PD+PB'\geqslant DB'$.

所以 $PA+PB+PC+PD+PA'+PB'+PC'+PD'\geqslant AC'+BD'+CA'+DB'$等号当且仅当 $P=0$ 成立.

3. D

由函数图像可以立即得出结论.

4. B

$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 内切时,对任意 $r$,存在 1 个半径为 $r$ 的圆与它们都外切;$r\neq3.7$ 时,也存在一个圆与它们都内切;$0<r<4$ 时,存在两个圆与$\odot O_1$ 外切与$\odot O_2$ 内切;$r=4$ 时,恰存在 1 个圆与$\odot O_1$ 外切,与$\odot O_2$ 内切;$r>4$ 时,这种圆不存在. 故$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 内切时,与它们都相切的圆的个

数为：

$0<r<3$　4 个；　$r=3$　3 个；　$3<r<4$　4 个；　$r=4$　3 个；

$4<r<7$　2 个；　$r=7$　1 个；　$r>7$　2 个.

$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切时，对 $r\neq 3$ 存在一个半径为 $r$ 的圆与 $\odot O_1$ 内切，与 $\odot O_2$ 外切；对 $r\neq 7$ 存在 1 个半径为 $r$ 的圆与 $\odot O_1$ 外切，与 $\odot O_2$ 内切；对 $0<r<10$，不存在这样的圆，它同时与 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 内切；$r=10$ 时，恰有 1 个圆与 $\odot O_1$，$\odot O_2$ 内切；$r>10$ 时，有两个圆与 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 内切；对任意 $r>0$，有两个圆，它们均与 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切. 故 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切时，与它们都相切的圆的个数为：

$0<r<3$　4 个；　$r=3$　3 个；　$3<r<7$　4 个；　$r=7$　3 个；

$7<r<10$　4 个；　$r=10$　5 个；　$r>10$　6 个.

综上，$r=3$、4、7 时，可能恰有 3 个圆同时与 $\odot O_1$，$\odot O_2$ 相切.

5. B

令 $w=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}$　$f(x)=(1+x+\cdots+x^{p-1})^{p+1}$

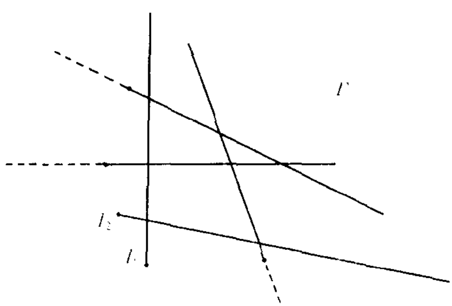
因为 $1+w^i+\cdots+(w^i)^{p-1}=\frac{w^{ip}-1}{w^i-1}=0$　$(i=1,2\cdots p-1)$

所以 $f(w^i)=0$　$1\leqslant i\leqslant p-1$　$f(1)=p^{p+1}$.

$f(1)+f(w)+\cdots+f(w^{p-1})=pa_0+a_1(1+w+\cdots+w^{p-1})+a_2(1+w^2+\cdots+w^{2(p-1)})+\cdots+a_{p^2-1}(1+w^{p^2-1}+\cdots+w^{(p^2-1)(p-1)})=p(a_0+a_p+\cdots+a_{p^2-p})$

所以 $a_0+a_p+\cdots+a_{p^2-p}=p^p$.

6. B




设 $n$ 条直线已把平面分成 $M_n$ 个部分. 取足够大的 1 个圆 $\odot O$，使它包含所有交点，如图，作两条射线 $l_1$，$l_2$. 使 $\odot O$ 在它们分出的一个部分 $\Gamma$ 中对 $n$ 条直线中的每一条. 它总有一部分不在 $\Gamma$ 中. 在其

上任取 1 点,并保留下以之为端点,且穿过 $\Gamma$ 的一部分(这是一条射线),则 $n+2$条射线把平面分成了至少 $M_{n+1}$个部分.所以 $N_{n+2}\geqslant M_{n+1}>M_n$.

**二、填空题(54 分,每小题 9 分)**

7. $(2,0)$

点 $p$ 到点$(-1,0)$与点$(1,0)$的距离和为 4.

所以点 $p$ 轨迹方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\quad(x\neq-2)$.

所以到原点距离最远的点为$(2,0)$.

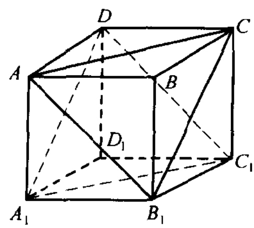
8. $\{x\mid x\in(k\pi+\arctan\frac{4}{3},k\pi+\arctan2)\cup(k\pi+\arctan2,k\pi+\arctan4)k\in\mathbf{Z}\}$

$\dfrac{1}{\dfrac{2}{\tan x}-1}>2$ 或 $\dfrac{1}{\dfrac{2}{\tan x}-1}<-2$,并注意 $\tan x\neq0$.

可得 $\tan x\in\left(\dfrac{4}{3},2\right)\cup(2,4)$

所以 $x\in\left(k\pi+\arctan\dfrac{4}{3},k\pi+\arctan2\right)\cup(k\pi+\arctan2,k\pi+\arctan4)k\in\mathbf{Z}$.

9. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$




注意到 $CB_1/\!/A_1D,A_1C_1/\!/AC$.

故所求的距离即为平面 $ACB_1$ 与 $DA_1C_1$ 间的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

10. 96

$A$、$B$、$C$ 的颜色两两不同.它们有 $4\times3\times2=24$ 种染法.

对其中任一种(不妨设 $A-a\quad B-b\quad C-c$.另一颜色为 $d$),

则 $D$ 可染$b$、$d$,$E$ 可染$c$、$d$,$F$ 可染$a$、$d$.

而 $D$、$E$、$F$ 两两相邻,至多 1 个染 $d$ 色,所以共有 $1+3=4$ 种染法,

所以不同染法有 $4\times24=96$ 种.

11. $3\sqrt{6}+4\sqrt{2}$

令 $A(1,1)$、$B(1,-2-\sqrt{3})$、$C(-4-2\sqrt{3},2)$、$P(x,y)$,则 $f(x,y)=|PA|+|PB|+|PC|$.

注意到$\angle AOB=\angle AOC=\angle BOC=120^\circ$,所以 $O$ 为$\triangle ABC$ 的费尔马点.

所以 $f$ 最小值在$P=0$ 时取得,即$|OA+|OB|+|OC|=\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{2}+$

$2\sqrt{6}+2\sqrt{2}=3\sqrt{6}+4\sqrt{2}$.

12. $[-2a,2a]$

$$Z_1-aZ_2=Z_2\overline{Z}_2Z_1-\frac{Z_1\overline{Z}_1Z_2}{a}=\frac{Z_1Z_2}{a}(a\overline{Z}_2-\overline{Z}_1)=\overline{Z}_1-a\overline{Z}_2=\overline{Z_1-aZ_2}$$

所以 $Z_1=aZ_2\in\mathbf{R}$. 又 $0\leqslant|Z_1-aZ_2|\leqslant|Z_1|+a|Z_2|=2a$

$Z_1=a\quad Z_2=-1$ 时 $Z_1-aZ_2=2a\qquad Z_1=-aZ_2=1$ 时 $Z_1-aZ_2=-2a$

又 $Z_1-aZ_2$ 连续变化，所以 $Z_1-aZ_2$ 值域为$[-2a,2a]$.

**三、解答题(60 分，每小题 20 分)**

13. 设 $a_n+b_n=a_0+d_n\quad(n\in\mathbf{N})\quad a_n-b_n=p_0q^n\quad(n\in\mathbf{N})\quad q\neq0,\pm1$.

所以 $c_n=a_n^2+b_n^2=\frac{1}{2}[(a_n+b_n)^2+(a_n-b_n)^2]$

$$=\frac{1}{2}[(a_0+d_n)^2+p_0^2q^{2n}]$$

因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=1$，所以 $|q|<1$，$\lim\limits_{n\to+\infty}p_0^2q^{2n}=0$.

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}(a_0+d_n)^2$，$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_0+d_n)^2=2,d=0,a_0=\pm2$.

所以$\{a_n\}$的通项公式为：$a_n=1+\frac{1}{2}p_0q^n$ 或 $a_n=\frac{1}{2}p_0q^n-1$ 这里 $p_0$ 是任意非零实数，$q$ 是任意满足 $0<|q|<1$ 的实数.

14. (1) 设 $T(x_0,y_0)$则 $l:\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ ①

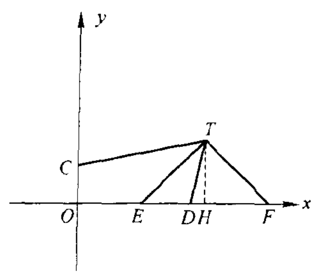
$C_1$ 的渐近线为 $y=\pm\frac{b}{a}x$

分别代入①可得 $x=\left(\frac{x_0}{a^2}-\frac{y_0}{ab}\right)^{-1}$ 与 $x=\left(\frac{x_0}{a^2}+\frac{y_0}{ab}\right)^{-1}$

所以由 $M$ 是$AB$ 中点可知：

$$4=\left(\frac{x_0}{a^2}-\frac{y_0}{ab}\right)^{-1}+\left(\frac{x_0}{a^2}-\frac{y_0}{ab}\right)^{-1}$$

$$=\frac{2a^2b^2x_0}{b^2x_0^2-a^2y_0^2}$$




因为$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，所以 $2x_0=4$，$x_0=2$.

同理，把 $x=\pm\frac{b}{a}y$ 代入①可得

$y_0=1$.

所以 $T(2,1)$.

(2) 因为 $TE$、$TF$ 是$\angle CTD$ 的内外角平分线,

所以$\angle ETF=\frac{\pi}{2}$(不妨设 $E$ 在 $F$ 左边).

作 $TH\perp EF$ 于 $H$,则 $H(2,0)$.

设$\angle ETH=\alpha$,所以 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

此时

$$S_{\triangle TEF}=\frac{1}{2}TE\times TF$$
$$=\frac{1}{2}\frac{TH}{\cos\alpha}\cdot\frac{TH}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$
$$=\frac{1}{\sin^2\alpha}\geqslant 1$$ 等号当且仅当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$,即 $E(1,0)F(3,0)$时成立.

另一方面.考察椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$,对于它,$C$ 为$(0,1)$,$D$ 为$(2,0)$.

另由它决定的 $E$、$F$ 恰为$(1,0)$与$(3,0)$,故 $S$ 的最小值为 1.

对于所有使 $E$、$F$ 为$(1,0)(3,0)$的椭圆,$D$ 在线段 $EF$ 上(因为 $O$、$T$ 在 $CD$ 异侧)设 $\tan\angle DTE=k$ 则 $k\in(0,+\infty)$而另一方面,$\tan\angle ETC=k$.

$C$ 在 $y$ 轴正半轴上.所以 $k>\tan\angle OTE=\frac{1}{3}$,所以 $k\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.

$D\neq H$ 时,$TD$ 斜率存在.设之为 $k_1$.

注意到直线 $TD$ 与 $TC$ 关于 $TE$ 对称.而 $TE$ 斜率为 1.

所以$TC$ 斜率为$\frac{1}{k_1}$;

$$\tan\angle DTE=\frac{k_1-1}{1+k_1}=k;$$

$$k_1=\frac{1+k}{1-k}.$$

因为$TD$:$y-1=k_1(x-2)$,所以 $D$ 的横坐标 $x$ 满足 $y-1=\frac{1+k}{1-k}(x-2)$;

$$D\left(\frac{3k+1}{k+1},1\right).$$

$TC$:$y-1=\frac{1}{k_1}(x-2)$,所以 $C$ 的纵坐标 $y$ 满足 $y-1=\frac{1-k}{1+k}x-2$;

$$C\left(0,\frac{3k-1}{k+1}\right).$$

所以 $CD$ 中点 $N$ 为 $\left(\dfrac{3k+1}{2(k+1)},\dfrac{3k-1}{2(k+1)}\right)$.

设 $N(x,y)$,所以 $x+y=\dfrac{3k}{k+1}$, $x-y=\dfrac{1}{k+1}$.

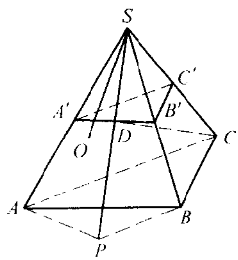
所以 $k=\dfrac{x+y}{3-x-y}$,且 $k=\dfrac{1-x+y}{x-y}$.

所以$\dfrac{x+y}{3-x-y}=\dfrac{1-x+y}{x-y}$即 $4x-2y-3=0$.

注意到 $k\in\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$,所以由 $x=\dfrac{3k+1}{3(k+1)}$. 所以 $x\in\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{3}{2}\right)$.

故所求的 $CD$ 中点的轨迹方程为 $4x-2y-3=0$, $x\in\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{3}{2}\right)$.

15. 在面 $SAB$ 上作点 $P$,使 $SP\perp AB$, $PA\perp SA$, $PB\perp SB$.




因为 $SA=SB$,所以 $P$ 存在,且 $S$、$A$、$B$、$P$ 共圆. 所以 $P$ 在球 $O$ 上.

因为 $OA=OB$, $SA=SB$,所以 $O$ 在 $AB$ 的中垂面上. 所以 $O$、$C'$、$S$、$P$ 共面;

$O$ 为 $\triangle SC'P$ 的外心. 因为 $SP\perp AB$,所以 $S$、$D$、$P$ 共线;

$\angle PDB'=\angle PBB'=90°$. 所以 $P$、$B$、$B'$、$D$ 共圆;

$SC'\cdot SC=SB'\cdot SB=SD\cdot SP$.

而 $C$、$C'$、$S$、$D$、$P$ 共面,所以 $C'$、$C$、$D$、$P$ 共圆;

$\angle SCD=\angle SPC'=\dfrac{1}{2}\angle SOC'=90°-\angle OSC$.

因为 $SO\perp CD$, $SO\perp A'B'$,所以 $SO\perp$面 $CA'B'$.

$$
\begin{aligned}
SC^2-SB'^2&=OC^2-OB'^2=OC^2-OD^2-DB'^2\\
&=AB^2-\left(\frac{1}{4}AB\right)^2\\
&=\frac{15}{16}AB^2
\end{aligned}
$$

因为 $SB'=\dfrac{1}{2}SB=\dfrac{1}{2}SC$,所以$\dfrac{3}{4}SC^2=\dfrac{15}{16}AB^2$.

所以 $SC^2=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{15}{16}\times4^2=20$,所以 $SC=2\sqrt{5}$;

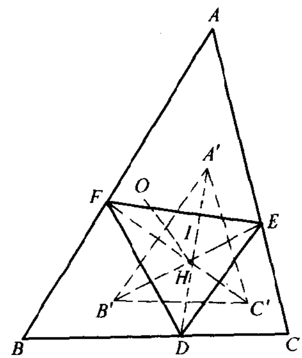
$S-ABC$ 中面 $ABC$ 上的高长为$\sqrt{SC^2-\frac{1}{3}AB^2}=\frac{2}{3}\sqrt{33}$；

$V_{S-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2\times\frac{2\sqrt{33}}{3}=\frac{8\sqrt{11}}{3}$.

## 第二试

**一、(50分)**

作$\triangle DEF$ 的垂心 $H$，设 $DH$、$EH$、$FH$ 分别交$\odot I$ 于$A'$,$B'$,$C'$(如图).




则$\angle HA'C'=\angle DFC'=\angle DEB'=\angle DA'B'$.

同理$\angle HC'A'=\angle HC'B'$，所以 $H$ 为$\triangle A'B'C'$内心.

因为$\angle DEB'=\angle DFC'$，所以 $D$ 为$\overset{\frown}{B'DC'}$中点，所以 $B'C'\parallel BC$($BC$ 切$\odot I$ 于$D$).

同理 $A'B'\parallel AB$　$A'C'\parallel AC$.

所以$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$. 而 $O$、$I$ 分别为$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$外心，$I$、$H$ 分别为$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$内心，所以 $\frac{OI}{HI}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{6}{2}=3$.

因为 $OI$、$IH$ 是$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$中的对应线段.

所以 $OI$ 与 $BC$ 所成角等于 $IH$ 与 $B'C'$所成角.

因为 $BC\parallel B'C'$，所以 $O$、$I$、$H$ 共线.

另一方面 $I$、$M$、$H$ 分别为$\triangle DEF$ 的外心、重心、垂心.

由欧拉定理，$I$、$M$、$H$ 共线且 $IM=\frac{1}{2}MH=\frac{1}{3}IH$.

所以 $OM=OI+IM=IM+3IH=10IM$.

$\frac{IM}{OM}=\frac{1}{10}$.

**二、(50分)**

令 $P=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(a_{k+1}+a_{k+2})^2}{a_k+a_{k+1}+a_{k+2}}$　　$(a_{n+1}=a_1\quad a_{n+2}=a_2)$

则 $P-S=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(a_{k+1}+a_{k+2})^2-a_k^2}{a_k+a_{k+1}+a_{k+2}}=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_{k+1}+a_{k+2}-a_k)$