

《数学学习》编辑部

王寿生

李云珠

张曾瀛 编著

周肇锡

张肇炽

孙家永 审校

130所高校研究生 高等数学入学试题 选解及分析

1979 — 1986

辽宁科学技术出版社

130所高校研究生高等数学 入学试题选解及分析

《数学学习》编辑部

王寿生 李云珠 张曾瀛 编著
周肇 锡 张肇 炽
孙家永 审校

辽宁科学技术出版社

1988年·沈阳

130所高校研究生高等数学

入学试题选解及分析

130Suo Gaoxiao Yanjiusheng Gaodeng

Shuxue Ruxue Shiti Xuanjie Ji Fenxi

《数学学习》编辑部

王寿生 李云珠 张曾源 编著

周肇锡 张肇炽

孙家永 审校

辽宁科学技术出版社出版 (沈阳市南京街6段1里2号)

辽宁省新华书店发行 朝阳新华印刷厂印刷

开本:787×1092¹/₃₂ 印张:30¹/₈ 字数:640,000 插页:2

1988年1月第1版

1988年1月第1次印刷

责任编辑:宋纯智

封面设计:曹太文

印数:1—5,642

统一书号:13288·42

定价:6.40 元

ISBN 7-5381-0297-3/O·26

前 言

高等数学是理、工、农、医、财经、经济管理以及部分社会专业研究生招生考试的必考课程和必修的基础课程之一。本书从全国一百数十所高等院校和一些科研单位自一九七九年至一九八五年的历次招生试题中，精选出了一千二百多道典型试题，并作了简明分析与解答（试题均逐一注明出处，一些先后数年乃至同一年度不同单位重复出现的试题，只标明其中一个命题单位。这里的标注，不具有任何特殊含意）。此外，还选出三套一九八六年的试题，作为附录，供读者了解1986年考题情况，并可作为读者学完本书后的自我检查题。

我们将试题及其解答按通常高等数学教学内容的顺序编排，并尽量注意到基本题型和解题方法的适当归类，以便于查阅。少数试题还安排在不同部分重复出现，用以表明不同的侧重，也在一定程度上显示了它的综合性。在内容上，我们着眼于基本概念、基本理论、基本解题方法和技巧的介绍，不少地方还作了扼要的分析和综述，以启发和帮助读者深入领会和掌握基本内容，同时也能开阔思路。从本书可以看出我国招收硕士研究生对高等数学的基本要求和这种要求的发展趋势，这无疑有助于大批有志青年更好地作好应考前的准备。同时，对理工科院校在校学生和电大、职大、夜大、函

大的学员以及广大自学读者，本书也是一本复习、巩固和提高的辅导读物。此外，它对从事高等数学教学的老师，也有一定参考价值。

本书共分六部分，编写者为王寿生（一元函数微分学）、李云珠（一元函数积分学）、张曾瀛（多元函数微分学）、周肇锡（多元函数积分学）、张肇炽（微分方程和无穷级数）。全书由国家教委工科数学课程指导委员会委员孙家永教授主审。

我们都是长期从事教学实践的教师，深深知道广大学员学习高等数学的疑难和困惑所在。我们又都是《数学学习》这本面向教学、面向大学生学习的数学杂志的编辑，通过多种渠道也有机会了解到广大读者对这门学科学习上的需求。希望本书的出版能部分地满足所有这些读者的愿望。几年来，我们对数学试题曾系统地作了一些整理和分析工作，本书也是这项工作的一点成果。趁此出版之机，谨向长期以来热情支持我们工作的全国各地高教界的同行和朋友们，表示衷心感谢！

编 者

一九八六年四月

于西北工业大学

目 录

第一篇 一元函数微分学

第一章 函数、极限、连续	1
§ 1 函数	1
§ 2 极限	16
§ 3 函数的连续性	68
第二章 导数、微分	77
§ 1 导数概念	77
§ 2 微分法	92
§ 3 中值定理	108
第三章 导数的应用	128

第二篇 一元函数积分学

第一章 不定积分	183
§ 1 分解积分法求不定积分	183
§ 2 换元积分法求不定积分	188
§ 3 分部积分法求不定积分	209
§ 4 综合应用不同积分法求不定积分	229
§ 5 一些特殊形式的不定积分	233
第二章 定积分	240
§ 1 利用定义求解定积分问题	240
§ 2 利用牛顿—莱布尼兹公式计算定积分	242
§ 3 换元积分法求定积分	251

§ 4	分部积分法求定积分	265
§ 5	利用定积分的性质及一些常用公式计算定积分	272
§ 6	应用近似算法求定积分, 并证明一些估计式	281
§ 7	变上限的定积分	284
§ 8	综合题	291
§ 9	广义积分	307
第三章	定积分应用	333
§ 1	几何方面的应用题	333
§ 2	物理、力学等方面的应用题	348

第三篇 多元函数微分学

第一章	函数、极限、连续	363
第二章	偏导数、全微分	368
§ 1	偏导数	368
§ 2	全微分	382
第三章	偏导数应用	389
§ 1	几何应用	389
§ 2	极值	391

第四篇 多元函数积分学

第一章	重积分	396
§ 1	二重积分计算	396
§ 2	计算累次积分及交换积分次序	417
§ 3	三重积分计算	430
§ 4	证明题与综合题	443
第二章	重积分应用	465
§ 1	曲面面积与平面区域面积	465
§ 2	体积	473
§ 3	物理应用	485

第三章	曲线积分及其应用	502
§ 1	第一型曲线积分计算	502
§ 2	第二型曲线积分计算	505
§ 3	综合题与证明题	531
§ 4	曲线积分应用	556
第四章	曲面积分及其应用	569
§ 1	第一型曲面积分计算	569
§ 2	第二型曲面积分计算	576
§ 3	证明题	602
§ 4	曲面积分应用	608
第五篇 常微分方程		
第一章	一阶微分方程	624
§ 1	可分离变量的方程	624
§ 2	可化为齐次的方程	630
§ 3	可化为线性的方程	633
§ 4	全微分方程 积分因子	645
第二章	高阶微分方程	654
§ 1	不显含 x 或 y 型方程	654
§ 2	$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ 型方程	664
§ 3	可用常数变易法求解的方程	667
第三章	高阶线性方程	670
§ 1	二阶常系数线性方程	670
§ 2	高阶常系数线性方程	684
§ 3	高阶变系数线性方程	688
第四章	微分方程组	697
第五章	微分方程的应用	708

第六篇 无穷级数

第一章 数项级数	750
§ 1 敛散性的直接判定	750
§ 2 比较判别法	756
§ 3 比值判别法	767
§ 4 积分判别法	771
§ 5 Leibniz 判别法	773
§ 6 数项级数求和	780
第二章 幂级数	785
§ 1 收敛半径的确定	785
§ 2 函数的幂级数展开	799
§ 3 求幂级数的和函数	818
§ 4 利用幂级数求数项级数的和	842
第三章 Fourier 级数	857
§ 1 周期函数的Fourier 展开	857
§ 2 正、余弦级数与奇、偶函数的展开	866
§ 3 周期为T的函数的 Fourier 展开	887
§ 4 利用 Fourier 级数求数项级数的和	891
第四章 一致收敛 杂题	912
§ 1 一致收敛	912
§ 2 综合题 杂题	917
附录 I 一九八六年部分高等院校 (上海交通大学等13所)* 研究生高等数学入学考试联合试题及解答	936
附录 II 一九八六年华东六省-市工科院校研究生高等数学 入学试题及解答	947

第一篇 一元函数微分学

第一章 函数、极限、连续

§ 1 函数

本节主要内容有, 求函数的定义域, 求函数的解析表达式, 函数作图以及讨论函数的性质等。

1 当 $0 < u < 1$ 时, 函数 $f(u)$ 有定义, 求函数 $f(\sin 2x)$ 的定义域。

(太原工学院1979年)

解 由题设知: $0 < \sin 2x < 1$, 故所求的定义域为:
 $\left(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{4}\right), \left(n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 。

2 指出函数 $y = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^n$ 的定义域, 并描绘该函数的图形。

(南京邮电学院1984年)

解 定义域为 $(-1, +\infty)$ 。

因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^n = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \\ \frac{\pi}{4}, & x = 1 \\ \frac{\pi}{2}, & x > 1 \end{cases}$$

所以

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 1 \\ \frac{\pi}{2}(x-1), & 1 < x \end{cases}$$

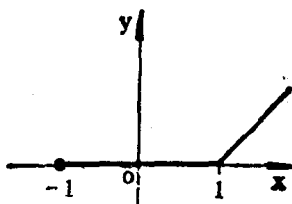


图 1-1-1

3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1)$ ，函数 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，试求

$f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ 的定义域（“ $[]$ ”为函数符号）。

（西北轻工业学院1985年）

解 要使 $0 < \frac{[x]}{x} < 1$ 成立，必须 $x > 1$ 且 $x \neq k$ ($k = 2, 3, \dots$)，所以 $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ 的定义域为 $\{x | x > 1 \text{ 且 } x \neq 2, 3, \dots\}$ 。

分析 给出函数的表达式而未给出函数的定义域时，据约定，其定义域即为使表达式有意义的所有点的集合，这类题的函数表达式中往往含有分式、根式、对数或“ $\sin^{-1}$ ”及“ $\cos^{-1}$ ”等，所以要特别注意使上述这些式子有意义的点集。对分式而言，是使分母不为0的点集；对对数而言，是使真数大于0的点集；对偶次根式而言，是使根号下的式子不小于0的点集；对反正弦、反余弦而言，是使出现在“ $\sin^{-1}$ ”或“ $\cos^{-1}$ ”记号后的式子的绝对值小于等于1的点集。

4 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, 试验证 $f[f(f(x))] = x$, 并求

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) \quad (x \neq 0, x \neq 1).$$

(华中工学院1981年)

证 设 $f_1(x) = f(x) = \frac{x}{x-1}$; $f_2(x) = f[f_1(x)]$; $\dots$;

$f_n(x) = f[f_{n-1}(x)]$. 现在只需证 $f_4(x) = x$.

$$\because f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}, \quad \frac{1}{f(x)} = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\therefore f_2(x) = f[f_1(x)] = f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{1 - \frac{1}{f(x)}}$$

$$= \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = x,$$

$$f_3(x) = f[f_2(x)] = f(x) = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}},$$

$$f_4(x) = f[f_3(x)] = f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = f_2(x) = x$$

下面再求 $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$

$$\because \frac{1}{f(x)} = 1 - \frac{1}{x},$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x} - 1} = 1 - x$$

($x \neq 0, x \neq 1$)

5 设 $z = x + y + f(x - y)$, 当 $y = 0$ 时, $z = x^2$, 求函数 f 及 z 。

(北京航空学院1979年)

解 由 $y = 0$ 时 $z = x^2$ 得 $f(x) = x^2 - x$, 因此 $f(x - y)$
 $= (x - y)^2 - (x - y)$ 。所以

$$z = x + y + (x - y)^2 - (x - y) = 2y + (x - y)^2$$

6 设 $f(0) = 15, f(2) = 30, f(4) = 90$, 求形状为 $f(x) = a + bc^x$ 的函数。

(大连铁道学院1979年)

解 将 $f(0) = 15, f(2) = 30, f(4) = 90$ 代入 $f(x) = a + bc^x$ 中, 得

$$\begin{cases} a + bc^0 = 15 \\ a + bc^2 = 30 \\ a + bc^4 = 90 \end{cases}$$

解之得 $a = 10, b = 5, c = 2$ (已舍去负根), 故所求函数为

$$f(x) = 10 + 5 \cdot 2^x$$

7 设函数 $f(x)$ 的定义域和值域均为 $x > 0$, 命 $f_0(x) = f(x), f_n(x) = f[f_{n-1}(x)], n \geq 1$ 。若有 $f_{n+1}(x) = [f_n(x)]^2$, 求 $f_3(x)$ 。

(华中工学院1984年)

解 $f_{n+1}(x) = f[f_n(x)] = [f_n(x)]^2$

$\therefore f_0(x) = x^2 = f(x),$

$f_1(x) = [f(x)]^2 = x^4,$

$f_2(x) = x^8, f_3(x) = x^{16}$

分析 求函数表达式的问题，关键在于正确理解和使用函数的记号，完全掌握了函数记号之后，这类问题就显得并不困难了。

8 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{当 } x \neq 0, \\ 1, & \text{当 } x = 0, \end{cases} \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

①求 $f(x)$ 的增、减区间；②求 $f(x)$ 的极值，最大值和最小值；③作出函数 $f(x)$ 图形（不必求拐点和曲线的凹向）。

（注： $\operatorname{tg} x - x = 0$ 在 $(0, 2\pi)$ 内有唯一的根 $x_1 \approx 4.50$, $\sin 4.50 \approx -0.978$ ）

（大连工学院1984年）

解 ①因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = 0$ ，所以

$f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, & \text{当 } x \neq 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \end{cases}$

令 $f'(x) = 0$ ，当 $x \neq 0$ 时，在 $(0, 2\pi)$ 内有唯一实根 $x_1 \approx 4.50$ ；当 $x = 0$ 时， $f'(0) = 0$ 。又因 $f(x)$ 为偶函数，故可分成下列几个区间：

$(-2\pi, -x_1), (-x_1, 0), (0, x_1), (x_1, 2\pi)$

在 $(0, x_1)$ 内 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减少; 在 $(x_1, 2\pi)$ 内 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增加。

② 极值: $f(0) = 1$, $f(x_1) \approx f(4.50) \approx -\frac{0.978}{4.50}$,

$f(-x_1) = -\frac{0.978}{4.50}$; 端点函数值: $f(2\pi) = 0$, $f(-2\pi) = 0$;

最大值: $f(0) = 1$; 最小值: $f(x_1) \approx -\frac{0.978}{4.50}$ 。

③ 函数图形

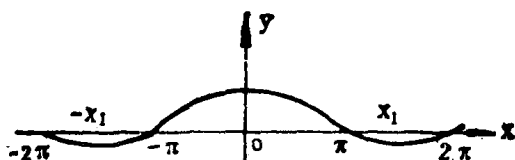


图 1-1-2

9 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(1 + \sin \pi x)^n + \sin \pi x}{(1 + \sin \pi x)^n + 1}$ (n 为正整

数), 试作出 $y = f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的函数图形。

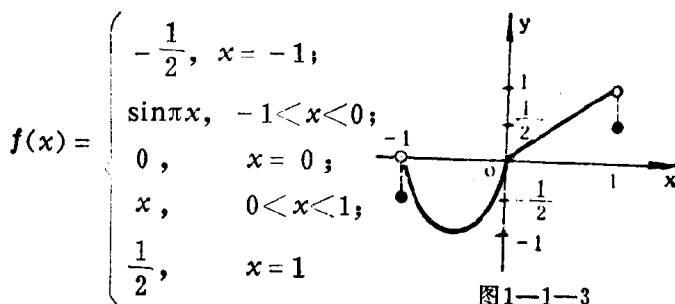
(上海交通大学1984年)

解 当 $-1 < x < 0$ 时, $0 \leq 1 + \sin \pi x < 1$, 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时, $(1 + \sin \pi x)^n \rightarrow 0$, 此时 $f(x) = \sin \pi x$ 。

当 $0 < x < 1$ 时, $1 + \sin \pi x > 1$, 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时, $(1 + \sin \pi x)^n \rightarrow +\infty$, 此时

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{\sin \pi x}{(1 + \sin \pi x)^n}}{x + \frac{1}{(1 + \sin \pi x)^n}} = x$$

又 $f(0) = 0$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, 而 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \sin \pi x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, 所以



其图形见图1-1-3

10 设 $F(x) = \int_0^a f(x+y)dy$, 其中 $a > 0$, $f(u)$ 为

处处有定义且单调增加的连续函数, 试讨论 $F(x)$ 的增减性。

(天津大学1980年)

解 任取 $x_2 > x_1$, 由所设,
有

$$f(x_2 + y) > f(x_1 + y)$$

又 $a > 0$, 故有

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_0^a f(x_2 + y) dy - \int_0^a f(x_1 + y) dy \\ &= \int_0^a [f(x_2 + y) - f(x_1 + y)] dy > 0 \end{aligned}$$

亦即 $F(x_2) > F(x_1)$ ，所以 $F(x)$ 为单调增函数。

11 设连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加，证明 $F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$ 在 (a, b) 上单调增加。

(上海工业大学1984年)

证法 1

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{f(x)}{x-a} - \frac{\int_a^x f(t) dt}{(x-a)^2} = \frac{f(x)}{x-a} - \frac{f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2} \\ &= \frac{f(x) - f(\xi)}{x-a}, \text{ 其中 } a < \xi < x \leq b \end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加，所以 $f(x) - f(\xi) > 0$ ，故 $a < x \leq b$ 时，由于 $x-a > 0$ ，有 $F'(x) > 0$ ，即 $F(x)$ 在区间 $a < x \leq b$ 上单调增加

证法 2

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{f(x)}{x-a} - \frac{\int_a^x f(t) dt}{(x-a)^2} = \frac{\int_a^x f(x) dt - \int_a^x f(t) dt}{(x-a)^2} \\ &= \frac{\int_a^x [f(x) - f(t)] dt}{(x-a)^2} > 0 \end{aligned}$$

这是因为当 $a \leq t < x$ 时， $f(x) - f(t) > 0$ 之故，因此 $F(x)$ 在