

中国统计出版社

概率论与数理统计 基本题

张金峰

中国统计出版社

新世纪大学数学自学辅导丛书

概率论与数理统计 基 本 题

范金城



A0959973

西安交通大学出版社
·西安·

内 容 提 要

本书精选了 755 道概率论与数理统计基本题,其中包括全国高等教育自学考试指定教材《工程数学——概率论与数理统计》中绝大多数习题,书中对例题给出了详细解答和注释,对练习题给出了提示和答案.

本书的读者对象是参加高等教育自学考试的人员,大学本科生、成人教育各专业的学生及工程技术人员,以及相关课程教师.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计基本题/范金城编. - 西安:西安
交通大学出版社,2001.9
(新世纪大学数学自学辅导丛书)
ISBN 7-5605-1454-5

I. 概… II. 范… III. ①概率论-高等教育-自
学考试-解题②数理统计-高等教育-自学考试-解题
IV. 021-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 061594 号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市兴庆南路 25 号 邮政编码:710049 电话:(029)2668315)
陕西宝石兰印务有限责任公司印装
各地新华书店经销

*

开本:850 mm×1168 mm 1/32 印张:14.625 字数:368 千字
2001 年 10 月第 1 版 2001 年 10 月第 1 次印刷
印数:0001~5 000 定价:17.00 元

发行科电话:(029)2668357,2667874

总 前 言

自学能成才,这是毫无异议的.自学能不能成为高级人才?对大多数人而言,是有疑问的.成才的关键在于人的努力.其中提高数学课程的学习质量,加强数学素养,对于创造性人才的培养是十分重要的.我们编写这套丛书的目的,正是想帮助读者打好扎实的数学基础.

学好数学,要作一定量的习题,但决不是题作的越多越好,更不是难题作得越多越好.而是要适量.特别要注意练习的质量.我们提倡“精练”,即对解题的思路、方法要吃透;要研究练习题与教材中知识点的关系;要研究一些练习题之间的联系;要尽量作到一题多解,一题多变.为此,我们不仅对每道题作了解答,而且还加了注释,画龙点睛式地提示上述问题的要领.读者一定要认真看看这些注释.

读数学书不像读别的书,读者应把例题当作习题,看清题后先自己动手作,实在作不出时,再看解答,看懂了再离开书自己作,然后再看看注释,想一想自己开始为什么不会,解这道题的主要方法是什么…….这样,把一道道题都弄明白,过一些日子后,还要回过头,反复作这些题.反复时要想一想练这些题的目的,总结解题思路,练习基本技巧;反复时,总要想想这些题有没有不同的解法,等等.对待每道题,要像艺术家对待其作品一样,作到精雕细刻.这样反复练这些精选的题,我们认为就能将数学课程学深学透,这也就是我们所谓的“训练有素”的意思.

俗话说,“熟能生巧”,当我们围绕自学考试大纲及指定教材编选例题时,自然地想到,如果同学们能像上面所说的反复练习这些基本题,那么,掌握解一些更难题的技巧,也是水到渠成的事.于是我们便又精选了一些估计读者不难接受的较深的少许例题.

我们感到,作为基础的数学课程,自学考试,成人教育乃至正

规大学的本科生,要求基本上是一样的,我们认为,这一套书在主要编选一批基本题的基础上,还适当地扩充了其深广度,因此我们希望它的功能可以更多些,即主要是供参加自学考试者参考,也可供上述各方面的读者们作参考.希望它能受到相关读者的喜爱.

龚冬保

2001年8月

于西安交通大学

前 言

这里奉献给诸位读者《概率论与数理统计基本题 解法·技巧·注释》是“新世纪大学数学自学辅导丛书”之一,本书的主要参考教材是全国高等教育自学考试指定教材《工程数学——概率论与数理统计》(范金城编,辽宁大学出版社出版,1999).本书的框架与上述教材相同,包括了该教材绝大多数习题的详细解答.本书的对象主要是参加高等教育自学考试的人员,也可供本科学生、成人教育各专业的学生、准备考研人员及工程技术人员学习时参考.

要学好数学必须反复练习,多做练习题,尤其要多做基本题,练就基本功.在反复练习的过程中,会加深对基本内容的理解,只有多做题,才能逐步进入知识的海洋,知识的森林.基于这一观点,本书注意了选题的广度与深度,并不强调区分基本内容与备选内容,而是在反复练习中领会学习内容及其内在联系.

本书的特色是数理统计部分(第6至第9章).尤其在第9章中,提供了一些综合性的习题,同时包括了参数估计、假设检验、回归分析与方差分析的基本内容,且这些习题很有实用价值,可供广大自学人员与技术人员参考.

为节省篇幅,本书未附常用数理统计用表.书中提及的附表1指“标准正态分布表”,附表2指“泊松分布表”,附表3指“t分布表”,附表4指“ χ^2 分布表”,附表5指“F分布表”.除自考教材外,这些表可在其它概率统计教材中找到.

若要与教材紧密配套使用.请使用本书附录2:教材习题与本书例题题号对照表.

编者

2001年7月

于西安交通大学

目 录

第 1 章 随机事件与概率

1.1 客观题	(1)
1.1.1 填空题	(1)
1.1.2 单项选择题	(5)
1.2 非客观题	(11)
1.2.1 随机事件及其运算	(11)
1.2.2 概率的性质与古典概型	(15)
1.2.3 条件概率、全概率公式与贝叶斯公式	(19)
1.2.4 事件的独立性与贝努利概型	(32)
1.3 独立作业 I	(46)
1.3.1 填空题	(46)
1.3.2 单项选择题	(47)
1.3.3 计算题与应用题	(49)
1.3.4 证明题	(51)
1.3.5 独立作业 I 答案及提示	(52)

第 2 章 随机变量与概率分布

2.1 客观题	(55)
2.1.1 填空题	(55)
2.1.2 单项选择题	(61)
2.2 非客观题	(65)
2.2.1 离散随机变量	(65)
2.2.2 连续随机变量	(72)
2.2.3 分布函数与正态分布概率计算	(75)
2.2.4 随机变量的函数	(87)
2.3 独立作业 II	(92)
2.3.1 填空题	(92)

2.3.2 单项选择题	(94)
2.3.3 计算题与应用题	(97)
2.3.4 证明题	(100)
2.3.5 独立作业 II 答案及提示	(100)

第 3 章 随机向量

3.1 客观题	(107)
3.1.1 填空题	(107)
3.1.2 单项选择题	(112)
3.2 非客观题	(116)
3.2.1 二维随机向量	(116)
3.2.2 二维随机向量的分布函数与边缘分布	(125)
3.2.3 随机变量的独立性与独立随机变量之和的概率分布	(132)
3.3 独立作业 III	(141)
3.3.1 填空题	(141)
3.3.2 单项选择题	(143)
3.3.3 计算题与应用题	(145)
3.3.4 证明题	(147)
3.3.5 独立作业 III 答案及提示	(148)

第 4 章 随机变量的数字特征

4.1 客观题	(157)
4.1.1 填空题	(157)
4.1.2 单项选择题	(161)
4.2 非客观题	(165)
4.2.1 期望与方差	(165)
4.2.2 协方差、相关系数及矩	(187)
4.3 独立作业 IV	(195)
4.3.1 填空题	(195)
4.3.2 单项选择题	(197)

4.3.3 计算题与应用题	(199)
4.3.4 证明题	(202)
4.3.5 独立作业IV答案及提示	(202)

第5章 大数定律与中心极限定理

5.1 客观题(填空题)	(216)
5.2 非客观题	(218)
5.2.1 切比雪夫不等式与大数定律	(218)
5.2.2 中心极限定理	(226)
5.3 独立作业V	(233)
5.3.1 填空题	(233)
5.3.2 应用题	(234)
5.3.3 证明题	(235)
5.3.4 独立作业V答案及提示	(236)

第6章 样本及抽样分布

6.1 客观题	(241)
6.1.1 填空题	(241)
6.1.2 单项选择题	(245)
6.2 非客观题	(247)
6.2.1 总体、样本及样本的数字特征	(247)
6.2.2 统计量与抽样分布	(253)
6.3 独立作业VI	(267)
6.3.1 填空题	(267)
6.3.2 单项选择题	(268)
6.3.3 计算题与应用题	(269)
6.3.4 独立作业VI答案及提示	(271)

第7章 参数估计

7.1 客观题	(276)
7.1.1 填空题	(276)
7.1.2 单项选择题	(282)

7.2 非客观题	(285)
7.2.1 参数的点估计	(285)
7.2.2 估计量的评选标准	(296)
7.2.3 参数的区间估计	(306)
7.3 独立作业Ⅶ	(317)
7.3.1 填空题	(317)
7.3.2 单项选择题	(319)
7.3.3 计算题与应用题	(320)
7.3.4 证明题	(322)
7.3.5 独立作业Ⅶ答案及提示	(323)
第8章 假设检验	
8.1 客观题	(331)
8.1.1 填空题	(331)
8.1.2 单项选择题	(335)
8.2 非客观题	(337)
8.2.1 假设检验基本概念	(337)
8.2.2 正态总体均值与方差的假设检验	(341)
8.2.3 非正态总体参数的假设检验	(354)
8.2.4 总体分布假设的 χ^2 检验法	(357)
8.3 独立作业Ⅷ	(367)
8.3.1 填空题	(367)
8.3.2 单项选择题	(370)
8.3.3 计算题与应用题	(372)
8.3.4 证明题	(374)
8.3.5 独立作业Ⅷ答案及提示	(375)
第9章 回归分析与方差分析	
9.1 客观题	(382)
9.1.1 填空题	(382)
9.2 非客观题	(385)

9.2.1 一元线性回归	(385)
9.2.2 单因素方差分析	(408)
9.2.3 回归分析与方差分析的进一步讨论	(422)

附录 1 概率论与数理统计试题

I 2000 年上半年高等教育自学考试全国统一命题考试	(436)
II 2001 年上半年高等教育自学考试全国统一命题考试	(443)

附录 2 教材习题与本书例题题号对照表

第1章 随机事件与概率

1.1 客观题

1.1.1 填空题

1-1 设 A, B, C 表示 3 个随机事件, 试以 A, B, C 的运算来表示下列事件:

(1) $\{A, B, C \text{ 恰有 1 个发生}\}$ 表示为_____.

(2) $\{A, B, C \text{ 不多于 1 个发生}\}$ 表示为_____.

解 (1) 填 $\overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C}$; (2) 填 $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}\overline{C}$.

(1) $\{A, B, C \text{ 恰有 1 个发生}\}$ 是一个较复杂的事件, 它可以分解为 $\{A \text{ 发生, 而 } B, C \text{ 不发生}\}, \{B \text{ 发生, 而 } A, C \text{ 不发生}\}, \{C \text{ 发生, 而 } A, B \text{ 不发生}\}$, 它们可以分别表示为 $\overline{A}\overline{B}C, \overline{A}B\overline{C}, A\overline{B}\overline{C}$. 这 3 个事件是互不相容的, 它们的和事件即为所要表示的事件.

(2) 所述事件可以分解为 $\{A \text{ 发生, } B, C \text{ 不发生}\}, \{B \text{ 发生, } A, C \text{ 不发生}\}, \{C \text{ 发生, } A, B \text{ 不发生}\}, \{A, B, C \text{ 都不发生}\}$, 它们分别表示为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}, \overline{A}B\overline{C}, A\overline{B}\overline{C}$ 与 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, 它们的和事件为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

1-2 在 5 个数字 1, 2, 3, 4, 5 中任取一数, $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$, 则

(1) $\overline{A}B =$ _____;

(2) $\overline{A}B =$ _____;

(3) $\overline{\overline{A}B} =$ _____.

$\{A \text{ 发生, } B, C \text{ 不发生}\} = \{A \text{ 发生, 且 } \overline{B}, \overline{C} \text{ 发生}\} = \overline{A}\overline{B}\overline{C}$

与(1)比较, (2)的具体分解比(1)多了一种情况, 即 $\{A, B, C \text{ 都不发生}\} = \overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

解 (1)填 $\{4\}$; (2)填 $\{2,3,4,5\}$; (3)填 $\{1,2,3,4\}$.

$$(1) \bar{A} = \{4,5\}, B = \{2,3,4\}, \text{故 } \bar{A}B = \{4\}$$

$$(2) \bar{A} \cup B = \{2,3,4,5\}$$

$$(3) \bar{A} = \{4,5\}, \bar{B} = \{1,5\}, \bar{A}\bar{B} = \{5\},$$

$$\text{故 } \overline{\bar{A}\bar{B}} = \{1,2,3,4\}$$

1-3 设 A, B 互不相容, 且 $P(A) = p, P(B) = q$.

$$(1) P(AB) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) P(\bar{A}\bar{B}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 (1)填0; (2)填 $1 - p - q$.

(1) 因 A, B 互不相容, 故 $AB = \emptyset$, 从而 $P(AB) = P(\emptyset) = 0$

$$(2) P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B)) = 1 - p - q$$

1-4 有甲、乙2批种子, 发芽率分别为0.8和0.7. 在2批中随机地各取一粒, 则:

$$(1) 2 \text{ 粒种子都发芽的概率是 } \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \text{ 至少有 } 1 \text{ 粒种子能发芽的概率是 } \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \text{ 至多有 } 1 \text{ 粒种子能发芽的概率是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 (1)填0.56; (2)填0.94; (3)填0.44.

$$(1) p_1 = P(AB) = P(A)P(B) = 0.8 \times 0.7 = 0.56$$

$$(2) p_2 = P(A \cup B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$= 0.8 + 0.7 - 0.8 \times 0.7 = 0.94$$

此题也可以这样做:

$$\begin{aligned} p_2 &= 1 - P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) \\ &= 1 - 0.2 \times 0.3 = 0.94. \end{aligned}$$

$$(3) p_3 = P(\bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}B \cup A\bar{B})$$

$$= P(\bar{A}\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(A\bar{B})$$

$$= P(\bar{A})P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) +$$

(3)也可这样解:

$$\begin{aligned} \overline{\bar{A}\bar{B}} &= \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = A \cup B \\ &= \{1,2,3,4\}. \text{ 这里} \end{aligned}$$

对偶律很有用. 记住: $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{\bar{A}\bar{B}} = A \cup B$.

此题要看清题目条件: A, B 互不相容, 因而有 $AB = \emptyset$ 及互不相容事件的概率加法性质.

相互独立事件及概率乘法公式 $P(AB) = P(A)P(B)$ 是本章的重点. 相互独立性很多是根据实际问题的具体分析.

注意: 当 A 与 B 相互独立时, A 与 $\bar{B}$ 、 $\bar{A}$ 与 B 、 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立. 这一点经常要用到.

$$P(A)P(\bar{B}) \\ = 0.2 \times 0.3 + 0.8 \times 0.3 + 0.2 \times 0.7 = 0.44$$

1-5 设一个病人从某种心脏手术中复原的概率是 0.8, 则

(1) 有 3 个病人, 恰有 2 个人手术后存活的概率是

(2) 3 个病人中至少有 1 个不能存活的概率是

解 (1) 填 0.384; (2) 填 0.488.

(1) 由贝努利概型, 在独立重复试验中事件 A 发生的概率为 p , 则在 n 次独立重复试验中, A 发生 m 次的概率为 $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$. 现在 $p = 0.8, n = 3, m = 2$, 故

$$p_1 = C_3^2 \times 0.8^2 \times 0.2 = 0.384$$

(2) 先考虑其对立事件的概率, 即 3 个病人都存活的概率为 $0.8^3 = 0.512$, 故所求概率为

$$1 - 0.8^3 = 0.488$$

1-6 从一副扑克牌中连抽二张, 则

(1) 两张牌均为约色的概率是

(2) 第 1 张牌为红色、第 2 张牌为黑色的概率是

解 (1) 填 $\frac{25}{102}$; (2) 填 $\frac{26}{102}$.

(1) 令 $A = \{\text{第 1 张牌为红色}\}, B = \{\text{第 2 张牌为红色}\}$, 所求概率为

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \\ = \frac{26}{52} \times \frac{25}{51} = \frac{25}{102}$$

(2) 令 $A = \{\text{第 1 张牌为红色}\}, B = \{\text{第 2 张牌为黑色}\}$, 所求概率为

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{26}{52} \times \frac{26}{51} = \frac{26}{102}$$

贝努利概型求概率 $p_n(m)$ 的公式要熟记运用.

若对立事件的概率好求, 则先求对立事件概率, 再求事件概率. 这是经常运用的技巧.

因连抽 2 张为不放回抽样, 故 A, B 不独立. 计算 $P(AB)$ 时必须用一般的概率乘法公式

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$$

1-7 某地区成年人患某种癌症的概率是 0.02. 若医生能正确诊断某一癌症病人具有癌症的概率是 0.78, 而将健康人误诊为癌症患者的概率是 0.06, 则某人经诊断患有癌症的概率是_____.

解 填 0.074 4.

令 $A = \{\text{某成年人患癌症}\}$, $B = \{\text{医生诊断患有癌症}\}$. 依题意, $P(A) = 0.02$, $P(B|A) = 0.78$. 又

$$P(\bar{A}) = 0.98, \quad P(B|\bar{A}) = 0.06$$

由全概率公式

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) \\ &= 0.78 \times 0.02 + 0.06 \times 0.98 = 0.074 4 \end{aligned}$$

1-8 掷一对骰子, 则 2 个骰子点数总和是 8 的概率是_____.

解 填 $\frac{5}{36}$.

此题是古典概型, 按古典概率定义求. 掷 2 个骰子, 情况总数是 $6 \times 6 = 36$, 即 $N = 36$. 出现点数总和是 8 的情况为:

$$\{2, 6\}, \{3, 5\}, \{4, 4\}, \{5, 3\}, \{6, 2\}$$

而总和是 8 的情况数 $M = 5$, 故所求概率

$$p = \frac{M}{N} = \frac{5}{36}$$

1-9 一书架上有 5 本小说、3 诗集以及 1 本字典, 今随机选取 3 本, 则选中 2 本小说和 1 本诗集的概率是_____.

解 填 $\frac{5}{14}$.

所有可能的取法是 $C_9^3 = 84$ 种. 选中 2 本小说和选中 1 本诗集的取法有 $C_5^2 C_3^1 = 10 \times 3 = 30$. 故所求概率为

$$p = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$$

这是一个复杂事件. 因被诊断为癌症者可细分为: 癌症患者被诊断为癌症, 与健康人被诊断为癌症两种情况, 必须用全概率公式计算.

依定义求古典概率时, 必须分析各种可能出现的情况, 不要遗漏, 才能正确求得 M .

选中 2 本小说的取法有 $C_5^2 = 10$ 种, 选中 1 本诗集的取法有 $C_3^1 = 3$ 种. 由乘法定理,

$$M = 10 \times 3 = 30$$

1.1.2 单项选择题

1-10 若 $A \subset B$, 则 $A \cup B$ 是().

- (A) A (B) B (C) AB (D) $\bar{A}B$

解 选(B).

从图示法明显可看出(见图 1-1)

$$A \cup B = B$$

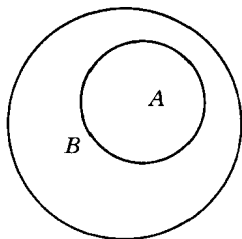


图 1-1 第 1-10 题图

此题还可这样解:

$$A \cup B = B \cup A\bar{B} = B \cup \emptyset = B$$

(因 $A \subset B$, 故 $A\bar{B} = \emptyset$).

1-11 设袋中有 4 只白球, 2 只黑球. 从袋中任取 2 只球(不放回抽样), 则取得 2 只白球的概率是().

- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

解 选(C).

$$p = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5}$$

1-12 一部五卷的选集, 按任意顺序放到书架上, 则第一卷及第五卷分别在两端的概率是().

- (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{6}$

解 选(A).

用图示法证明关于事件的运算等式比事件运算方法简便.

$A \cup B = B \cup A\bar{B}$ 是一般成立的等式.

这是古典概型题,

5本书按任意顺序放到书架上去的排法有 $5!$ 种.又第一卷及第五卷分别排在两端的排法有 $2!$ 种,第二、三、四卷在中间的排法有 $3!$ 种,配合起来的排法共有 $2! 3!$ 种,故

$$p = \frac{2! \times 3!}{5!} = \frac{1}{10}$$

1-13 已知 $A \subset B, P(A)=0.2, P(B)=0.3$, 则 $P(\overline{BA})=(\quad)$.

- (A) 0.3 (B) 0.2 (C) 0.1 (D) 0.4

解 选(C).

$$\begin{aligned} P(\overline{BA}) &= P(B-A) \\ &= P(B) - P(A) = 0.1 \end{aligned}$$

1-14 已知 A, B 两个事件满足 $P(AB) = P(\overline{AB})$, 且 $P(A) = p$, 则 $P(B) = (\quad)$.

- (A) p (B) $1-p$ (C) $1-p^2$ (D) $(1-p)^2$

解 选(B).

$$\begin{aligned} P(\overline{AB}) &= P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \end{aligned}$$

由题设条件, $P(\overline{AB}) = P(AB)$, 得

$$P(AB) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$$

即 $P(A) + P(B) = 1$. 由 $P(A) = p$, 得 $P(B) = 1 - p$.

1-15 设 A, B, C 是3个事件, 且

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$$

$$P(AB) = P(BC) = 0, P(AC) = \frac{1}{8}$$

则 $P(A \cup B \cup C) = (\quad)$.

- (A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{7}{8}$ (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{1}{8}$

解 选(C).

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

关键是求出第一卷及第五卷分别在两端的情况总数.

因 $A \subset B$,
 $P(B-A) = P(B) - P(A)$

此选项要经过分析计算而得, 关键是要用到 $\overline{AB} = \overline{A \cup B}$

$P(A \cup B \cup C)$ 的计算公式要求知道.