高等院校教材

概率论与数理统计

金治明　李永乐　编

国防科技大学出版社

高等院校教材

概率论与数理统计

金治明　李永乐编

国防科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/金治明，李永乐-长沙：国防科技大学出版社，1998.3

ISBN 7-81024-430-2

Ⅰ概率论与数理统计
Ⅱ金治明 李永乐
Ⅲ概率论-数理统计-教材
ⅣO21

责任编辑：何 晋
封面设计：陆荣斌

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4555681 邮编:410073
新华书店总店北京发行所经销
湖南大学印刷厂印装

开本:850×1168毫米 1/32 印张:14.5 字数:390千
1997年6月第1版1998年3月第2次印刷 印数:8001-11000册

ISBN 7-81024-430-2
O·63 定价:18.00元

概率论一反

内 容 简 介

本书是为高等工科院校非数学专业编写的概率论与数理统计的教材，可用于50-70学时的教学。内容包括概率论与数理统计两部分，与通常的工科教材相比，我们增加了特征函数和极限定理方面的内容。本书也可作为工程技术人员进修本门课程的参考书。

前　言

众所周知，自然界与社会的现象可以分为两大部类：必然性现象与随机现象。概率论与数理统计就是研究随机现象中数量关系的数学学科。“随机性”就象幽灵一样，随时伴随着我们的生活，人们几乎处处可听到“太偶然了”，“碰巧了”，“好运气”等等用词，在工程师那里也可经常听到“随机因素”，“随机干扰”，“随机误差”之类的术语。随机现象的非常广泛性自然就决定了概率论与数理统计在现代科学与应用中的位置，最近国家教委把概率论与数理统计列为工科专业报考研究生的必考科目也说明了本门课程的重要性。

本书分概率论与数理统计两大部分。概率论部分共五章，数理统计部分共四章。

第一章概率论的基本概念。主要内容是：随机事件与运算，概率的定义与性质，古典概型，三个基本公式，事件的独立性。

第二章随机变量与分布函数。主要内容是：分布函数的定义与性质，分布律与分布密度，几种重要的分布，随机变量函数的分布。

第三章多维随机变量与分布。主要内容是：二元随机变量的分布与性质，边缘分布与条件分布，两个随机变量函数的分布与独立性。

第四章随机变量的数字特征与特征函数。主要内容是：数学期望、方差、矩、协方差、相关系数的定义，性质与计算公式，特征函数的定义、性质与几种重要分布的特征函数，唯一性定理的意义，独立和的特征函数与分布的再生性，多元正态分布的性质。

第五章大数定律与中心极限定理。主要内容是：契比雪夫不等式的运用，三个大数定律，独立同分布情形的中心极限定理与李雅普诺夫定理的应用。

第六章数理统计的基本概念与抽样分布。主要内容是：基本概

念与正态总体的抽样分布。

第七章参数估计。主要内容是: 点估计, 估计量的评价标准, 区间估计。

第八章假设检验。主要内容是: 正态总体、指数总体参数的假设检验与大样本方法, 样本容量的确定, 皮尔逊χ^2分布检验, 正态性检验, 秩和检验。

第九章回归分析与方差分析。主要内容是: 一元、多元线性回归, 可化为线性回归的非线性回归, 单因素、双因素方差分析。

特征函数是概率论与数理统计的重要工具, 恰当地介绍它, 有利于较深入地掌握极限定理方面的内容, 也可帮助读者自学进一步的有关材料。但是, 在工科概率论与数理统计的教材中引进特征函数还是一个尝试, 详略是否恰当有待于教学实践的检验。数理统计部分打* 的内容, 仅供参考, 不作要求。

本书由金治明主编, 并执笔概率论部分, 数理统计部分由李永乐执笔。由于编者的水平有限, 书中不足之处还请同行与读者批评指正。本书用pctex系统排版, 可能与其它排版系统有所区别。

编者

1996年7月于长沙

目　录

第一章 概率论的基本概念

自然界和社会的现象可以分为两大部类：必然性现象与随机现象。所谓必然性现象就是在一定的条件下必然会发生的现象，比如向上抛一块石头必然会落下。随机现象则不一样，即使在确定的条件下所发生的结果也并不一样。比如掷一颗骰子，可能出现1点，2点，3点，4点，5点，6点，事先并不能确定。每次打靶时我们都瞄准同一目标，但每次的弹着点也不尽相同，事先也不能确定。然而多次重复掷一颗均匀的骰子，我们会发现出现每一个点的次数大约占投掷次数的六分之一，而弹着点的分布也呈现一定的规律。这种在每次试验中结果不确定的现象，称之为随机现象。如上所说，对于随机现象，在大量重复试验中其结果又呈现某种规律性，概率论与数理统计就是研究随机现象中量的关系的数学分支。

因为随机现象是一大部类现象，它几乎发生在所有的自然界与社会现象中，即使是我们称之为必然性现象中，也伴随着随机现象的发生。虽然上抛一个物体必然会落下，但是由于受到空气的扰动，着地点也会有差别。因此概率论与数理统计的应用范围十分广泛，几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门中。例如，使用概率统计的方法可以进行气象预报、水文预报、地震预报，产品的抽样验收，评估武器精度，优化试验方案以及生产的自动化控制等等。

§ 1.1 样本空间

1.1.1 样本空间

我们把对各种随机现象的观察或试验称之为随机试验,而把随机试验的一切可能结果的全体称为 **样本空间**。这里“空间”二字并不是我们现实世界中真正的空间，数学家们喜欢用它表示我们所研究的事物的全体。在概率论中我们用大写的希腊字母Ω或者带有上、下标的Ω来表示。试验的每个结果称之为**样本点**，通常用小写的希腊字母ω 或$\omega_1, \omega_2, \cdots$来表示。

随机试验的特点是：可以在相同的条件下重复地进行，试验的全部可能的结果是事先可知的，但每次试验的结果是不能事先确定的。下面举一些例子，并用E_i, Ω_i分别表示相应的试验与由它产生的样本空间。

(1) E_1: 掷一颗均匀的骰子。我们有

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(2) E_2: 掷一枚硬币。则

$$\Omega_2 = \{1, 0\}$$

其中1表示出现正面，0表示出现反面。

(3) E_3: 检验某批n件产品中的合格品的件数。则

$$\Omega_3 = \{0, 1, \cdots, n\}$$

(4) E_4:记录某电话交换台在某段时间内的电话呼唤次数。

$$\Omega_4 = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

(5) E_5: 记录某地区一月的日平均温度。则

$$\Omega_5 = [-50, 50]$$

(6) E_6: 考虑在数值计算中只保留小数点后第五位而采取四舍五入所带来的误差。

$$\Omega_6 = [-0.5 \times 10^{-5}, 0.5 \times 10^{-5}]$$

(7) E_7: 考查某班大学生的体重(千克)。

$$\Omega_7 = [30, 100]$$

1.1.2 随机事件

在实际中，我们往往关心某种满足一定条件的样本点的集合。这种满足一定条件的样本点的集合我们称之为**随机事件**，简称为**事件**。所以随机事件就是某些样本点的集合，也即是样本空间的子集合，样本点又称为**基本事件**。如果试验时，出现了事件A中的样本点。我们就说事件A发生了。比如

(1) 在E_1中事件A_1: “出现大于3的点”，即

$$A_1 = \{4, 5, 6\}$$

(2) 在E_4中事件A_4: “日平均气温为25至32度”，即

$$A_4 = [25, 32]$$

Ω作为自身的子集合，在每次试验中总是发生的，它也是一个事件，我们称之为**必然事件**，空集$\emptyset$不包含任何样本点，在每次试验中总是不发生的，称之为**不可能事件**。事件通常用大写的英文字母$A, B, C\cdots$来表示，其具体内容可写为$A=\{\cdots\}$，其中大括号中或者是A所包含样本点的列举，如上面的A_1；或者是对A中样本点所具有的性质的描述，比如在E_3中，设A_3为合格品个数大于k的事件，那么可写 $A_3=\{\omega\in\Omega:\omega>k\}$。事件$A_4$也属于这种情形，不过我们用一个闭区间表示“ $25\leqslant\omega\leqslant 32$”。

1.1.3 事件间的关系与运算

事件既然是Ω的子集合，它们之间的关系与运算就是集合间的关系与运算。下面设$A, B, A_1, B_1, A_2, \cdots$,均为事件。

(一) 若$A\subseteq B$,则称B包含事件A.这表示事件A发生必导致B发生。若$A\subseteq B$，且$B\subseteq A$，即$A=B$，则称事件A与B**相等**。

(二) 事件$A\cup B=\{\omega\in\Omega:\omega\in A或\omega\in B\}$,称为两事件的**并事件**。也即是把两事件的样本点放在一起所组成的新事件。因此$A\cup B$发生当且仅当A, B中至少有一个发生。类似地，称

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{\omega\in\Omega:\omega至少属于A_1,A_2,\cdots,A_n中一个事件\}$$

为n个事件的**并事件**，称

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{\omega\in\Omega:\omega至少属于A_1,A_2,\cdots中一个事件\}$$

为**可列个事件的并事件**。这里所谓“可列”个事件是指 $A_1, A_2, \cdots$一个一个可以列举出来，它们与自然数全体 $1, 2, \cdots$可以一一对应。

(三) 事件$A\cap B=\{\omega\in\Omega:\omega\in A 并且 \omega\in B\}$,称之为事件$A$ 与B的**交事件**，简记为AB，也即是两事件中公共的样本点所组成的新事件。因此AB发生当且仅当A与B同时发生。类似地，称

$\cap_{i=1}^n A_i = \{\omega \in \Omega : \omega$属于一切$A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$ 为n**个事件的交事件**，称 $\cap_{i=1}^\infty A_i = \{\omega \in \Omega : \omega$属于一切$A_1, A_2, \cdots\}$ 为**可列个事件的交事件**。

(四) 事件$A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$但$\omega \notin B\}$称为事件A与B的**差事件**，事件$A \setminus B$发生当且仅当$A$发生，而$B$不发生。特别当$A \supset B$时，记$A \setminus B = A - B$,并称它为真差。

(五) 若$A \cap B = \emptyset$,则称事件A与B**互不相容或互斥**，也即两事件不能同时发生。

(六) 若$A \cup B = \Omega$, 且$A \cap B = \emptyset$,则称两事件互为**逆事件**，并记 $B = \overline{A}$或$A = \overline{B}$.

事件的关系与运算可用图1-1来表示。

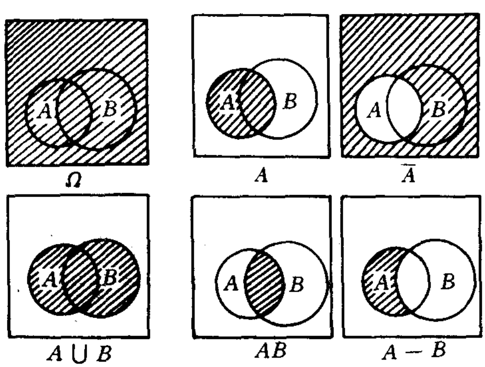

图1-1

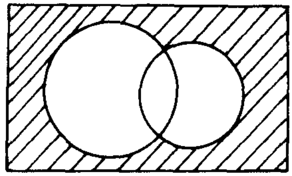

图1-2

事件间的运算满足下面的法则:

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

(3) 分配律:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(4) 德·摩根律:

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

这些定律均可用严格的数学的方法证明, 也即证明等式两边的事件互相包含。但是用图示的方法验证这些定律会显得更加直观, 例如图1-2 中的$\overline{(A \cup B)}$即为方框中阴影部分, 而如果你把A的外面涂上红色, 把B的外面涂上蓝色, 那么既有红色又有蓝色的部分恰是方框中的阴影部分。

§ 1.2 频率与概率

我们在§ 1.1 中已经指出随机试验的基本特点是每做一次试验事先并不能确定会有哪个结果，因此一个确定的事件 (必然事件与不可能事件除外)在一次试验中可能发生也可能不发生。那么如果重复做同样的试验，该事件发生的可能性有多大? 为了描述事件发生的可能性，我们引入下面频率与概率的定义。

定义1.1 在相同的条件下，重复做同样的n次试验，如果事件A发生n_A次，则称n_A 为事件A的 **频数**，比数n_A/n为事件A的**频率**。一般地我们用$f_n(A)$表示n次试验中事件A的频率。

由定义可见频率$f_n(A)$有下面的性质:

1° $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

2° $f_n(\Omega) = 1$;

3° 若$A_1, A_2, \cdots, A_n$是两两不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_n)$$

事件的频率能否反映在多次重复试验中事件发生的可能性大小呢? 在历史上有人做过试验表明，当试验次数比较小的时候，频率的波动较大，而当试验次数较大时，频率就呈现出稳定性。比如你做几组掷5次硬币的试验，记下每次出现正面的频率，发现没有什么规律可言，但如果掷它成千上万次，就看出出现正面的频率大约在0.5左右。这个事实表明虽然随机试验中每次出现什么结果是不确定的，

但大量的随机试验中确实隐藏着某种规律性: 它就是事件发生的可能性, 我们称之为**概率**, 而频率就是对它的量度。概率是随机现象中的一种客观存在, 这正如我们都承认物体的长度是一种客观存在一样。我们用尺可以度量物体的长度, 同样的道理, 频率也是对概率的度量, 尺子要造得精细, 度量才会准确, 同样地重复试验的次数要比较多, 频率才会比较准确地度量出概率的大小。数学是一种抽象的艺术, 我们从频率的性质得到下面的概率的定义。

定义1.2 设Ω为样本空间, 对于Ω中的每个事件A,我们赋予一个实数$P(A)$, 称之为概率, 如果它满足下面的条件:

1^o 对于每个事件A, $P(A) \geqslant 0$;

2^o $P(\Omega) = 1$;

3^o 设$A_1, A_2, \cdots$是两两互不相容的事件, 即对于$i \neq j, A_iA_j = \emptyset, i, j = 1, 2, \cdots$.则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots \tag{1-1}$$

(1 − 1)式称为概率的可列可加性, 它是概率的主要特征。

在第五章中我们将证明, 当$n \to \infty$时频率$f_n(A)$在一定意义下接近于概率$P(A)$, 这也正是我们用频率近似度量概率的理由。

由概率的定义, 我们可以得到概率的一些重要的性质。

性质1.1 $P(\emptyset) = 0$

证明 令$A_n = \emptyset (n = 1, 2, \cdots)$, 则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, 且$A_iA_j = \emptyset, i \neq j$.由概率的可列可加性(1 − 1)式, 我们有

$$P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset).$$

而实数$P(\emptyset) \geqslant 0$,故由上式知$P(\emptyset) = 0$. □