



清华大学电子与信息技术系列教材

电子光学

杜秉初 汪健如 编著
周立伟 审

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

清华大学出版社

清华大学电子与信息技术系列教材

电子光学

杜秉初 汪健如 编著
周立伟 审

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书以“轴对称场细束电子光学理论和应用”与“强流电子光学理论和应用”为主体内容,把“偏转系统光学与多极场理论”作为补充内容,以适应整体电子光学器件和仪器的应用需要。此外,为了辅助细束电子光学理论的学习,在第 1 章讨论了几何光学基础。在细束电子光学理论和应用方面,除包含细束电子光学的基本理论和应用外,还介绍了电子光学像差理论、像差系数求解,以及场与轨迹的计算机求解方法;而在强流电子光学理论和应用方面,除包含了轴对称场外,还介绍了非轴对称场的磁控注入枪设计理论和设计方法。因此本书从讨论的内容看具有相当的广泛性;而在诸如像差系数求解等重要内容上,又具有一定的深度。

本书在写法上力求深入浅出,便于自学,每一章都附有习题,供读者练习和思考。

本书适合高等院校物理电子专业本科生和研究生教学使用,也可供从事电子束器件、电子光学仪器、注型微波器件、加速器和电子束加工机等方面研究和生产的科研与工程技术人员参考。

书 名: 电子光学

作 者: 杜秉初 汪健如 编著

出 版 者: 清华大学出版社(北京清华大学学研大厦 100084)

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

责任编辑: 王仁康

版式设计: 肖 米

印 刷 者: 北京市人民文学印刷厂

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 787×1092 1/16 印张: 27.5 字数: 632 千字

版 次: 2002 年 10 月第 1 版 2002 年 10 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-05582-3/TN·129

印 数: 0001~3000

定 价: 30.00 元

前 言

电子光学是研究荷电粒子在电场和磁场中运动的一门学科。该学科研究的主要内容包括:探讨荷电粒子束的形成过程及其在电场和磁场作用下聚焦、成像与偏转的规律;研究如何将荷电粒子束应用于各种科学仪器和器件。当代许多科学技术的发展,都关系到荷电粒子束的利用。

电子光学在 20 世纪 30 年代才形成为一门独立的学科,它的理论基础是经典力学、电动力学和光学。人们采用类似于几何光学中的概念和方法,建立起它的完整理论体系。把电子光学和光学联系起来的理论依据主要在于以下两个方面:其一是 20 世纪 20 年代德布罗意(L. V. de Broglie)揭示了电子的波动性及其与光波的相似性;其二是控制荷电粒子在电场和磁场中运动的规律(最小作用量原理),与控制光线在折射率有变化的光学媒质中运动的规律(费马原理)之间有深刻的相似性。对此,布许(H. Busch)等人自 1926 年起陆续证明了旋转对称静磁场可以使电子束聚焦和成像,如同光学透镜对于光线的作用。这就在实践中证明了荷电粒子在电场和磁场中运动的规律,与光线在折射率有变化的光学媒质中运动的规律之间的确存在深刻的相似性。

电子光学完整理论体系建立的过程,是在科学技术不断发展的推动下得以发展的过程。特别值得指出的是,电真空技术与器件的发展,以及显微与分析技术的需求等,是电子光学理论体系发展的最直接的推动力,可见电子光学是与生产实践密切联系的专门学科。

1897 年布朗(K. F. Braun)制成了第一只示波管,但当时只是发现了阴极射线与电子有关。到了 20 世纪 20 年代中期,布许发表了有关磁聚焦的理论研究文章,实践中也制成了第一只高真空磁聚焦电子束管,为电子光学的发展准备了条件。30 年代,格拉史(W. Glaser)、谢尔赤(O. Scherzer)等人发表了一系列电子光学理论性论文,从而奠定了电子光学的理论基础。这时,电子波动学说也得到了发展,人们认识到高压下电子波的波长比光波的波长短得多,由此推断出电子显微镜的分辨本领比光学显微镜可提高很多倍。在电子波动学说和电子光学理论指导下,制成了电子显微镜。第二次世界大战期间及战后,由于军事技术的发展,出现了各种微波器件,促进了强流电子光学的发展,它也成为电子光学理论的一个重要组成部分。由于电子束分析仪器对分辨率要求越来越高,以及电视技术的提高与普及,对电子光学系统提出了一系列更高的要求,推动了电子光学像差理论的发展,进一步丰富了电子光学理论。近代科学技术的突飞猛进,为电子光学的理论发展和应用开辟了更为广阔的天地。特别是高速度、大容量电子计算机的出现,使电子光学无论是基础理论、数学方法,还是设计手段上都有巨大的飞跃。例如,当前电视显示向彩

色高清晰度电视(HDTV)发展,这就要求减小电子光学系统(电子枪和偏转系统)的像差。而像差的计算必须在高速度、大容量的电子计算机上进行。这就使得考虑像差的电子光学系统计算机辅助设计(CAD)理论,发展成为电子光学理论的一个分支。

电子光学理论在科学技术和工业生产中得到了相当广泛的应用。例如,用于各种电子束显示、摄像器件及各种微波电真空器件中;用于微光和红外夜视器件(变像管、像增强器)中;用于高能粒子加速器及受控热核反应器中;用于原子能工业中广泛采用的光电倍增器及各种粒子谱仪中;用于观察、分析物质结构的高分辨本领的电子显微镜和各种分析仪器中;用于质谱仪、能谱仪中;用于微细加工的电子、离子束刻蚀装置和离子注入装置中;用于电子束冶炼、电子束焊接等新型工艺中……所有这些,表明电子光学处在不断深化、不断发展之中,其前景是十分广阔的。

本书共分10章,第1章至第7章是“细束电子光学”的基本理论部分。需要强调说明的是,本书并不涉及为像变器(变像管、像增强器)等服务的“宽束电子光学”的基本理论。由于细束电子光学的物理概念和几何光学有着密切的联系,掌握几何光学的物理概念对于学习细束电子光学有很大的帮助,特别是对于“像差”的理解更是如此。为此我们将几何光学最基础的部分,特别是有关几何光学中像差的内容,编写成了第1章。在具体教学中,这一章可以视学生的具体情况进行取舍。对于自学本教材的学生,如果缺乏几何光学的知识,那么第1章无疑会对他们有很大的帮助。第2章作为基础,一般地介绍电子在均匀电、磁中的运动规律。第3章至第5章是“细束电子光学”的核心理论部分,着重讲解轴对称场(旋转对称场)的表达形式和求解方法、电子在该场中的运动轨迹方程以及如何利用数值计算方法求解场和轨迹。第6章描述了由不同形式的轴对称电、磁场构成的电子光学透镜,以及由这些电子光学透镜组合而成的各种实用的电子枪。细束电子枪是各种阴极射线管(CRT)和各种电子束分析仪器的核心组件,随着人们对于图像清晰度的要求越来越高,就要求电子枪提供的电子束尽可能地细。实现这一目标的主要途径,是尽量减小电子枪中各个透镜的像差,第7章就是为此目的而编写的。第8章是偏转系统即电子棱镜,在该章中讨论了电、磁偏转系统的设计计算及其三级像差的计算。第9章介绍了多极系统,由于在新型电子光学仪器的发展中,对由多极场构成的功能部件的要求不断提高,因此本书加强了对多极场的论述,特别是对于多极场的求解,给予了更多的关注。第10章是为微波器件、高能粒子束以及电子注加工机等服务的强流电子光学。着重介绍强流电子枪和聚束系统,特别是周期磁聚束系统的设计计算方法。

本书着重于对基本物理概念的阐述,而不着重于对公式的数学推导。为便于具有基本数学基础的读者掌握数学分析方法,全书的数学推导采用基本的、传统的数学方法,而没有采用近年发展起来的较艰深的数学方法,即“高等电子光学”的分析方法。此外,读者如果对于宽电子束理论和曲轴光学理论有兴趣,可以参看由周立伟教授编写的《宽束电子光学》和《宽电子束聚焦与成像》(这两本书由北京理工大学出版社分别于1993年、1994年出版)等书籍。

本书研究对象为静场,不考虑场随时间的变化。书中除特别指出的以外,不考虑相对论修正,即认为电子运动速度远小于光速。书中一般都使用国际单位制。

本书由杜秉初主编。第1、2、3、4、6、8、10章由杜秉初编写,第5、7、9章由汪健如编写。受限于编者的水平,难免有许多缺点和错误之处,敬请读者给予指正。

编者特别邀请北京理工大学教授、中国工程院院士周立伟作为本书的主审,在此表示深切的感谢。

编著者

2002年4月于清华大学

目 录

电子光学

第 1 章 几何光学基础	1
1.1 序言	1
1.2 几何光学基本原理	3
1.3 光学系统的近轴成像.....	11
1.4 实际光学系统的光阑.....	28
1.5 实际光学系统的像差.....	34
习题	53
第 2 章 电子在均匀场中的运动	56
2.1 直角坐标系中的电子运动方程和电子运动速度.....	56
2.2 电子在均匀电场中的运动.....	58
2.3 电子在均匀磁场中的运动.....	58
2.4 电子在均匀复合场中的运动.....	61
2.5 电子光学与几何光学的比较.....	64
习题	65
第 3 章 电子光学中的场	68
3.1 轴对称静电场的数学表达式.....	69
3.2 轴对称静电场近轴区的性质.....	74
3.3 轴对称静电场力函数(流函数)的性质.....	78
3.4 轴对称磁场的矢位与标位.....	80
3.5 轴对称磁场的数学表达式.....	82
3.6 数学解析法求解轴对称静电场与静磁场.....	86
习题	98
第 4 章 电子轨迹方程	100
4.1 电动力学方法推导轨迹方程	100
4.2 光学方法推导电子轨迹方程	104
4.3 相对论修正下的普遍轨迹方程	111
4.4 轴对称复合场中的高斯轨迹方程和傍轴轨迹方程	113

习题	115
第5章 场和轨迹的求解方法	116
5.1 用有限差分方法求解轴对称电场	117
5.2 用有限元素法求解轴对称电场	125
5.3 用电荷密度法求解轴对称电场	129
5.4 电子轨迹的数值求解方法	135
5.5 用有限差分法求解轴对称磁场	139
5.6 测量磁场的实验方法	143
习题	146
第6章 电子光学透镜	147
6.1 高斯光学理想成像性质	147
6.2 电子透镜的基本参量及成像关系式	151
6.3 静电透镜的焦距公式	155
6.4 薄透镜的矩阵表达式	161
6.5 静电透镜	166
6.6 磁透镜	186
6.7 细束电子枪	198
习题	212
第7章 电子光学成像系统的像差	216
7.1 三级几何像差理论	216
7.2 三级几何像差分类	226
7.3 球差	227
7.4 彗差	232
7.5 像散与场曲	234
7.6 畸变	238
7.7 光阑位置对几何像差的影响	241
7.8 调整误差	242
7.9 色差	244
7.10 像差的叠加	251
习题	253
第8章 偏转系统	255
8.1 对偏转系统的要求	255
8.2 理想偏转情况下的电子棱镜	255
8.3 实际的电偏转系统	259

8.4	提高电偏转灵敏度的方法	263
8.5	实际的磁偏转系统	267
8.6	磁偏转线圈场的计算	270
8.7	静电偏转的三级像差	274
8.8	磁偏转的三级像差	281
	习题	290
第9章	多极系统	292
9.1	电磁场分布的普遍表达式	292
9.2	电多极场的场分布求解	299
9.3	四极透镜	302
9.4	其他多极系统的应用	322
	习题	325
第10章	强流电子光学	327
10.1	电子注在无场空间的发散——空间电荷效应	328
10.2	低导强流电子枪设计	337
10.3	高导电子枪	362
10.4	其他类型电子枪——磁控注入枪	368
10.5	均匀磁场聚束系统	375
10.6	周期磁场聚束系统	395
	习题	423
	参考文献	427

第 1 章 几何光学基础

1.1 序言

人类对光的研究,始于人类为回答“人为什么能够看见周围的物体”这一最基本问题而开始的。人们从直观感性的认识中,比较容易得出光是直线传播的概念,但是对光的实质和它的规律的认识,则有一个相当长的历程。

直到 17 世纪(1621 年)才由斯涅耳(Snell)和笛卡儿(Descarte)将对于光的反射和折射的观察结果,归结为今天为人们所熟知的光的反射定律和折射定律,“光学”才开始有了较为实际的理论意义。到 1657 年,费马(Fermat)提出了“最小时间原理”,指出光在媒质中传播所走的路径的光程取最小值(后来由数学证明,更全面的认识应当是:传播所走的路径的光程取极值,可以是极小值,亦可以是极大值或恒定值)。这原理可以包括反射定律和折射定律。至此,人们对光的传播特性有了大致的了解,而对光的其他特性,如视觉中的两个基本特征——亮度和颜色的概念,还是模糊不清的。

到了 17 世纪后半叶,牛顿(Isaac Newton)和惠更斯(Christian Huggens)等对光的研究,才真正地把光学引上了具有实质性发展的道路。

在 1665 年,牛顿让太阳光束在棱镜中折射后,投射在光屏上形成一个按一定颜色顺序排列的长条像,牛顿称之为光谱。在实验中还看到,把从一个棱镜中分出的某种颜色(例如红色)的光从光谱中分离出来,令它再通过另一个棱镜,结果没有新的成分被分离出来。牛顿的太阳光实验,使颜色学说脱离了主观印象,而走上与客观量相联系的科学的发展道路。牛顿还发现了另一现象,即牛顿环,其实质是光的干涉现象的实验表现。

牛顿在发现这些重要现象的同时,根据光的直线传播性,认为光是一种微粒流,并且以这种观点对反射和折射定律作了解释。微粒说很自然地解释了光的直线传播性,然而在解释牛顿环现象时,却遇到了困难。

和牛顿相反,惠更斯是光的微粒说的反对者,他创立波动说,他从声现象和光现象的许多相似性出发,认为必须把光振动看作是在一种特殊的媒质——“以太”中传播的弹性振动,该弹性振动以球形波振面传播。然而惠更斯的关于光波的概念是很不完全的,特别是惠更斯没有提到光在空间的周期性概念,更没有提到牛顿环。而牛顿环是光的周期性的表现,应当把它作为光现象波动说的有力证据。虽然如此,这学说最有意义的乃是作为寻求光振动的传播方向的惠更斯原理,即光振动所达到的每一点都可视为次波的振动中心,次波的包络面为传播着的波的波阵面(波前)。

在整个 18 世纪中,光学的研究进展很缓慢,光的微粒流理论在光学中仍占优势,但光的波动理论却从没有停止与微粒流理论的争论。直到 19 世纪初,杨氏(Young)才圆满地解释了“薄膜颜色”的现象并用双狭缝实验显示了光的干涉现象;1835 年菲涅耳(Fresnel)以杨氏干涉原理补充了惠更斯原理,由此产生了今天为人们所熟知的惠更斯-菲涅耳原

理。逐步发展起来的波动光学体系已初步形成,用这个原理既能圆满地解释光的直线传播,也能讨论衍射现象,成为波动光学中的重要原理。

进一步的研究,观察到了光的偏振和偏振光的干涉,为了解释这些现象,菲涅耳假定光是横波。至此,光的弹性波动理论既能说明光的直线传播,也能解释衍射,而加上横波的限制后又可解释光的偏振现象。但是,机械的弹性横波不能同时说明光的巨大的传播速度,因此这种对光的机械弹性横波的认识是片面的。

1846年,法拉第(Faraday)发现了光的振动面在磁场中发生旋转,这表示光学现象与磁学现象间存在内在的联系。1856年韦伯(Weber)发现,光在真空中的速度等于电流强度的电磁单位与静电单位的比值: 3×10^{10} cm/s。这表明光学现象与电学现象有一定的关系。从这些发现中,人们获得了新的启发,即必须把光学现象和其他物理现象联系起来考虑,而不能孤立地研究光的本性。

1860年麦克斯韦(C. Maxwell)的理论研究指出,电场和磁场的改变,不能局限在空间的某一部分,而是以光的速度传播着,这就是说光也是一种电磁现象。这个结论在1892年被赫兹(Hertz)的实验所证实。按照麦克斯韦的理论,可以导出

$$n = c/v = \sqrt{\epsilon\mu}$$

其中: n 代表媒质的折射率; c 代表光在真空中的速度; v 代表光在媒质中的速度; ϵ 代表媒质的介电常数; μ 代表媒质的导磁率。这个式子给出了物质的光学常数 n 同电学常数 ϵ 和磁学常数 μ 的关系。至此光的波动说达到了一个新的高度。

1900年,普朗克(Max Planck)在研究黑体辐射时,借用了不连续性的概念。他认为黑体是由许多振子组成的,振子不可能连续不断地吸收和放出能量,而只能以离散的份额的形式,即以能量的量子形式吸收和放出能量。每一个振子的能量又是某一个基本能量的整数倍。普朗克就把这个基本能量叫做能量子(quantum)。不同频率振子的能量单元其大小不同,但和频率 ν 是成比例的。其比例常数为 h (h 后来被称为普朗克常数,当时称为作用量子),能量子(量子) ϵ 可表示为 $\epsilon = h\nu$ 。

量子论不但很自然地解释了灼热体辐射能量按波长分布的规律性问题,而且它以全新的方式提出了光与物质相互作用的整个问题。1905年,爱因斯坦将这个在物理学中具有革命意义的量子论用于光电效应之中,指出了光是以一阵阵迸发出光子(photons)(当时称为光量子)的形式发射的。如此迸发出的那些光量子,非常像普朗克那个吸收能量的能量子。每一个光子的能量也是由普朗克提出的公式 $\epsilon = h\nu$ 所决定。此外,在19世纪末和20世纪初的许多实验中,都雄辩地证明了光的量子性。这样一来,光的微粒说(量子性)又提到了首位。

这样,在20世纪初,一方面从光的干涉、衍射、偏振以及运动物体的光学现象,确证了光是电磁波;而另一方面又从热辐射、光电效应、光压现象以及光的化学作用等,无可怀疑地证明了光的量子性——微粒性。并且,光的波动理论和光的量子理论各自统治着自己的领域,波动理论不能解释光的量子行为,而光的量子理论亦不能说明光的波动现象,似乎没有方法使两者统一起来。

将有关光的本性的两个完全不同的概念统一起来,看来好像是不可能的。如何将这种认识上的矛盾统一起来,主要取决于人们以什么样的观念去看待客观事物。如果以形

而上学的机械唯物论的观点去看待它们之间的矛盾,那是不可统一、不可共存的。但是如果用辩证的、统一的观点去认识它们之间的矛盾,则是可以统一和共存的。也就是说物质具有对立而又统一的两个方面的属性,即具有“两重性”。对于光来讲,它既具有波动性,同时也具有微粒性。

科学的历程证实了这一论断的正确。1923年德布罗意大胆地创立了物质波动学说,他设想每一物质的粒子的运动都和一定的波动相联系。这一假设被后来许多实验所证明。例如,电子束在通过金属薄膜时产生衍射现象,从而能确定电子束的波长,令人信服地证明了电子的波动性。实际上,具有波动性的不仅仅有电子、质子、原子和分子,其他物质颗粒也都有与它自己的质量和速度相联系的波动性的特征。这实际上表示了不仅光有波动性和微粒性,一切习惯概念上的实物也同样有这种两重性。对于电子的波动性而言,电子波长为

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{1.226}{\sqrt{V}}$$

其中电压的单位为 V,电子波长的单位为 nm。

在由德布罗意和后来的薛定谔(Schrödinger)创立的量子力学原理中,波动性和微粒性的对立得到了较完满的统一。按量子力学概念,光或电子通过圆孔的衍射图样,可以这样来解释:通过圆孔的光子或电子落在屏上某些区域的多些,而另一些区域的少些,甚至没有。换言之,衍射图样可由屏上一定点或一定时间发现光子或电子的几率值来确定。

然而,却不能把“实物波”和光波看作同样的东西,光波有电磁性,而“实物波”没有这种性质;“实物波”与实物本身有机地相符合,而光波却是由实物发出来的,具有完全不同的性质。

总之,如今对光的本性的认识是:光和实物一样,是物质的一种,它同时具有波的性质和微粒(量子)的性质,而从整体来说,它既不是波,也不是微粒,更不是二者的混合物。对这种辩证关系,现在人们还缺乏一目了然的形象,说明我们对光的本质的认识还有待进一步深化。

近年来光学的发展,开拓了一些全新的领域,其中很有意义的方面是:傅里叶光学、纤维光学、非线性光学、激光技术、红外技术等。它们在科学技术和国民经济的发展中都发挥了巨大的作用,对此我们不在这里赘述。

1.2 几何光学基本原理

1.2.1 几何光学的基本定律

1. 几何光学的含义及其范畴

不考虑光的波动本性,而仅以光的直线传播性质为基础,研究光在透明媒质中传播问题的光学,称为几何光学。

由于光的直线传播性对于光的实际行为只具有近似的意义,所以以它作为基础的几何光学,就只能应用于有限的范围和给出近似的结果。在所研究的对象中,若其几何尺寸

远大于所用光波的波长,则由几何光学可以获得与实际基本相符的结果;反之,当其几何尺寸可以跟光波波长相比拟时,则由几何光学所获得的结果将与实际有显著的差别,甚至相反。在后一种情况下,必须采用以光的波动性质为基础的波动光学来研究。用波动光学研究任何情况下的光的传播问题,都能得到严格的解。因此,几何光学只不过是波动光学在一定条件下的近似,其近似性可以由描述波动性的衍射角公式

$$\alpha \approx \frac{\lambda}{D}$$

看出。式中 λ 是光波波长, D 是光阑孔径。光的直线传播就要求衍射角 $\alpha \approx 0$,也就是要求 $\lambda \approx 0$,其实质就是要求光不具有波动性。尽管如此,但由于几何光学应用简便,而且在实际上并不总需要严格的解,所以它仍为研究光传播问题的有力工具。

2. 光线和几何光学的基本原理

在几何光学中可以用一条几何线来表示光的传播方向,并称这条线为光线。我们借助于光线的这个概念,可将几何光学基本原理的要点表达如下。

1) 光的直线传播定律

在均匀媒质中,光沿直线传播,即在均匀媒质中,光线为一直线。

2) 光的独立传播定律

自不同方向或由不同物体发出的光线若相交,对每一光线的独立传播不发生影响。

3) 光的反射和折射定律

当光线由一媒质进入另一媒质时,光线在两个媒质的分界面上被分为反射光线和折射光线。对于这两条光线的行进方向,可分别由反射定律和折射定律来表述。

反射定律:参看图 1-2-1,入射光线 AB ,分界面 B 点的法线 NB 和反射光线 BC 这三者在同一平面内,并且反射光线与法线间的夹角 ψ' (反射角)等于入射光线与法线间的夹角 ψ_1 (入射角)。

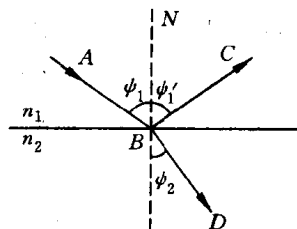


图 1-2-1 光在界面的反射和折射示意图

折射定律:入射光线 AB 、分界面 B 点的法线 NB 和折射光线 BD 这三者在同一平面内,并且入射角 ψ_1 的正弦与折射角 ψ_2 (折射光线和法线间的夹角)的正弦之比,是一个取决于两媒质光学性质及光的波长的常数。这个定律的数学形式可写成

$$\frac{\sin \psi_1}{\sin \psi_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1-2-1)$$

其中常数 n_1 和 n_2 分别为第一媒质和第二媒质的绝对折射率(以下简称折射率),它们的定义为

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{c}{v_1} \\ n_2 &= \frac{c}{v_2} \end{aligned} \right\} \quad (1-2-2)$$

其中 c 为光在真空中的速度, v_1 和 v_2 分别为光在第一媒质和第二媒质中的速度。

1.2.2 费马原理

1. 费马原理的数学形式——光程的概念

光在各向均匀媒质中的传播规律,可由前述几何光学的几个基本原理完全确定。而研究光在不均匀媒质中的传播问题,更具有普遍的意义。为此,必须回答这样一个问题:光由任一媒质中的一点 A 至另一媒质中的一点 B ,是沿着怎样的路径传播的?

设光在 $1, 2, \dots, k$ 等均匀媒质中的传播速度分别为 v_1, v_2, \dots, v_k ,在各媒质中光走过的路程的几何长度分别为 s_1, s_2, \dots, s_k 。于是光从媒质 1 中的 A 点传播到媒质 k 中的 B 点所需时间为

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \dots + \frac{s_k}{v_k} = \sum_{i=1}^k \frac{s_i}{v_i}$$

由式(1-2-2),已知媒质的折射率为 $n_i = \frac{c}{v_i}$,所以上式可写成

$$t = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^k n_i s_i \quad (1-2-3)$$

其中乘积 $n_i s_i$ 称为光在媒质 i 中的光程,乘积之和 $\sum n_i s_i$ 称为光由 A 到 B 的总光程 L 。光在媒质 i 中的光程,在数值上等于光在真空中的速度,在时间 t_i (光穿过媒质 i 所用的时间) 内所能走的路程长度。借助于这个概念,可将光在非真空媒质中所走的路程,折算为光在真空媒质中所走的路程长度。这样便于比较光在不同媒质中所走路程的长短。

如图 1-2-2 所示,若在由 P_1 到 P_2 的空间,充满着折射率连续改变的媒质,则光路将是一条曲线。为计算在这种情况下由 P_1 到 P_2 的光程,需将几何路程 $P_1 P_2$ 分成许多线段元 ds_i ,使每一线段元上各点的折射率可视为常数 n_i 。于是,与线段元 ds_i 相应的光程为 $dl = n_i ds_i$,而由 P_1 到 P_2 的总光程为

$$L = \int_{P_1}^{P_2} n ds \quad (1-2-4)$$

积分沿光路 $P_1 P_2$ 进行,由 P_1 到 P_2 所需的时间为

$$t = \frac{1}{c} \int_{P_1}^{P_2} n ds \quad (1-2-5)$$

光由 P_1 到 P_2 究竟按照什么路径传播呢? 费

马原理指出:光沿着所需时间为极值的路径传播。根据变分法的原理, t 有极值的条件是式(1-2-5)定积分的变分为零,即

$$\delta L = \delta \left[\frac{1}{c} \int_{P_1}^{P_2} n ds \right] = 0 \quad (1-2-6)$$

由于光在真空中的速度 c 为一常数,所以上式可写成

$$\delta L = \delta \int_{P_1}^{P_2} n ds = 0 \quad (1-2-7)$$

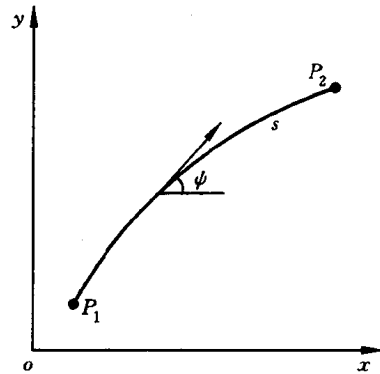


图 1-2-2 连续媒质光程计算示意图

式(1-2-6)和(1-2-7)都是费马原理的数学表达式。由式(1-2-7),我们对费马原理也可以作这样的理解:光从空间的一点到另一点,是沿着光程为极值的路程传播的。或者说,光沿光程值为最小、最大或常量的路径传播。

下面举几个例子,用以证明费马原理的正确性,同时表明费马原理与光的反射和折射定律有同等的意义。可以认为费马原理是对光学基本定律的概括描述,亦可认为光的反射和折射定律是费马原理的必然结果。

1) 光程为最小值的示例

在图 1-2-3 中,自 A 点发出的光线在平面 CC' 上由 D 点反射后通过 B 点,遵守反射定律的光线 ADB ,其光程较其他任一光线 $AD'B$ 的光程都小。为证明这一论断,在垂线 BE 的延长线上取 B' 点,使 $BE=EB'$ 。此时, $BD=DB'$ 及 $BD'=D'B'$,且 A, D 和 B' 在一条直线上。显然直线 ADB' 的长度小于折线 $AD'B'$ 的长度,即

$$AD + DB' < AD' + D'B'$$

由此得出

$$AD + DB < AD' + D'B$$

可见,依照反射定律或费马原理,对上述平面反射所得的惟一结论是:所有从 A 点发出而被 CC' 反射的光线,除光线 ADB 外,都不能通过 B 点。

同样可以证明,遵守折射定律的光线,其光程较任何其他光线的光程都小。

2) 光程为常量的示例

参看图 1-2-4,自回转椭球凹面镜的一焦点 A 上发出的光线,都通过该椭球面的另一焦点 B。根据椭圆的特性,从椭圆两个焦点引至椭圆上任一点的两线段之和为一常数,可知光程 ADB 等于任意另一光程 $AD'B$ 。这种情况下的反射,相当于光程为常量值的情形。

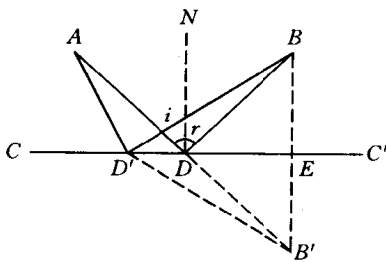


图 1-2-3 证明光程取极小值的示意图

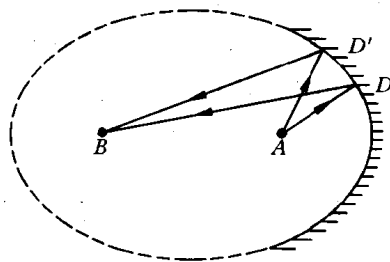


图 1-2-4 证明光程取恒定值的示意图

3) 光程为最大值的示例

参看图 1-2-5,设想有一个内切于回转椭球的凹面镜 MM' ,在 D 点相切。遵守反射定律的反射光线 ADB ,通过椭圆另一焦点 B,由于该凹面镜的任意其他点 D' 均在椭球内,所以光线 ADB 的光程较任何其他光线 $AD'B$ 的光程都大,而光线 $AD'B$ 违背反射定律,因而在 D' 点的反射不会再通过 B 点。这是光程为最大的一个例子。

2. 变分原理

变分问题是研究求泛函极值的方法,同时又可以利用该方法去求解微分方程,因为变分问题和微分方程是相互联系的。

1) 泛函的定义

设有一个变量 J 及函数类, 对于函数类中的每一个函数 $y(x)$, 按一定的规则使得变量 J 有一个数值与之对应, 则称 J 为以 $y(x)$ 为宗量函数的泛函, 记为 $J[y]$, 可表示为

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

对于这个定义有以下几点说明:

- (1) 一般函数是一个变量对应一个函数值, 而泛函则是一个函数对应一个泛函的值;
- (2) 泛函不是函数的函数; 一般函数的函数是一个复合函数, 而泛函是函数类中函数本身的函数, 此外还是自变量及函数导数的函数;
- (3) 函数类可以看成是具有某种属性的函数的集合。例如: 在 $[0, 1]$ 区间的全体连续函数, “连续函数”就是某种属性, 全体连续函数就是一个函数类。

2) 求泛函极值(变分)的必要条件(欧拉方程)

我们以固定端点的问题为例, 说明变分方法。如图 1-2-6 所示, A, B 为两个固定端点, 且有一个函数 $y(x)$, 由它构成的泛函为

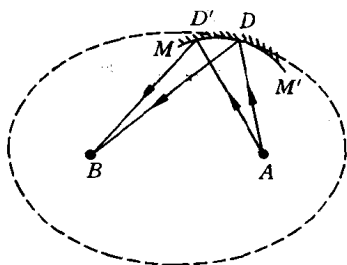


图 1-2-5 证明光程取极大值的示意图

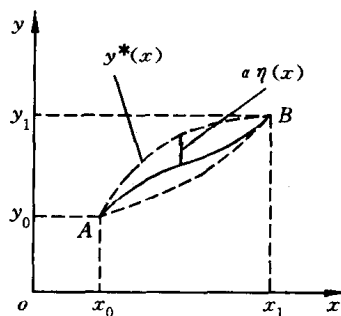


图 1-2-6 变分原理求解图示

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

条件是固定两个端点, 即 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ 。

假设图中实线代表的宗量函数 $y(x)$ 使 $J[y]$ 取得极值, 而在其一个邻域内的其他宗量函数(虚线)均不使 $J[y]$ 取极值。按照这样的假设, 我们可找出该泛函取极值的必要条件。

引入 α 系数, 造成另一个宗量函数 $y^*(x)$, 它与 $y(x)$ 的差值为 $\alpha\eta(x)$, $\eta(x)$ 亦为 x 的函数, 但在端点 A, B 处其值为零, 则新的泛函为

$$J[y^*] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx$$

此函数又应当是 α 的函数, 并可记成

$$\phi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx$$

这里 $\phi(\alpha)$ 为一般函数, 应与泛函区别开来。

按照前面的假定,当 $\alpha=0$ 时, $J[y]$ 取极值,故应有 $\left. \frac{d\phi}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$, 为此有必要求出 $\frac{d\phi}{d\alpha}$ 的表达式

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\alpha} &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial(y+\alpha\eta)} \frac{\partial(y+\alpha\eta)}{\partial\alpha} + \frac{\partial F}{\partial(y'+\alpha\eta')} \frac{\partial(y'+\alpha\eta')}{\partial\alpha} \right) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial(y+\alpha\eta)} \eta + \frac{\partial F}{\partial(y'+\alpha\eta')} \eta' \right) dx \end{aligned}$$

当 $\alpha=0$ 时,上式应为零,即

$$\left. \frac{d\phi}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial(y+\alpha\eta)} \eta + \frac{\partial F}{\partial(y'+\alpha\eta')} \eta' \right) dx = 0$$

将上式第二项做分部积分后得

$$\left. \frac{d\phi}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) dx + \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) dx = 0$$

因为

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$$

所以

$$\left. \frac{d\phi}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x) dx = 0 \quad (1-2-8)$$

现在给出一个基本引理:假定函数 $\phi(x)$ 在区间 $[x_0, x_1]$ 上是连续函数,且有连续的一阶导数;此外,有一个在端点处为零的任何函数 $\eta(x)$,且满足

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi(x) \eta(x) dx = 0$$

则应有

$$\phi(x) = 0$$

根据这个引理,对照式(1-2-8)可知,必有

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (1-2-9)$$

成立。

式(1-2-9)即为泛函取极值的必要条件,该式称之为欧拉(Euler)方程。因此,当我们找出了泛函 $J[y]$ 的具体表达形式后,只要将其被积函数 F 代入欧拉方程,就可以求出该泛函取极值的具体条件。

3. 费马原理数学表达式求解

如前所述,费马原理的数学表达式(1-2-7)为

$$\delta L = \delta \int_{P_1}^{P_2} n ds = 0$$

下面根据变分原理,求出其取极值的具体条件。这里我们考虑如图 1-2-7 所示媒质折射率为连续变化的情况。取 P_1, P_2 两个固定端点,求自 P_1 到 P_2 走过一个极

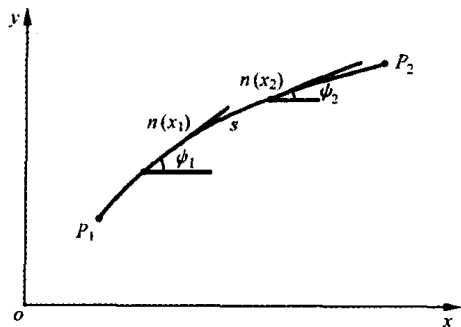


图 1-2-7 媒质折射率为连续变化的情况