奥林匹克解题宝典

数学

初一

解题指要
典型题析
专题训练

ZHIXINZHONGXUE

执信中学

陈竞新 主编
黄金星 李少明 编写

新世纪出版社

奥林匹克解题宝典

数学 初一

执信中学

陈竟新 主编

黄金星 李少明 编写

新世纪出版社

责任编辑：刘永光
封面设计：高豪勇
责任技编：王建慧

奥林匹克数学解题宝典

初一

陈竞新 主编

黄金星　李少明 编写

出版发行：新世纪出版社
经　　销：新 华 书 店
印　　刷：广东新华印刷厂
厂　　址：广州市永福路 44 号
规　　格：787 毫米 × 1092 毫米　1/16　15 印张　300 千字
版　　次：2002 年 6 月第 1 版
印　　次：2002 年 6 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-5405-2465-0/G·1602
定　　价：18.00 元

目　录

第一讲　整数的记数法及十进制数码表示

解题指要

一般地，我们可以用 a，b，…，x，y，…这些字母表示十进制的整数．但为了区别代数式概念，而把用字母表示的整数记作$\overline{ab}$、$\overline{2xb}$等等．其中一个字母可表示为一位或多位整数．如：可记 87 为$\overline{ab}$，35678 为$\overline{x7a}$，其中 $a=8$，$b=7$，$x=356$.

十进制数是由 0，1，2…，9 这十个数码，按“逢十进一”的规则计数的．如十位上是 3，则表示 3 个十，而十个 10，则进位到百位上，在百位上记作 1，即百位上的数码 a（a 为自然数）表示 a 个 10^2，同样顺推知，千位上数码 a 表示 a 个 10^3，而万位上数码 a 表示 a 个 10^4……

如果只用 0，1，2，3，4 这五个数码记数，类似于十进制，规定“逢五进一”，便是整数的五进制记数法．如十进制数 $178=125+50+3=1\times5^3+2\times5^2+0\times5+3=1203_{(5)}$.

特别地，计算机语言使用的是由 0 和 1 这两个数码来记数．“逢二进一”的规则便是整数的二进制数．如十进制数 $23=2^4+2^2+2+1=10111_{(2)}$．而有着 7 个数位的二进制数：

$1010110_{(2)}=1\times2^6+0\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0=86.$

表示的仅是只有两个数位的十进制数．为解决这个表示数“太慢”的问题，专门设计了十六进制数来换算二进制数，规定用字符 0，1，2，…，9，A，B，C，D，E，F 分别表示数 0，1，2，…，14、15，按“逢十六进一”的法则所表示的数为十六进制数．如自然数 448 表示成十六进制数是：

$448=16(16+12)=16^2+16\times12+0=1C0_{(16)}$

典型例题讲解

例一　用十进位制多项式（自然数的十进位数码表示法）表示整数 $\overline{a_0a_1a_2\cdots a_9a_{10}}$.

提示：自然数 1234 的千位上 1 表示 1 个 10^3，百位上 2 表示 2 个 10^2，十位上 3 表示 3 个 10，由此可发现计数规律.

解：$\overline{a_0a_1a_2\cdots a_{10}}=a_0\times10^{10}+a_1\times10^9+\cdots+a_9\times10^1+a_{10}$

例二　用五进制数表示自然数 234.

分析：$234=46\times5+4$.　　$46=9\times5+1$.　　$9=1\times5+4$.

解：$234=1\times5^3+4\times5^2+1\times5+4=1414_{(5)}$

▶笔▶记▶栏

例三 把二进制数 $1101_{(2)}$ 表示成自然数.

提示：二进制数"千位"上的数字 1 表示数 2^3，"百位"上的数字 1 表示数 2^2，十位上的数字 1 表示数 2.

解：$1101_{(2)} = 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2 + 1 = 8 + 4 + 1 = 13$

例三 用 0、1、2、…、9 这 10 个数字组成两个三位数和一个四位数，每个数字只用一次，要求它们的和是一个奇数，并且尽可能地小，那么这两个三位数及这个四位数的和是(　　).

A. 1995　　B. 1683　　C. 1579　　D. 1401

分析：首先从和尽可能地小着手，则千位为 1，百位为 2 和 3，最后两数的个位数的和是奇数即可.

解：为使和最小，四位数的千位数应为 1，百位上的数为 0；两个三位数上的百位应分别取 2 和 3；若三个数十位上的数分别是 4、5、6，则个位上的数便分别是 7、8、9，但 $7+8+9$ 是偶数，不合其和为奇数的要求，故三个数的十位应安排 4、5、7，个位便分别为 6、8、9，$6+8+9$ 为奇数，$1046 + 258 + 379 = 1683$，选 B.

例五 设 $\overline{abc}$ 是一个各位数字互不相同的三位数，如果 $\overline{abc}$ 等于它的各位数字之和的 k 倍，那么将 $\overline{abc}$ 的各位数字都变动了位置的所有新数之和等于 $\overline{abc}$ 的各位数字之和的多少倍?

分析：关键是理解 $\overline{abc}$ 各位数字变动位置后的新数只有 $\overline{cab}$ 与 $\overline{bca}$ 两种.

解：由题意　$100a + 10b + c = k(a+b+c)$……①

将 $\overline{abc}$ 的各位数字都变动位置所得的新数只有如下两种：a 在十位，b 在个位，c 在百位，即 $\overline{cab}$；a 在个位，b 在百位，c 在十位，即 $\overline{bca}$. 设 $\overline{cab} + \overline{bca} = x(a+b+c)$，即有

$$(100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) = x(a+b+c),$$

$$\therefore 11a + 101b + 110c = x(a+b+c)\cdots\cdots②$$

① + ②得，$111(a+b+c) = (x+k)(a+b+c)$，

$\therefore x = 111 - k$ 即新数之和是原数各位数之和的 $111-k$ 倍.

例六 若三位数与组成该三位数的各位数字之和的比值为 M（如三位数 234，则 $M = \dfrac{234}{2+3+4}$），求 M 的最大值和最小值.

分析：关键是把 M 的一般形式 $\dfrac{\overline{abc}}{a+b+c}$ 转化为 $100 - \dfrac{99b+99c}{a+b+c}$，然后对数码 a、b、c 进行讨论，便可获解.

解：设这个三位数 $\overline{abc} = 100a + 10b + c$，

$$\therefore M = \frac{100a + 10b + c}{a+b+c} = 100 - \frac{90b + 99c}{a+b+c},$$

显然$\frac{90b+99c}{a+b+c}\geqslant 0$，当其值为0，即 $b=c=0$ 时，M 最大，其值为 $M=100-0=100$．　$\therefore M$ 最大值为100

当$\frac{90b+99c}{a+b+c}$最大时，M 最小．即 $b=c=9$，$a=1$ 时$\frac{90b+99c}{a+b+c}=\frac{1701}{19}$．　$\therefore$ M 最小值为 $100-\frac{1701}{19}=\frac{199}{19}$．

例七　把两个八进制数 $456_{(8)}$ 和 $373_{(8)}$ 的和表示成十进制数．

分析：关键是理解八进制数的和可类似于十进制数的求和运算，最后再化成十进制数．也可先把两个八进制数化成十进制数后再求和．两种方法都要掌握．

解：$456_{(8)}+373_{(8)}=1051_{(8)}$

算式如右①：(逢8进一)

$$\begin{array}{r}456\\ 373\\ \hline 1051\end{array}$$

$1051_{(8)}=1\times 8^3+0\times 8^2+5\times 8+1=512+41=553$

另一方面 $456_{(8)}=4\times 8^2+5\times 8+6=256+46=302$

$373_{(8)}=3\times 8^2+7\times 8+3=192+59=251$

$\therefore 456_{(8)}+373_{(8)}=302+251=553$.

例八　已知算式 $1534\times 25=43214$，试说明这个等式是什么进制下的乘法运算．

分析：由算式中的数码知，所求进位制数一定大于5．列竖式对照十进制下的乘积运算．推测验算出进制数．

解：因算式中出现的最大数字是5．

故进位制数一定大于5．而算式中被乘数的右边第一个数是4，乘数的右边第一个数字是5，十进制下的乘积是20，而算式中积的右边第一个数字是4，故推测是八进制或者十六进制，就上述两种情况验算知是八进制算式．算式如右：

$$\begin{array}{r}1534\\ \times\quad 25\\ \hline 10314\\ 3270\ \\ \hline 43214\end{array}$$

▶随▶记▶栏

练习一

一、选择题

1．整数$\overline{a_{10}a_9a_8\cdots a_1a_0}$用十进位制多项式表示为(　　)．

A．$a_{10}+a_9+a_8+\cdots+a_1+a_0$　　B．$a_{10}\times 10^{11}+a_9\times 10^{10}+\cdots+a_1\times 10+a_0$

C．$a_{10}\times 10^{10}+a_9\times 10^9+\cdots+a_1\times 10+a_0$　　D．$a_{10}\times 10^9+a_9\times 10^8+\cdots+a_1\times 10+a_0$

2．整数 $7\underbrace{1\cdots0}_{n个}7\underbrace{00\cdots0}_{n个}7$ 可以表示为(　　)．

A．$7\times 10^{2n}+7\times 10^n+7$　　B．$7\times 10^{2n+1}+7\times 10^{n+1}+7$

C．$7\times 10^{2n+2}+7\times 10^{n+2}+7$　　D．$7\times 10^{2n+2}+7\times 10^{n+1}+7$

3．如果 A 和 B 是非零数字，则四位数9876与三位数$\overline{A32}$，二位数$\overline{B1}$的和是(　　)．

A．四位数　　B．五位数　　C．六位数　　D．位数取决于 A、B 值的大小

4. 一个六位数由两个三位数重复而得，如 357357，401401 等，这种类型的任何数，恰可以被何数整除(　　).

A. 只有 7 与 11　　B. 只有 11 与 13　　C. 只有 7 与 13　　D. 能同时被 7，11，13

5. 两个十位数 1111111111 和 9999999999 的乘积的数字中有奇数(　　).

A. 7 个　　B. 8 个　　C. 9 个　　D. 10 个

6. a 表示一个两位数，b 表示一个四位数，把 a 放在 b 的左边组成一个六位数，那么这个六位数应表示成(　　).

A. ab　　B. $10000a+b$　　C. $100a+10000b$　　D. $100a+b$

二、填空题

1. 已知 $a\times b\times\overline{ab}=\overline{bbb}$，则 $a=$______，$b=$______.

2. 设有一个六位数$\overline{1abcde}$，乘以 3 后变成$\overline{abcde1}$，这个六位数是______.

3. 有一个五位数$\overline{4x97x}$能被 3 整除，满足条件的数中最小的一个是______.

4. 若四位数$\overline{2x78}$是一个能被 17 整除的四位数，则 $x=$______.

5. 一个四位数，等于抹去它的首位数字后，剩下的三位数的 3 倍减去 42，这个四位数是______.

6. 设$\overline{abc}$是一个各位数字互不相同的三位数，如果$\overline{abc}$等于它的各位数字之和的 k 倍，那么$\overline{abc}$的各位数字都变动了位置的所有新数之和等于$\overline{abc}$的各位数字之和的______倍.

7. 二进制数 $10110101_{(2)}$化为八进制数是______.

八进制数 $54_{(8)}$化为二进制数是______.

三、解答题

1. 设$\overline{abcd}$是一个四位正整数，已知三位正整数$\overline{abc}$与 246 的和是一位正整数 d 的 111 倍，$\overline{abc}$又是 18 的倍数，求出这个四位数.

2. 计算：$\underbrace{11\cdots1}_{1999个}\underbrace{22\cdots2}_{1999个}\div\underbrace{33\cdots3}_{1999个}$

3. 在一种室内游戏中，魔术师要求一个参加者想好一个三位数$\overline{abc}$，然后，魔术师要求他再记下五个数$\overline{acb}$，$\overline{bca}$，$\overline{bac}$，$\overline{cab}$，$\overline{cba}$，并把它们加起来，求出和 N，只要讲出 N 的大小，魔术师就能识别出原数$\overline{abc}$是什么．如果 $N=3194$，试求$\overline{abc}$.

专题训练一

一、填空题

1. 两个八进制数 $456_{(8)}$ 与 $373_{(8)}$ 的积表示成八进制数为________.
2. 两个七进制数 454 与 5 的商的七进制表示为________.
3. 用 $25_{(k)}$ 表示 k 进位制的数，如果 $52_{(k)}$ 是 $25_{(k)}$ 的两倍，那么 $123_{(k)}$ 在十进位制下表示的数是________.
4. 在十进制数中各数位上数字是 0 或 1，并且能被 225 整除的最小的数是________.
5. a 表示一个两位正整数，b 表示一个三位正整数．如果把 a 放到 b 的左边组成 5 位数，那么 $\overline{ab}=b+$________.
6. 一个两位数若将它的数字互换后，所得的数比原来的数大 9，这样的两位数共有________个．
7. a、b、c、d、e 表示五进制数中的 5 个不同的数字．如果 $\overline{ade}$、$\overline{adc}$、$\overline{aab}$ 是由小到大的连续自然数，那么 $\overline{cde}_{(5)}$ 写成十进制数是________.
8. a、b 是自然数，如果 a 进位制数 47 和 b 进位制数 74 相等，那么 $a+b$ 的最小可能值是________.

二、解答题

1. 十进制自然数 a 是由 n 个相同的数码 x 组成的，b 是由 n 个相同的数码 y 组成的，c 是由 $2n$ 个相同的数码 z 组成的，对于任意的 $n\geqslant 2$，求出所有使得 $a^2+b=c$ 成立的数码 x、y、z.

2. 请找出四个砝码，使它能用一架天平称出 1 ~ 40 克间所有整数克的物体，并说明理由．

3. 某军需仓库保管员，将 1000 发子弹分放在 10 个盒子里，一旦需要取走 1 ~ 1000 间的任何数目的子弹时，不用拆开盒子，便可拿出所需数目的子弹．试问：10 个盒子里各放多少发子弹？

第二讲　定义新运算

解题指要

在学习数学的过程中，对定义的理解是掌握概念的关键，也是能力检测的必考点．至于获得人们“公认的”加（+）减（-）乘（×）除（÷）四则运算只不过是人们经过“后天”系统的知识训练而获得的认知罢了．为此我们构造一些人们熟知的数学运算符号“以外”的“新符号”、赋予它特殊的运算意义，来培养提高同学们对定义的理解能力，这就是有趣的“自定义”新运算．

定义新运算是数学竞赛中较多见的题目，是考查参赛者的理解（思维应变）能力和演算（计算）能力的重要内容之一．本讲题例亦可作加强这方面的适应性训练之用．

典型例题讲解

例一　现定义两种运算“$*$”，“$\otimes$”，对于任意两个整数 a 和 b 有：$a*b=a+b-2$，$a\otimes b=a\times b-1$．求 $4\otimes[(3*5)*(2\otimes1)]$ 的值．

分析：式子中的括号仍然表示优先运算．

解：根据定义有 $3*5=3+5-2=6$，$2\otimes1=2\times1-1=1$．

$\therefore 4\otimes[(3*5)*(2\otimes1)]=4\otimes(6*1)=4\otimes5=19$

例二　定义 $a\Delta b=\dfrac{a-2b}{ab}$，求值：（1）$3\Delta4\Delta\dfrac{1}{2}$；（2）$(4\Delta3)\Delta\dfrac{1}{2}$；（3）$4\Delta(3\Delta\dfrac{1}{2})$．

分析：观察这三个算式中运算数值的位置，不难发现可以用这组具体的数值来验算原有的运算律如交换律、结合律是否适合新运算“Δ”，运算时应仍按先左后右、括号优先的办法．

解：按规定，得：

$3\Delta4=\dfrac{3-2\times4}{3\times4}=-\dfrac{5}{12}$；$4\Delta3=\dfrac{4-2\times3}{4\times3}=-\dfrac{1}{6}$

$3\Delta\dfrac{1}{2}=\dfrac{3-2\times\dfrac{1}{2}}{3\times\dfrac{1}{2}}=\dfrac{4}{3}$．

$\therefore 3\Delta4\Delta\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{12}\Delta\dfrac{1}{2}=\dfrac{34}{5}$

▶笔▶记▶栏

$(4\Delta 3)\ \Delta\ \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{6}\Delta\ \dfrac{1}{2} = 14$

$4\Delta(3\Delta\ \dfrac{1}{2}) = 4\Delta\ \dfrac{4}{3} = \dfrac{4-2\times\dfrac{4}{3}}{4\times\dfrac{4}{3}} = \dfrac{1}{4}.$

显然不满足交换律，也不适合结合律.

例三 设 $x\oplus y = xy + x + y$. 记 $n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n$. 求 $n! - 1\oplus 2\oplus 3\oplus\cdots\oplus n$ 的值.

分析：由 $n!$ 表示连续自然数的积，联想到把新运算“$\oplus$”转化变形为积的形式，方好进行减法运算．而对于这一类与自然数有关的变化问题一般是采用归纳法去猜想规律的方法求解.

解：$\because xy + x + y = x(y+1) + y + 1 - 1 = (x+1)(y+1) - 1$

$\therefore\ 1\oplus 2 = (1+1)(2+1) - 1 = 3! - 1.$

$1\oplus 2\oplus 3 = (3! - 1)\oplus 3 = (3! - 1 + 1)(3+1) - 1 = 4! - 1$

$1\oplus 2\oplus 3\oplus 4 = (4! - 1)\oplus 4 = (4! - 1 + 1)(4+1) - 1 = 5! - 1$

$1\oplus 2\oplus 3\oplus 4\oplus\cdots\oplus n = (n+1)! - 1$

$\therefore n! - 1\oplus 2\oplus 3\oplus\cdots\oplus n = n! - [(n+1)! - 1]$

$= n! - (n+1)! + 1 = n! - (n+1)\cdot n! + 1 = -n\cdot n! + 1.$

例四 规定 $a * b = (a+1)(2b-1)$，且 $1 * (x+1) = (1 * x) + (x+1)$ 成立．求 x 的值.

分析：根据运算“$*$”指明的运算法则，把已知等式转化成普通方程而求解．这是定义新运算在解方程中的应用.

解：由规定可知：$1 * x = (1+x)(2x-1) = 4x - 2$

$1 * (x+1) = (1+1)[2(x+1) - 1] = 4x + 2.$

故得方程：$4x + 2 = 4x - 2 + (x+1).$

解之得 $x = 3.$

例五 给定自然数 a、b、c，令 $a * b$ 对于不同的 a 总有不同的值．且满足：

(1) $(a * b) * c = a * (bc)$；(2) $(a * b)(a * c) = a * (b + c)$．求 $3 * 4$ 的值.

分析：若想由给出的条件，得出“$*$”号运算法则，只有从自然数 a、b、c 的特殊取值上，通过计算找出规律，“明示”运算法则.

解：令 $b = c = 1$，代入 (1) 与 (2) 有：

$(a * 1) * 1 = a * 1\quad \therefore a * 1 = a.$

$(a * 1)(a * 1) = a * 2$，$\therefore a\cdot a = a * 2$，即 $a * 2 = a^2$

又令 $b = 2$，$c = 1$，代入 (2) 有：

$(a * 2)(a * 1) = a * 3$，$\quad\therefore a^2\cdot a = a * 3$ 即 $a * 3 = a^3$

令 $b=3$，$c=1$，代入 (2) 有：

$(a*3)(a*1)=a*(3+1)$

$\therefore a^3\cdot a=a*4$ 即 $a*4=a^4$，

$\therefore 3*4=3^4=81$.

例六 (1) 定义 $\Delta(x)=x^2-2x+3$，求 $\Delta[\Delta(\Delta(2))]$ 的值.

(2) 若 $<a>$ 表示不比 a 大的最大质数，求 $<<3>\times<25>\times<30>>$ 的值.

分析：这两种运算都应遵循先内后外的运算法则；(2) 中的符号"×"仍表示普通乘法运算.

解：(1) 由定义有：$\Delta(2)=2^2-2\times2+3=3$，

$\Delta(3)=3^2-2\times3+3=6$，

$\Delta(6)=6^2-2\times6+3=27$，

$\therefore \Delta[\Delta(\Delta(2))]=\Delta[\Delta(3)]=\Delta(6)=27$.

(2) 由质数定义知：$<3>=3$，$<25>=23$，$<30>=29$.

$\therefore <<3>\times<25>\times<30>>=<3\times23\times29>=<2001>$

$\because$ 2001、2000 均是合数，1999 是质数，

$\therefore <<3>\times<25>\times<30>>=1999$.

例六 定义 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[3.25]=3$，$[-3.25]=-4$，$\{x\}$ 表示 $x-[x]$，是 x 的小数部分，如 $\{3.25\}=0.25$，$\{-3.25\}=-3.25-(-4)=0.75$. 计算 $2\times\{-4.6\}-[1.25]+\{-1.75\}+[-2.25]$ 的值.

分析：关键是理解定义 $x-[x]$ 表示 x 的正的小数部分. $\{-4.6\}=\{-5+0.4\}=0.4$. $[x]$ 表示对 x 取整运算，$\{x\}$ 表示对 x 取小数运算. 对任意有理数 x 都有：$x=[x]+\{x\}$.

解：根据规定得：

原式 $=2\times\{-5+0.4\}-[1+0.25]+\{-1+0.75\}+[-3+0.75]$

$=2\times0.4-1+\{-1+0.75\}-3$

$=0.8-1+0.75$

$=0.55$

例六 按照例七的法则，解方程 $[x]-2\{x\}=1$.

分析：关键是由方程去发现 $2\{x\}$ 是整数，进而展开讨论. 注意 $0\leqslant\{x\}<1$.

解：由方程得 $2\{x\}=[x]-1$，故 $2\{x\}$ 是整数.

又 $\because 0\leqslant\{x\}<1$，$\therefore \{x\}=0$ 或 $\{x\}=0.5$

当 $\{x\}=0$ 时，代入方程得：$[x]=1$

故 $x=[x]+\{x\}=1+0=1$

当 $\{x\}=0.5$ 时，代入方程，得：$[x]=2$，

故 $x=[x]+\{x\}=0.5+2=2.5$

求得原方程的解是 $x=1$ 或 $x=2.5$.

笔记栏

练习二

一、选择题

1. 已知 $a*b=ab+a+b$．若 $3*x=27$．则 x 的值为(　　)．

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 9

2. 规定 $a*b=ab+a+b$，那么 $6(6*15)+(1*667)=$(　　)．

A. $666+668$　　B. $666+667+668$　　C. $666\times667\times668$　　D. $540+667+667$

3. 规定 $a*b=ab+a+b$．那么(　　)．

A. $*$是可交换和可结合的　　B. $*$是可交换，但不可结合

C. $*$是不可交换的，但可结合　　D. $*$是不可交换，也不可结合

4. 对于实数 x、y，定义新运算 $x*y=ax+by+cxy$，其中 a、b、c 是常数．若 $1*2=3$，$2*3=4$，且有一个非零的常数 d，使得对于任意的 x，恒有 $x*d=x$，则 d 的值是(　　)．

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

二、填空题

1. 规定 $a*b=\dfrac{3a-5b}{2}$，则满足 $4|x|*3=-\dfrac{3}{2}$ 的 x 是_______．

2. 规定 $a*b=\dfrac{1}{(a+1)(b+2)}$，那么 $1*2+3*4+5*6+\cdots+1997*1998=$________．

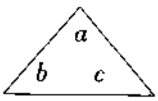
3. 如果定义运算“$*$”，使得 $3*4=3^2+4^2+5^2+6^2=86$，$4*3=4^2+5^2+6^2=77$，那么 $6*5=$________．

4. 规定 $a*b=(a+1)(1-b)$，若 $(x*2)*(x+1)=(x+1)*(x+2)$成立．则 $x=$_______．

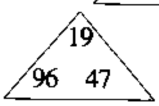
5. 定义$[x]$表示不超过 x 的最大整数．$\{x\}=x-[x]$．计算 $[3.5\times3]-[3.5]\times3-\{-3.5\}\times3$ 的值是_______．

6. 规定“※”为一种运算，对任两数 a，b，有 $a※b=\dfrac{a+2b}{3}$，若 $6※x=\dfrac{2}{3}$，则 $x=$_______．

7. 对于任意两个数 m，n，有 $m※n=\dfrac{2m-n}{3}$，则 $9※(9※9)=$_______．

8. “三角” 

表示运算 $a-b+c$，“方框” $\boxed{\begin{matrix}x & w\\ y & z\end{matrix}}$ 表示运算 $x-y+z-w$，则



$\times\boxed{\begin{matrix}59 & 29\\ 62 & 9\end{matrix}}=$_______．

专题训练二

一、填空题

1. “$*$”表示一种运算符号，它的含义是：$x*y=\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{(x+1)(y+A)}$；已知 $2*1=\dfrac{2}{3}$．求 $1998*1999$ 的值是________．

2. 规定 $a*b=ab+a+b$，那么 $(3*2)\times(1*100)=$________．

3. 符号(a,b)表示一个有序整数对，其中 a，b 为整数，当且仅当 $a=c$，$b=d$ 时，$(a,b)=$

(c, d) [例如$(3, 4)\neq(4, 3)$]，对有序整数对定义一种运算“$*$”：$(a, b)*(c, d)=(a-c, b+d)$.

若$(3, 2)*(0, 0)=(x, y)*(3, 2)$，求 x^2+xy+y^2 的值是________.

4. 记$[a, b, c, d]=ad-bc$，则不等式$[x, 3, 2, -5]>9$的解集是________.

5. 定义 $a\oplus b=(a+b)(a-b)$，则方程$(x+2)\oplus x=26$的解是________.

6. 定义$[x]$表示不大于 x 的最大整数，$\{x\}$表示 x 的正纯小数部分，求方程 $x+3\{x\}=2[x]$的非零解是________.

二、解答题

1. 设“$*$”是一种运算符号，对任意两数 x、y，有：$x*y=\dfrac{x^2}{a}-\dfrac{y^2}{4}$，其中 a 是一个不等于 0 的常数.

(1) $x*y$ 是否等于 $y*x$.

(2) 若 $2*3=2$，求$(2*5)*(-2)$的值.

2. 规定 $x*y=mx+ny$，$x\Delta y=kxy$，其中 x、y、m、n、k 均为自然数，已知 $1*2=5$、$(2*3)\Delta 4=64$. 则$(1\Delta 2)*3$的结果是多少?

3. 对任何两个整数 x、y，都有一个确定的整数 $x\Delta y$，并且有以下性质：

(1) 对所有 x，$x\Delta 0=1$；

(2) 对所有 x、y、z，$(x\Delta y)\Delta z=z\Delta(xy)+z$，试求 $7\Delta 8$.

第三讲　整数的奇偶性

解题指要

奇数与偶数组成了整数．奇数是不能被 2 整除的整数 ±1，±3，±5，……它们可以表示为 $2k\pm1$ 的形式．偶数是能够被 2 整除的整数 0，±2，±4，±6，……它们可以表示为 $2k$ 的形式．其中 k 为整数．

利用奇数和偶数的一些基本性质，可以简捷而巧妙地解决许多与整数有关的问题．常用的奇数与偶数的性质有：

（1）奇数 ± 奇数 = 偶数．奇数 ± 偶数 = 奇数．偶数 ± 偶数 = 偶数．

多次应用性质（1）可得：

（2）奇数个奇数的和为奇数．偶数个奇数的和为偶数．

（3）奇数 × 奇数 = 奇数．奇数 × 偶数 = 偶数．偶数 × 偶数 = 偶数．

（4）有限个整数的连乘积是奇数，则其中的每一个因数都是奇数；反之，连乘积是偶数，则其中至少有一个因数是偶数．

（5）两个整数的和与差的奇偶性相同．（由此可推广到 n 个整数的和与差的奇偶性相同，n 为大于 2 的正整数）

（6）对于整数 m，如果 a 为奇数，则 $m\pm a$ 改变了 m 的奇偶性；如果 a 为偶数，则 $m\pm b$ 的奇偶性与 m 相同．

典型例题讲解

例一　已知 a、b、c 均为奇数，$a^{1999}+b^{2000}+c^{2001}$ 是奇数还是偶数？为什么？

解：由于 a、b、c 均为奇数．由性质（3）知 a^{1999}、b^{2000}、c^{2001} 均为奇数，再由性质（2）知它们的和为奇数．

例二　任意给出三个整数，总可以挑出两个数求和后再与第三个数相乘，使其积为偶数．为什么？

解：任意的 3 个整数中至少有两个数的奇偶性相同．而这两个数作和后必为偶数．再由性质（3）知，这个偶数与第三个数相乘，其积是偶数．

▶笔▶记▶栏

例三　能否找到满足等式 $(x+y)(x-y)=2002$ 的自然数 x 与 y？为什么？

解：不能．

因为 $x+y$ 与 $x-y$ 同奇偶性．如果 $x+y$ 与 $x-y$ 均为奇数，则 $(x+y)(x-y)$ 也为奇数，而等式右边的2002是偶数，故不能相等．如果 $x+y$ 与 $x-y$ 都为偶数，那么 $(x+y)(x-y)$ 一定是4的倍数，而2002不是4的倍数．此时等式也不能成立．

综上所述，不能找到满足以等式的自然数 x、y．

例四 把自然数1、2、3、……、2001打乱次序后再任意排成一列数 a_1、a_2、a_3、……a_{2001}．则 $(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\cdots(a_{2001}-2001)$ 一定为偶数．试说明理由．

分析：只要能说明 a_1-1、a_2-2、…$a_{2001}-2001$ 这2001个差中至少有一个是偶数即可．

解：如果 $(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\cdots(a_{2001}-2001)$ 为奇数，那么 a_1-1，a_2-2、a_3-3、…、$a_{2001}-2001$ 均为奇数．根据性质（2）可知，$(a_1-1)+(a_2-2)+(a_3-3)+\cdots+(a_{2001}-2001)$ 为奇数．

而事实上 $(a_1-1)+(a_2-2)+(a_3-3)+\cdots+(a_{2001}-2001)$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2001})-(1+2+3+\cdots+2001)=0$

是偶数，这与2001个奇数的和是奇数相矛盾．所以

$$(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\cdots(a_{2001}-2001)\text{必为偶数．}$$

例五 书店有售价分别为1元、1.5元、2.5元、4元的贺年卡．李明同学用若干张面值为10元的人民币恰好买了30张贺卡，其中某两种各5张，另两种各10张，那么李明买贺卡花了几张10元的人民币？

分析：利用整数奇、偶性将四种贺卡分两组，按5和10两种情况进行讨论．

解：顺次设题中4种单价的贺卡分别买了 a、b、c、d 张，共用 m 张10元的人民币，依题意有

$$a+1.5b+2.5c+4d=10m \quad \text{即 } 2a+3b+5c+8d=20m \quad ①$$

①式右边 $20m$ 为偶数，左边的 $2a+8d$ 为偶数，因此左边的 $3b+5c$ 也只能是偶数．而3和5都是奇数，所以 b 与 c 有相同的奇偶性．

当 b 与 c 均为偶数时，根据题意有 $b=10$、$c=10$

从而 $a=5$，$d=5$．把它们代入①得：$10+30+50+40=20m$，$m=\frac{13}{2}$

这与 m 为整数矛盾，故 b 与 c 不能是偶数．

当 b 与 c 为奇数时，有 $b=5$、$c=5$，

从而 $a=10$，$d=10$，代入（1）式得：$20+15+25+80=20m$，$m=7$

答：李明买贺年卡花去7张10元的人民币．

例六 13个砝码，每一个砝码的克数都是整数，如果其中任意12个都可以分成重量相等的两组，并且每组6个砝码，证明这13个砝码的克数一定都是奇数或都是偶数．