相互獨立隨機變數之和的極限分佈

Б. В. 哥涅堅科　　A. Н. 廓洛莫格若夫

科 學 出 版 社

相互獨立隨機變數之和的極限分佈

Б. В. Гнеденко
А. Н. Колмогоров 著
王 壽 仁 譯

科 學 出 版 社
1955年7月

Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Гостехиздат, 1949

內 容 提 要

本書是專門研究概率論中弱極限理論的。全書共分三部九章（每一部分包括三章）。第一部分把概率的基本知識給以簡短的敍述。第二部分詳盡地講述了普遍極限定理及其特款：中心極限定理、大數法則、向普阿松分佈收斂及分佈函數族L。第三部分，第七章研究穩定律及其吸引場，第八章研究漸近展式，第九章研究局部極限定理。這一本書可以說是弱極限理論的近二十餘年來研究成果的總結，具有第一流的學術價值。

相互獨立隨機變數之和的極限分佈

翻譯者　王　壽　仁

出版者　科　學　出　版　社
北京東四區帽兒胡同2號

印刷者　北　京　新　華　印　刷　廠

總經售　新　華　書　店

書號 0246	1955年7月第一版
(譯) 154	1955年7月第一次印刷
(京)0001—2,090	開本：787×1092 1/25
字數：235,000	印張： 11 11/25

定價：(9) 二　元

目　　錄

II. 普遍極限定理

III. 相同分佈的加項

導　言

1.

在概率論課程的形式構成中，極限定理呈現爲基於概率論初級篇幅上的一種上層建築的形式，而在初級篇幅裏一切問題都有其最終純粹算術的性質．可是實際上祇有通過極限定理才能顯出概率論的可理解的價值．更進一步說，如果沒有極限定理就不可能瞭解本門科學的發端概念本身的眞正內容——概率的概念．事實上概率論的可理解的價值，决定於大量隨機現象，在其集體的行動中創立了嚴格的但非偶然的規律性；而概率的數學的概念將是毫無成果的，如果它不具體體現在大量重複同一條件時，某種結果出現的頻率（這種體現常常是接近的而不是絕對確實的，但當重複的次數增多時，在原則上，這種體現是無窮盡的精確與爲所欲爲的確實）．

因此在巴士加或費爾馬的工作裏，關聯着計算賭博中概率的初等算術計算，祇可以看作是概率論的史前理論，而概率的眞正歷史是始於伯奴立（[3], 1713）及模阿夫（[56], 1730）的極限定理．模阿夫結果的基本意義被拉普拉斯（[42], 1812）完全給予闡明．自然的接着伯奴立及模阿夫-拉普拉斯極限定理而直到切被謝夫以前，作爲概率論的基本成就，那就是普阿松的三個極限定理；其中之一推廣了伯奴立定理，另一個推廣了模阿夫-拉普拉斯定理而第三個引導到所謂普阿松分佈律．爲了能够清礎地掌握今後的情況，我們現在例舉五個極限定理的一些近代的陳述．

這五個極限定理的前四個是關聯着下列相互獨立事項敘列的：

$$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \cdots\cdots.$$

這些事項的概率記爲

$$p_n = \mathbf{P}(\mathcal{E}_n),$$

在前 n 個事項

$$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \cdots\cdots, \mathcal{E}_n$$

裏實際上出現的個數以 μ_n 表之．在這五個極限定理中，前二個定理裏的 p_n 都是相同的而等於數值 p $(p \neq 0, 1)$．

1) 伯努立定理．對於任意 $\varepsilon > 0$，當 $n \to \infty$ 時

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \to 0.$$

2) 拉普拉斯定理．當 $n \to \infty$ 時一致的對於 z_1 及 z_2

$$\mathbf{P}\left\{z_1 < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_2\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

在下面的二個定理中，概率 p_n 可以隨着 n 而變化，但是滿足下列關係

$$\sum p_n(1-p_n) < \infty.$$

在陳述裏，令

$$p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n = A_n,$$

$$p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2) + \cdots\cdots + p_n(1-p_n) = B_n^2.$$

3) 普阿松型的大數法則．對於任意 $\varepsilon > 0$，當 $n \to \infty$ 時

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{A_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \to 0.$$

4) 普阿松型的基本極限定理．當 $n \to \infty$ 時，一致的對於 z_1 及 z_2

$$\mathbf{P}\left\{z_1 < \frac{\mu_n - A_n}{B_n} < z_2\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

我們所要提出的第五個定理關聯着組的敘列

$$\begin{array}{l} \mathcal{E}_{11}, \\ \mathcal{E}_{21}, \mathcal{E}_{22}, \\ \mathcal{E}_{31}, \mathcal{E}_{32}, \mathcal{E}_{33}, \end{array}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathcal{E}_{n1}, \mathcal{E}_{n2}, \cdots\cdots \mathcal{E}_{nn},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

在每一組裏的事項是相互獨立的而且每一個的概率都等於 p_n，此 p_n 祇與組的名次有關。令 μ_n 表示第 n 組裏實際上出現的事項的個數。

5）對於小量事項的普阿松極限定理。若當 $n\to\infty$ 時

$$n p_n \to a,$$

則

$$\mathbf{P}(\mu_n = m) \to \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

如所周知，若定義隨機變數

$$\xi_{\mathcal{E}} = \begin{cases} 1 & \text{如果事項 } \mathcal{E} \text{ 發生,} \\ 0 & \text{如果事項 } \mathcal{E} \text{ 不發生,} \end{cases}$$

那麼我們可以把定理 1)，2)，3)，4) 裏面的 μ_n 表爲

$$\mu_n = \xi_{\mathcal{E}_1} + \xi_{\mathcal{E}_2} + \cdots\cdots + \xi_{\mathcal{E}_n},$$

而把定理 5) 裏面的 μ_n 表爲

$$\mu_n = \xi_{\mathcal{E}_{n1}} + \xi_{\mathcal{E}_{n2}} + \cdots\cdots + \xi_{\mathcal{E}_{nn}}.$$

這樣就使得我們知道上述的五個定理不過是相互獨立隨機變數之和的極限定理的非常特殊的情形。

正態概率分佈的表示式

$$\mathbf{P}(\zeta < z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

是定理 2) 及 4) 的極限。此表示式在個數很多的相互獨立加項的和的極限的更普遍問題中也必將出現，而在和裏每一個加項祇起着很小的作用。這個表示式在高斯的誤差論裏是一個重要的概念。但是關於嚴格的證明，高斯沒有達到等價於模阿夫-拉普拉斯定理的結果。

關於按照任意分佈的相互獨立加項之和的極限定理的嚴格證明

的有效辦法，是在十九世紀前半葉由切被謝夫所創立。他的古典工作是概率論發展過程中新紀元的開端。

2.

切被謝夫的一切努力是與解決兩個問題相聯系的。給了一串相互獨立的隨機變數

$$\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n, \cdots\cdots,$$

它們具有有窮數學期望值

$$a_n = \mathbf{M}\,\xi_n$$

及有窮離差

$$b_n^2 = \mathbf{D}^2\,\xi_n = \mathbf{M}(\xi_n - a_n)^2.$$

令

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots\cdots + \xi_n,$$
$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n,$$
$$B_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots\cdots + b_n^2.$$

第一問題．在什麼條件下大數法則能够成立，亦即對於任意 $\varepsilon > 0$，當 $n \to \infty$ 時

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\zeta_n}{n} - \frac{A_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \to 0?$$

第二問題．在什麼條件下基本極限定理能够成立，亦即當 $n \to \infty$ 時一致的對於 z

$$\mathbf{P}\left(\frac{\zeta_n - A_n}{B_n} < z\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz?$$

1867 年切被謝夫在工作[81]中所創的方法，應用到第一個問題上所得到的需要條件為

$$B_n = o(n^2),$$

這個條件被稱為馬爾可夫條件，因為馬爾可夫首次以切被謝夫論證的普遍程度顯明的指出此式。具有馬爾可夫條件的大數法則，不但

包含了伯奴立及普阿松定理 1) 及 3)，而且通常在極大多數的應用中，相當完全的窮述了相互獨立加項之和的問題。

解第二問題時出現了很大的困難。針對解決此問題，切被謝夫創立了矩法（метод моментов）。此法是他在數學領域中的一個重要的成就。在工作[82]中於1887年切被謝夫所給的解法基於一個引理，而這個引理後來才由馬爾可夫給以證明（參看他的工作[51]，1898）。後來切被謝夫第二問題又被魯雅普諾夫用其它方法在更普遍的條件下給以證明（[49]，1900；[50]1901）。不久之後，馬爾可夫用矩法也能得到稍弱於魯雅普諾夫的結果，但魯雅普諾夫的方法及其後來的發展，應用在相互獨立加項之和的極限理論各種問題中顯示出它的簡單而有力。此方法就是特徵函數方法，本書即以此法爲基本方法。

魯雅普諾夫所給的解，滿足很多應用的所有需要。但是在本書中我們沒有叙述魯雅普諾夫定理而以 §21 定理 4 來解答切被謝夫第二個問題，這是因爲出現在本書 §21 定理 4 中的林得伯格條件：對於任意 $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\{|\xi_k-a_k|\geqslant\varepsilon B_n\}=0$$

比魯雅普諾夫條件稍稍的寬廣些，而且在邏輯結構上也簡單些；魯雅普諾夫條件是：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n^{2+\delta}}=0,$$

此處

$$C_n=c_1+c_2+\cdots\cdots+c_n,$$
$$c_k=\mathbf{M}|\xi_k-a_k|^{2+\delta}.$$

3.

現在轉來考察一種簡單而特殊的情形，令

$$\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots,\xi_n,\cdots\cdots$$

爲相互獨立的相同分佈的隨機變數叙列。在這種情形下對於基本極

限定理的應用除了要求其數學期望值

$$a_n=a$$

及離差

$$b_n=b$$

存在外，不再要求其它補充條件(參看本書 §35 定理 4)．但是如果由此對於相同分佈加項的情形推出下述結論時，那就是不對的：對於這種情形不存在不以正態分佈爲極限，而以其它分佈爲極限的有用的極限定理．

爲了說明這種想法僅僅是一種偏見，我們舉一個例子．我們考察簡單而古典的直線上點的隨機遊動 (ряд схем блуждания)，這與擲銅錢出字或面的打賭是相對應的：

$$\eta(0)=0,$$

$$\eta(t+1)=\begin{cases}\eta(t)+1, \text{ 其概率爲 } \dfrac{1}{2},\\ \eta(t)-1, \text{ 其概率爲 } \dfrac{1}{2},\end{cases}$$

$\eta(t+1)$ 與

$$\eta(1), \eta(2), \cdots\cdots, \eta(t)$$

相互獨立．大家熟知這是隨機遊動中的最簡單的一種，但它在概率論而不是在賭博的很多應用中具有重要的意義．

茲將能够使

$$\eta(t)=0$$

的諸 t 遞增排列之，於是得到(以概率爲 1 的得到)無窮叙列

$$0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\cdots\cdots<\tau_n<\cdots\cdots.$$

差數

$$\xi_n=\tau_n-\tau_{n-1}$$

形成了一串相互獨立相同分佈的隨機變數．每一個 ξ_n 祇取正偶整數，其概率爲

$$p_m=\mathbf{P}(\xi_n=2m)=\frac{2m(2m-2)!}{2^{2m}(m!)^2}.$$

因爲當 $m\to\infty$ 時，漸近的有

$$p_m \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ m^{3/2}}$$

故其數學期望值

$$\mathbf{M}\,\xi_n = 2\sum_{m=1}^{\infty} m p_m$$

是無窮大．然而對於適當選擇的正則化因子和數

$$\tau_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots\cdots + \xi_n$$

的分佈趨於一個完全確定的分佈律：

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{2\tau_n}{\pi n^2} < z\right) = \begin{cases} 0, & \text{當 } z \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^z e^{-\frac{1}{2z}} z^{-\frac{3}{2}}\,dz, & \text{當 } z > 0. \end{cases}$$

（關於此請參看 §35 定理 5 及 §34 的末尾）．

讀者應當注意式子

$$\frac{2\tau_n}{\pi n^2}$$

的分母裏的 n^2．對於相互獨立相同分佈並且具有有窮離差的加項之和 ζ_n，其基本極限定理裏的式子

$$\frac{\zeta_n - A_n}{B_n}$$

的分母的級是 $\sqrt{n}$．比較這兩個特殊情況，使得我們提出來一個普遍問題：在什麼條件下對於相互獨立相同分佈的加項

$$\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n \cdots\cdots$$

會有下列極限關係

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\zeta_n - A_n}{B_n} < z\right\} \to V(z),$$

此處 A_n 及 B_n 爲常數，又問這時什麼樣子的分佈律 $V(z)$ 可以出現？

關於可能作爲上述極限律的類的問題，已由 A. Я. 欣欽完全解

决．他證明了這個類除了不顧及一個線性變換外，祗包含佔有特殊地位的正態分佈及退化分佈：

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}0, & \text{當 } x\leqslant 0,\\ 1, & \text{當 } x>0\end{cases}$$

和一組具有無窮離差的分佈律，此律依賴於兩個參數(在第七章裏以 α 及 β 表之)．上述的一切分佈律被稱爲穩定律，其理由將在 §33 中予以闡明．這些分佈律我們認爲值得給以特別的注意，很可能在它們佔有重要地位的應用問題的範圍會日漸廣濶起來的．

4.

對於小量事項的普阿松極限定理，很早以前就應當使研究工作者想到，既或在有窮離差的情形，能够存在完全有力的及頗有應用價值的，關聯着相互獨立加項之和而且導至在本質上不同於正態分佈的極限律的極限定理．爲了有系統的考察它們，我們應當反回頭來考察隨機變數組的敘列圖表：

$$(\xi_{n1},\xi_{n2},\cdots\cdots,\xi_{nm_n})\quad n=1,2,3,\cdots\cdots,$$

此處在每一組中的隨機變數是相互獨立的．今考察和數

$$\zeta_n=\xi_{n1}+\xi_{n2}+\cdots\cdots+\xi_{nm_n}.$$

最簡單而重要的情形是當每一個組中的隨機變數 ξ_{nk} 具有相同分佈．同以前的問題一樣，問在什麼條件下能够使下列極限關係成立

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\zeta_n-A_n}{B_n}<z\right\}\to V(z),$$

而且什麼樣子的分佈律可以出現．這時當然祗考慮下列關係成立時的情形

$$m_n\to\infty.$$

很奇怪，當所有的組中所有的隨機變數 ξ_{nk} 祗取兩個數值 x' 及 x'' 時，此 x' 及 x'' 與足碼 n,k 無關，那麼唯一可能的極很律除了不顧及一個線性變換外，將是正態分佈及退化分佈 $\varepsilon(x)$ 及一組具有一個

參數 a 的普阿松律，此普阿松律就是對於小量事項普阿松定理的極限律(參看廓蘇亮葉夫[31])．

上面所提出的問題的極限律組與無窮可分律組重合，後者將在第三章中論及．當然它包含一切的穩定律及普阿松律．其相應的極限定理將在第四章證明．此處祇註明爲了更好的掌握共直觀意義，我們認爲熟習這個定理的一些特殊情形是很有用的，這些特殊情形在 A. Я. 欣欽的書[71]"普阿松普遍極限定理"中都講到了．這一初等極限定理祇引出來一類特殊的無窮可分律，其特徵函數爲：

$$f(t)=\exp\left\{c\int(e^{iut}-1)\,dF(u)\right\}$$

(參看 §16)，這一類的分佈律具有與其來源分佈 $F(x)$ 同樣多階的有窮矩．可以舉出導至這一類分佈律的許多物理及技術問題．

在無窮可分律中除了穩定律及上述特殊類外，我們指出一類在數理統計中所熟知的一類，這就是依賴於參數 $\alpha>0$ 的不完全 Γ-函數：

$$V(z)=\begin{cases}0, & \text{當 } z\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^z z^{\alpha-1}e^{-z}\,dz, & \text{當 } z>0\end{cases}$$

(參看 §17 例 4)．在這一類中特別有指數分佈(當 $\alpha=1$ 時)

$$V(z)=\begin{cases}0, & \text{當 } z\leqslant 0,\\ 1-e^{-z}, & \text{當 } z>0.\end{cases}$$

如果我們把每一組內隨機變數是相同分佈的假設取消，仍然照着前邊相同分佈時所陳述的，而提出確定所有的可能極限律 $V(z)$ 的問題，那麼此問題就變成了毫無內容的：此時極限分佈律 $V(z)$ 可以是任意的一個分佈律．這是很自然的，因爲此時這個要求"$m_n\to\infty$"在意義上是虛假的，此要求並不能防止例如說每一組中單獨一項 ξ_{nk} 起着優勢的作用．相當於概率論古典極限定理中原始的具有很高的觀點而有內容的結果是可以得到的，但是要加上一個條件，此條件爲：對於任意 $\varepsilon>0$，存在這樣的常數 a_{nk}，使得當 $n\to\infty$ 時

$$\sup_{1\leqslant k\leqslant m_n} \mathbf{P}\{|\xi_{nk}-a_{nk}|\geqslant \varepsilon B_n\}\to 0.$$

這個條件就是說：與所選擇的衡量標準 B_n 相比較，每一個個別加項 ξ_{nk} 的變化是"終極可略"的（предельной пренебрегаемости），此條件，或者說要求，對於和數 ζ_n 來說是很自然的。在§20中此條件的特款 $B_n=1$ 將要出現，那時我們稱之爲"終極固定"。

A. Я. 欣欽證明了在此條件下可以作爲不相同而任意分佈的加項的情形裏的極限律，仍然還是前邊所說的對於每一組都是相同分佈的加項，而且加項的個數逐漸增多的和的極限律，即無窮可分律（參看§24）。所以本書的第一部分以無窮可分律作爲中心概念是理所當然的。我們看來無窮可分律的理論，及其相聯的普遍極限定理是與各種應用同時得到的。已經知道的有關穩定律及無窮可分律的應用的問題將由本書的著者之一在不久將來另行編寫。

5.

在極限定理的一切實際應用上，眞正有意義的是當 n 爲有窮但是可以任意的大時的漸近公式。爲了使極限定理的這樣的應用有鞏固的基礎，我們應該提供餘式的估計。若當 $n\to\infty$ 時，餘式減少是很慢的，那麼當 n 爲有窮時就需要在極限分佈 $V(z)$ 上引進校正項。尋求這種校正項的有效而普遍的方法就是考察分佈函數

$$V_n(z)=\mathbf{P}\left(\frac{\zeta_n-A_n}{B_n}<z\right)$$

的這種或那種的漸近展式。對於古典的基本極限定理以下列各級

$$1,\ \frac{1}{\sqrt{n}},\ \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2,\ \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3,\ \cdots\cdots$$

爲項的漸近展式仍是由切被謝夫所證述，但他的證明並不嚴緊。切被謝夫觀點的現代發展工作將在第八章中述及。

在第九章中，將要考慮精確極限定理的各種不同的方面。當然祇是在關於向正態分佈趨近的精確古典極限定理方面，才得到了較大的進展。我們在§50中給了祇是在關於向穩定律趨近的局部定理

方面的精確現代極限定理。

上面所談的就是本書的問題範圍的一個足够明確的概述。在這個範圍內，我們爭取詳盡的收集到我們認爲具有終結價値的現代結果。至於對於那種問題，或者其目前的結果很可能在今後幾年內將被改進者，或者根據它可以想到，那些尚未求得終結的陳述，將要很簡單的相互勾通起來的，我們僅限於考慮其足以掌握此問題通性的簡單特殊情形。基於這種原因，我們祗就相同分佈加項的情形來考慮，例如說，精確極限定理及局部定理，其進一步的知識請參考專門文獻。

本書範圍內刪去了對於相互依賴隨機變數之和的推廣及許多其它推廣。要想把馬爾可夫、C. H. 伯恩斯坦及他們的後繼者，在這方面所得到的結果完全敘述出來，需要與本書篇幅相等的另外一部，因爲把這方面的極限定理完全寫出時是離不了馬爾可夫鍊的。

我們所選的範圍裏大多數的現代研究具有一些特色，這就是爭取十足普遍性及邏輯的規則性，爭取在一切可能情形中，求得同時既是必要又是充分的條件；這在我們看來是完全合法的，因爲此範圍在全部概率論裏佔着中心的地位。基於這些古典的問題及其後來很自然的推廣，當然把研究方法發展到了極端銳利的地步。所以本書的特色是純理論的：我們所選的問題都被系統的加以研究，而與其各分支目前已經得到了應用價値與否是毫無關係的。

在本書中有很多的極限律，好像單單的爲了邏輯的可能詳盡而引進來，但是我們認爲它們會與時俱增而得到了各種的應用。關於這方面前邊已經談了一些。無論如何無疑的會有：這些極限定理的火藥庫與古典標準比較起來，必然會有極大擴張的，這些極限定理需要將來帶有應用特色的教本中敘述之。這時就應當有所選擇。例如向非正態分佈的穩定律的"正則"趨近(參看 §35)，無疑的應當在每一部較大的專供統計物理工作者的教科書中加以討論。但是要在這種應用特色的教科書裏討論不規則正則化的"非正則"趨近，既或是在正態極限分佈的情形(仍參看 §35)也嫌多餘。

仍需註明在一切餘式的估計中，我們限於估計它們的級或者在