

Dynamics in Mineral Separating Processes

*Dynamics in Mineral
Separating Processes*

矿物分离过程动力学

韦鲁滨 边炳鑫 著

中国矿业大学出版社

矿物分离过程动力学

韦鲁滨 边炳鑫 著

中国矿业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

矿物分离过程动力学/韦鲁滨,边炳鑫著. —徐州:中国矿业大学出版社, 2002. 5

ISBN 7-81070-522-9

I. 矿… II. ①韦…②边… III. 矿物—分离浮选—动力学 IV. TD923

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 022618 号

书 名 矿物分离过程动力学

编 者 韦鲁滨 边炳鑫

责任编辑 宋党育

责任校对 崔永春

出版发行 中国矿业大学出版社

(江苏省徐州市中国矿业大学内 邮编 221008)

排 版 中国矿业大学出版社排版中心

印 刷 江苏徐州新华印刷厂

经 销 新华书店

开 本 787×1092 1/16 印张 8.25 字数 193 千字

版次印次 2002 年 5 月第 1 版 2002 年 5 月第 1 次印刷

印 数 1~1500 册

定 价 38.80 元

(图书出现印装质量问题,本社负责调换)



作者简介



韦鲁滨, 1962 年 7 月生。1984 年毕业于吉林大学数学系, 获理学学士学位。1984 年至 1996 年在中国矿业大学工作和学习, 1989 年获矿物加工工程专业工学硕士学位, 1995 年获工学博士学位。1996 年至 1998 年在中南工业大学矿物工程系从事博士后研究工作, 现在中国矿业大学(北京校区)化工与环境工程系任教。长期从事干法筛分和干法分选的理论 and 工艺研究, 完成了多项相关研究课题, 发表学术论文 40 余篇, 获发明专利和实用新型专利各一项, 1997 年获国家教委科技进步(甲类)一等奖, 2000 年获教育部中国高校自然科学一等奖, 2001 年获江苏省科技进步二等奖。



边炳鑫, 1962 年 10 月生, 教授。1996 年在中国矿业大学获得硕士学位, 1999 年在中国矿业大学攻读博士学位。长期从事矿物加工工程和固废处理技术的研究和教学工作。曾主编高等学校规划教材《选煤工业数理统计方法及应用》, 主审高等学校教学用书《分离技术》, 作为副主编编写国家级重点教材《选矿学》, 在《煤炭学报》等学术期刊上发表学术论文 50 余篇, 其中有 8 篇被 Ei 和 CA 收录。承担煤炭科学基金等省、部级科研项目 8 项, 获实用新型专利一项、省教学成果二等奖等多项研究成果奖。

100/06

序 言

矿物分离研究领域存在着大量的动力学问题,对这些问题的研究有助于我们对分离过程进行更深入的机理性认识和更精确的定量描述。把自然科学原理用于解决矿物分离的具体问题是一个再创造过程,一般要经历几个阶段:通过实验来考察基本现象和收集必要的数据;应用自然科学得到的规律,对实验结果进行处理,抽象出数学模型;应用数学工具求得问题的解析或数值解;把理论结果与工程实际相对照以判断模型的可靠程度和运用范围。对于复杂的工程技术问题,这一过程往往需要多次的反复。矿物分离过程的研究正在逐步摆脱纯实验所得的经验公式,开始朝向对过程进行机理的描述和应用。多年来,我主要从事干法筛分与分选的研究,在这些跨学科的研究进程中,深切感受到了动力学问题的提出和解决对于我们把握正确的研究方向、弄清分离过程的实质起着至关重要的作用。有关分离过程的理论,虽然近年来出版了一些富有特色的专著,但有关矿物分离动力学的综合论著比较少。

韦鲁滨博士是一位治学严谨、勤奋刻苦的青年学者,十几年来从事筛分和重选领域的理论研究与工程实践,取得了一系列的创新性成果,这本书部分内容就取自他1987年以来在筛分和重选领域的工作。韦鲁滨博士与边炳鑫博士合作撰写的《矿物分离过程动力学》一书,系统介绍了筛分、破碎和重选领域涉及的动力学问题和典型的应用实例,填补了国内有关矿物分离动力学综合论著的空白。

这本书在如何建立矿物分离过程中的力学和数学模型并对结果进行分析和解释有许多独到的见解。我很高兴将这本书推荐给从事矿物加工的科研、设计人员,企业的工程技术人员以及高等院校的师生,相信此书会对他们有所收益。

我期待着更多的学术专著不断问世,促进矿物加工学科的发展。

陈清如

前 言

现代科学技术的发展使得矿物分离研究领域出现多学科相互交叉与渗透的局面,振动力学、断裂力学、流体力学等作为日渐重要和必不可少的工具,极大地改变了矿物加工领域的研究内容和方法。传统的矿物分离理论相当一部分属于对过程的简单物理解释,或对实验结果的定量化总结,已远不能满足现代矿物加工工程实践的需要。现代矿物分离的研究致力于对分离过程更本质、更深入的机理性认识,以期对分离过程给予更精细的刻画,从而获得足够精确的计算模型。可以毫不夸张地说,理论研究的作用不仅在于对工程实际的指导和研究方向的把握上,其作用还在于创造新的分离方法和设备。将概率论能动地引入筛分过程的研究,促成了概率分级筛的产生,这一革命性筛分方法的出现无疑是对理论研究重要性的最好诠释。

写作本书时,作者最初打算结合自己的学习和研究体会介绍当前矿物分离若干领域的研究方法、结果和动向,初稿完成后,一些专家提醒作者应该照顾当前大多数从事矿物分离研究的读者,要适当补充一些基础知识。参考专家的意见,作者对全书进行了增删,补充了一些相关的预备知识,而在理论研究和应用方面则只给出一些在方法上具有代表性的实例,从而大大增强了本书的系统性。

本书第一章、第四章由韦鲁滨执笔,第二章由边炳鑫执笔,第三章由两人共同执笔,全书由韦鲁滨统稿。

作者要特别感谢中国工程院院士陈清如教授和中国矿业大学赵跃民教授,他们对本书提出了许多有益的建议。

目 录

第一章 筛分过程.....	1
第一节 筛分设备的发展.....	1
第二节 振动理论基础.....	4
一、自由振动	5
二、强迫振动	8
第三节 低频大振幅筛分方法的理论依据	12
一、覆盖膜的形成	12
二、覆盖膜的动力学分析	13
三、覆盖膜共振频率与筛分频率	14
第四节 筛分数学模型及仿真	16
一、筛分数学模型的发展	16
二、煤用概率分级筛数学模型	17
三、筛分过程仿真研究	22
符号表	24
参考文献	25
第二章 粉碎理论	27
第一节 破碎方式与物料性质	27
第二节 晶体破碎与裂纹扩展理论	28
一、晶体破碎理论	28
二、裂纹扩展理论	29
第三节 粉碎功耗假说	31
一、三种代表性假说	31
二、粉碎功耗假说的进一步讨论	32
符号表	33
参考文献	33
第三章 流体力学基础	34
第一节 流体的物理性质	34
一、流体的连续介质假说	34
二、流体的粘性	36
三、流体的其他物理性质	42
第二节 流体运动学	43

一、场论概述	44
二、描述流体运动的方法	48
三、流体微团运动的分析	50
第三节 理想流体动力学	54
一、理想不可压缩流体运动的基本方程	54
二、理想流体运动方程的积分	56
三、理想不可压缩流体二维无旋运动	58
四、理想流体绕物体流动	60
五、涡旋运动	64
第四节 粘性流体动力学	65
一、粘性不可压缩流体层流运动基本方程	65
二、湍流运动	71
符号表	77
参考文献	78
 第四章 流体力学在矿物分离过程中的应用	79
第一节 物体在流体中的运动	79
一、极慢运动方程与斯托克斯阻力公式	79
二、高雷诺数时的边界层理论	83
三、流体阻力的理论与实践	87
四、物体在流体中的运动	89
第二节 选矿过程中的两相流体动力学	90
一、悬浮体的流变特性及粘度测量	90
二、流体穿过固定床的压降	94
三、物体在浓相气固流化床中的受力	96
四、物体在浓相气固流化床中的运动	99
第三节 流体力学在重选过程中的应用.....	104
一、跳汰过程	104
二、水力旋流器	107
三、异型水力旋流器的松散机理与分级特性	112
符号表.....	117
参考文献.....	118

第一章 筛分过程

筛分是将松散的混合物料通过单层或多层筛面的筛孔,按照其粒度分成两种或多种不同粒级的过程。筛分作业广泛应用于矿业、能源、化工、冶金、材料、建筑、食品、医药及环境工程等领域。

第一节 筛分设备的发展

早在 16 世纪,英国煤炭工业首先使用了固定筛。到了 19 世纪下半叶,随着大工业生产的发展,开始对煤炭进行广泛的粒度分级,相继出现了滚轴筛、滚筒筛和摇动筛,这些筛分机的运动速度较慢,筛分性能较差。20 世纪 40 年代研制出了振动筛和共振筛,振动筛因其结构简单、工作可靠,在煤炭筛分中得到了广泛的应用;而共振筛因维护量大,可靠性差,在 20 世纪 70 年代逐渐被振动筛所取代。

最近 30 年来,人们对于筛分过程的认识不断深入,研究出了新的筛分方法和设备,20 世纪 70 年代以来,由于采煤机械化程度的提高、井下除尘的喷水量增加,致使原煤水分增高、粉煤含量增大,因而原煤分级筛筛孔堵塞现象十分严重。一般认为,当外在水分为 6%~14% 的原煤按 13 mm 以下进行干法筛分时,这种煤属于难筛分煤(或潮湿煤),这种粘湿原煤用一般振动筛筛分是很困难的。为了解决粘湿原煤的干法筛分问题,国内外相继研究出一批用于难筛分煤的筛分机。这些筛分机在潮湿煤炭的细粒筛分中取得了良好的效果,但对于深度筛分目前仍是一个大问题,如潮湿煤炭 6 mm 干法筛分仍未完全过关。

1. 旋转概率筛

如图 1-1-1 所示,旋转概率筛是应用旋转离心概率透筛原理进行分级的,其筛面由筛条

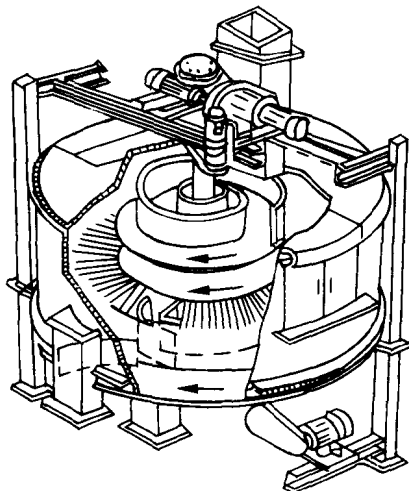


图 1-1-1 旋转概率筛示意图

组成,物料在离心力、振动力和重力作用下进行分级。筛分粘湿原煤时,筛面不易堵塞,调整筛面转速可调整分级粒度,利用这一特点可实现自动控制。主要缺点是结构复杂,分离精度不高^[1,2]。

2. 等厚筛

如图 1-1-2 所示,等厚筛的特点是,不管入料中小于筛孔的颗粒所占百分比如何,在筛分过程中筛上物料层厚度保持不变或递增。因而筛分效率高且处理量大。主要缺点是体积大,占地面积大,处理粘细煤炭时,筛孔存在着堵塞现象^[1,2]。

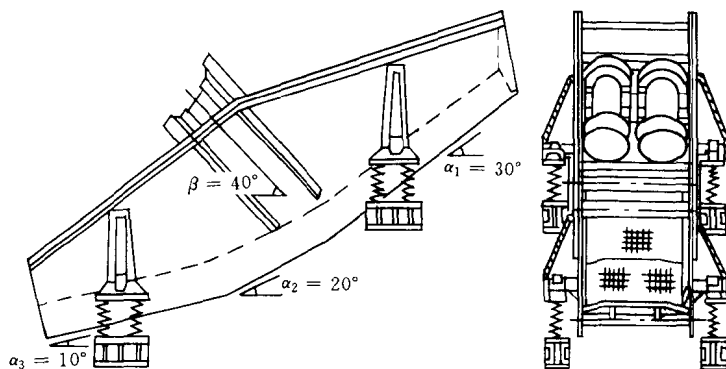


图 1-1-2 等厚筛示意图

3. 煤用概率筛

如图 1-1-3 所示,采用了多层筛面(3~6)、大倾角(30°~60°)、大筛孔(筛孔尺寸是规定分离粒度的 2~10 倍)的结构,因而物料运动速度快,处理量大,且一台筛子可出多种粒级产品。主要缺点是对粘湿煤炭进行细粒级(6 mm)筛分时,存在筛孔堵塞,筛分效率低的问题^[3,4]。

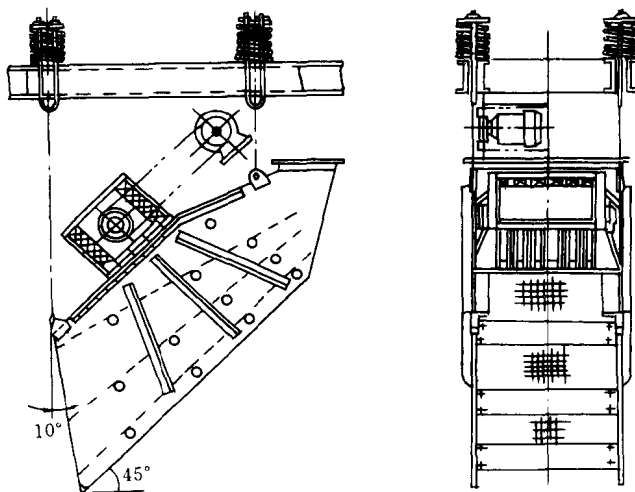


图 1-1-3 煤用概率筛示意图

4. 琴弦筛

琴弦筛采用了结构新颖的琴弦式筛网。这种筛网不仅开孔率高,而且随同筛箱的运动产生二次振荡,使颗粒难以粘附在筛丝上或堵塞在筛孔中,因而它具有处理量大、筛孔不易堵的优点,但目前在使用中仍存在筛孔堵塞、筛分效率低的问题^[5]。

5. 筛面弛张筛

如图 1-1-4 所示,筛面弛张筛采用了双筛箱结构,由导杆带动两个筛箱作相向和相背运动,筛板上相邻的横梁分别与两个筛箱相连,使筛面作弛张运动,因而筛孔不易堵塞且处理量大,效率高。缺点是结构复杂,筛面材质要求高,成本高,占地面积大^[6]。

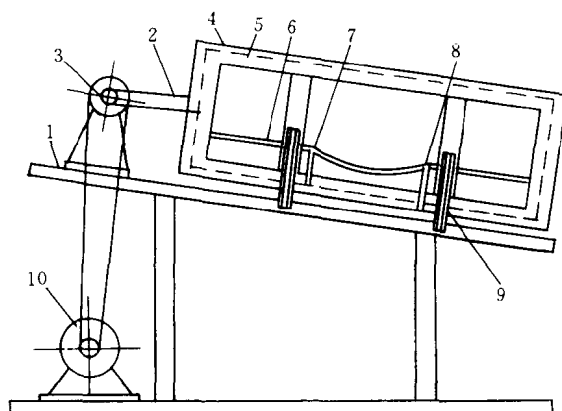


图 1-1-4 弛张筛示意图

1——支架;2——连杆;3——曲轴;4——外筛框;5——内筛框;6——弹性筛板;
7——内横梁;8——外横梁;9——支撑架;10——电机

6. 变幅筛

如图 1-1-5 所示,将两块筛面立置形成楔面立置空间,摆动的筛网与下落的物料频繁碰撞,强制物料分离。其突出优点是处理粘细物料时,筛孔不堵塞,且单位面积处理能力大。但其缺点也很突出,在筛分过程中产生较多的粉碎,因而限制了其使用范围。此外,该筛的机械强度(包括筛网寿命)不易过关^[2]。

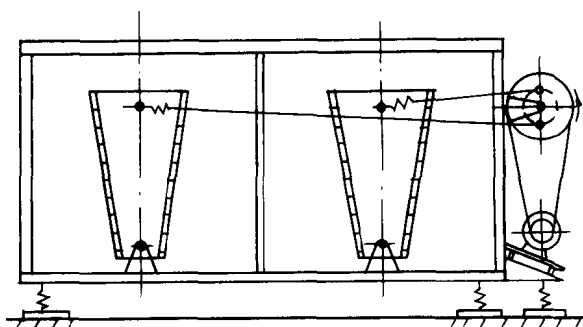


图 1-1-5 变幅筛示意图

7. 强力筛

如图 1-1-6 所示,筛箱在激振器作用下作水平方向直线往复运动,采用大振幅、低频率、大振动强度的工作制度,优缺点与变幅筛类似。

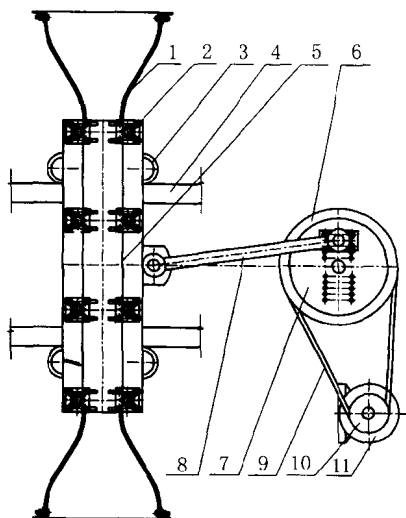


图 1-1-6 强力筛示意图

1——软体溜槽;2——调节筛距板;3——滚轮;4——导轨;5——筛网;6——大皮带轮;
7——曲柄;8——连杆;9——皮带;10——小皮带轮;11——电机

第二节 振动理论基础

所谓机械振动是指物体在平衡位置或平均位置附近来回往复的运动。利用振动可有效地完成许多工艺过程,也可用来提高某些机器的工作效率。振动机械在最近几十年得到了迅速发展,现代工程技术人员在进行动态设计时面临的一个重要问题就是振动分析,振动理论已成为现代诸多科学领域的基础。本节讨论单自由度线性系统的振动问题,着重介绍振动的基本概念和分析方法。

在阅读本节内容时,提请读者注意本节在解决振动问题时所采用的从简单到复杂、从特殊到一般这样一个整体思路。我们先从最简单的无阻尼自由振动出发,进而解决稍微复杂一点的有阻尼自由振动。从数学角度看,有阻尼和无阻尼的自由振动微分方程均属于二阶常系数线性齐次常微分方程。强迫振动问题的解决最终归属于解二阶常系数线性非齐次常微分方程,其要点是求出非齐次方程的一个特解,对于简单的正弦型激励情形,很容易求出特解。复杂激励情形下,可利用线性系统的叠加原理,将复杂激励看成是若干个简单激励的合成,求出每个简单激励单独引起的振动,然后叠加,就可获得振系对整个激励的响应。如对任意周期激励,可将其展开为傅立叶级数,使其分解为若干个正弦型激励;如果激励为任意的时间函数,则将其分解为无数个微冲量的叠加。简单问题的解决或为复杂问题的解决提供了有益启示,或提供了直接的可用结果,从而为复杂问题的解决铺平了道路。在工程上面临的问题一般都是复杂问题,而我们的任务就是将复杂问题分解为一个个简单问题,然后逐一解决,这是解决一切科学问题的基本方法之一。

一、自由振动

自由振动：弹性系统偏离于平衡状态以后，不再受外界扰动情形下发生的振动。

1. 无阻尼振系的自由振动

无阻尼振系的自由振动忽略了使运动衰减的耗散阻力作用，是一种理想化的振系，其运动形式为简谐振动。简谐振动的位移都可以表示成时间的正弦型函数，振动过程中频率和振幅保持不变。

典型的无阻尼振系的自由振动如图 1-2-1 所示。振动物体质量为 m ；弹簧质量不计，刚

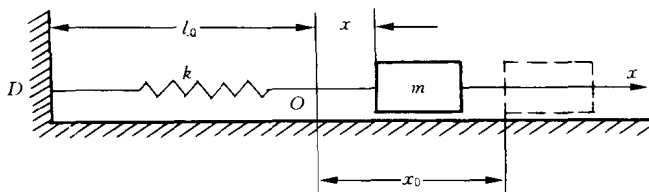


图 1-2-1 单自由度无阻尼自由振动系统

度系数为 k ，不受力时的长度为 l_0 。假定物体只沿光滑水平面进行直线运动，沿弹簧轴线取坐标轴 x ，以弹簧不受力时的右端位置为坐标原点 O ，物体在初始时刻 t_0 时的坐标为 x_0 。设物体在任一时刻 t 时的位置坐标为 x ，此时弹簧作用在物体上的力为 $-kx$ （负号表示弹簧力总是指向原点 O ，力图使物体回到平衡位置，这类力称做恢复力），由牛顿定律得

$$m\ddot{x} = -kx \quad (1-2-1)$$

令

$$p^2 = \frac{k}{m} \quad (1-2-2)$$

则 p 称做振系的固有频率，其物理意义稍后阐明。将式(1-2-2)代入式(1-2-1)，则有

$$\ddot{x} + p^2x = 0 \quad (1-2-3)$$

方程(1-2-3)为二阶常系数线性齐次常微分方程。此方程的通解为

$$x = B\sin pt + D\cos pt \quad (1-2-4)$$

这里 B 和 D 为任意常数，可由振系的初始条件确定，若初始条件为 $x(0) = x_0$ ， $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ ，可得

$$B = \frac{\dot{x}_0}{p}, D = x_0 \quad (1-2-5)$$

由式(1-2-4)和(1-2-5)可将振动方程的通解改写为

$$x = A\sin(pt + \varphi) \text{ 其中 } A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2}, \varphi = \arctan \frac{p x_0}{\dot{x}_0} \quad (1-2-6)$$

由式(1-2-6)可以看出， pt 每增大 2π 或 t 每增大 $2\pi/p$ ，振动物体的位移 x 值也重复一次，振动重复一次所需的时间 τ 称做振动周期，在 1 s 时间内振动重复的次数称为振动频率，记作 f ，显然

$$\tau = \frac{2\pi}{p}, \quad f = \frac{1}{\tau} = \frac{p}{2\pi} \quad (1-2-7)$$

对比圆周运动可以看出，固有频率 p 相当于角速度，因此也称 p 为振动圆频率或角频

率,常简称为振动频率,此时虽然叫法与 f 相同,但二者的物理意义还是有区别的。无阻尼自由振动的振幅和初相位由初始条件和固有频率决定,而固有频率 p 仅与系统的弹簧刚度系数 k 和振动物体的质量 m 有关,与初始条件无关,属于振系的固有特征,此即 p 之所谓固有的含义。固有频率可通过调节系统的弹簧刚度和振动物体的质量来改变,由式(1-2-2)可以看出,振动物体的质量越大或弹簧刚度越小,则固有频率越低;反之则固有频率越高。这一结论对复杂振系同样适用。

不难验证,无阻尼振系自由振动过程中,系统的动能 $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ 和弹簧的势能 $\frac{1}{2}kx^2$ 相互转化,其和保持常值。此外,单摆、复摆、扭摆自由端以及附有重物的均匀悬臂梁等的振动运动方程在一定条件下都可化成式(1-2-3)的标准形式,即这些振系的运动都属于无阻尼振系的自由振动。

2. 有阻尼振系的自由振动

实际的自由振动由于阻尼而存在能量耗散,因为没有外界能量的补充,振系不可能像简谐振动那样无限期地重复进行,而是振幅随时间逐渐减小,直至完全消失。有阻尼振系的自由振动为衰减振动,即在振动过程中,系统在初始时刻获得的能量将为克服阻尼力而不断转化为热能等其他能量。

当物体所受到的阻力与相对运动速度成正比,这种阻尼称做粘性阻尼。物体在流体中运动时,斯托克斯(Stokes)在雷诺(Reynolds)数 $\ll 1$ 的条件下(即在粘性阻力区内)对粘性流体的运动方程进行了简化,获得了解析解。按照 Stokes 流体曳力计算公式,物体受到的阻力与相对速度成正比,这也许正是我们把阻力与相对速度成正比的阻尼称为粘性阻尼的原因。当物体沿润滑表面滑动时,即受到粘性阻尼的作用。当然,若物体在流体中低速运动时,受到的自然是粘性阻尼的作用。我们只限于讨论粘性阻尼,粘性阻尼的假定可使运动方程的解析解较容易地获得,其他各种阻尼也可简化为对应的粘性阻尼进行近似计算。

图 1-2-2 为有粘性阻尼的振系,粘性阻尼力可表示为

$$F_d = -c\dot{x} \quad (1-2-8)$$

式中, c 为阻尼系数,负号表示阻尼力总与速度方向相反,即阻尼力使振动衰减。粘性阻尼振系的自由振动微分方程为

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$$

或

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (1-2-9)$$

方程(1-2-9)仍为二阶常系数线性齐次常微分方程,其特征方程为

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

特征根为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (1-2-10)$$

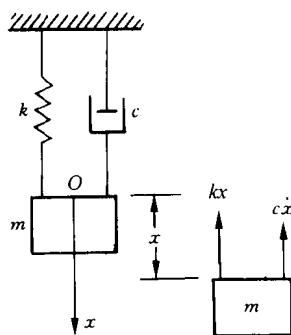


图 1-2-2 有粘性阻尼的单自由度自由振动系统

$$\text{令} \quad c_c = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2m p \quad (1-2-11)$$

由式(1-2-10)知,随着 c 大于、等于或小于 c_c , $\lambda_{1,2}$ 将为不等的负实根、相等的负实根或不等的复根。称 c_c 为临界阻尼。

$$\text{令} \quad \zeta = \frac{c}{c_c} \quad (1-2-12)$$

ζ 为无量纲量,称为阻尼比,可以表征振系中阻尼的大小。 $\zeta > 1$ 为大阻尼, $\zeta = 1$ 为临界阻尼, $\zeta < 1$ 为小阻尼。将式(1-2-11)和式(1-2-12)代入式(1-2-11)可得

$$\ddot{x} + 2\zeta p \dot{x} + p^2 x = 0 \quad (1-2-13)$$

$$\lambda_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})p \quad (1-2-14)$$

按照 ζ 的大小,对应式(1-2-13)和式(1-2-14),微分方程的特征根和方程的解有 3 种不同的形式

(1) 大阻尼: $\zeta > 1$

$$\lambda_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})p, x = Be^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})pt} + De^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})pt} \quad (1-2-15)$$

(2) 临界阻尼: $\zeta = 1$

$$\lambda_{1,2} = -p, x = (B + Dt)e^{-pt} \quad (1-2-16)$$

(3) 小阻尼: $\zeta < 1$

$$\lambda_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})p = -\zeta p \pm j\sqrt{1 - \zeta^2}p = -\zeta p \pm jq$$

$$x = e^{-\zeta pt}(Be^{jq t} + De^{-jq t}) \text{ 或 } x = Ae^{-\zeta pt}\sin(qt + \varphi) \quad (1-2-17)$$

式中, $q = \sqrt{1 - \zeta^2}p$ 。在大阻尼和临界阻尼的情形下,物体与平衡位置的距离在达到极值之后,随时间指数减小,越过平衡位置最多只有一次,振系的自由运动不是振动。图 1-2-3 展示了大阻尼自由运动的 3 种可能情况。

只有在小阻尼情形下,振系发生衰减的自由振动,由式(1-2-17),给定初始条件,可得

$$x_0 = A \sin \varphi, \frac{\dot{x}_0 + \zeta p x_0}{q} = A \cos \varphi$$

即

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta p x_0}{q}\right)^2}, \varphi = \arctan\left(\frac{q x_0}{\dot{x}_0 + \zeta p x_0}\right) \quad (1-2-18)$$

由式(1-2-18),式(1-2-17)中的运动方程可改写为

$$x = e^{-\zeta pt} \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta p x_0}{q} \sin qt + x_0 \cos qt \right) \quad (1-2-19)$$

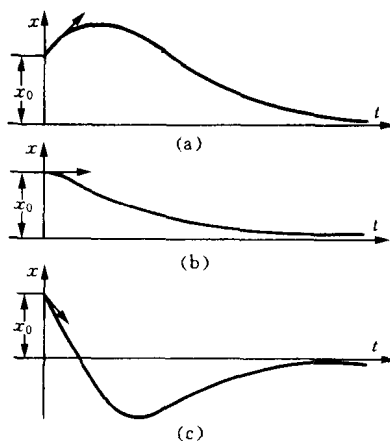


图 1-2-3 大阻尼自由运动的 3 种可能情况

当 $\zeta = 0$ 时,衰减振动退化为无阻尼的自由振动。衰减振动曲线如图 1-2-4 所示。

对应于无阻尼振系,习惯上将 $\sin(qt + \varphi)$ 周期和频率称做衰减振动的周期和频率,相应的称 q 为衰减振动的固有频率。衰减运动的周期和频率为

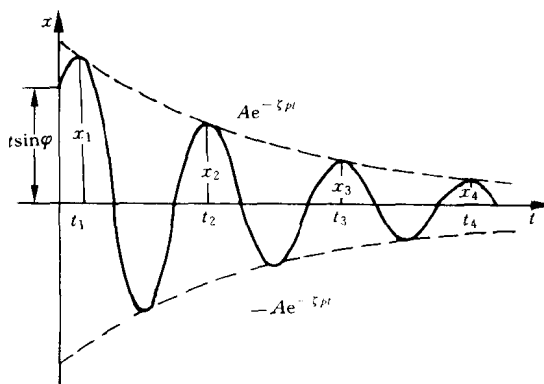


图 1-2-4 衰减自由振动曲线

$$\tau = \frac{2\pi}{q} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}p}, f = \frac{1}{\tau} = \frac{q}{2\pi} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}p}{2\pi} \quad (1-2-20)$$

式(1-2-20)表明,阻尼使衰减振动的周期加长,频率降低。但在微小阻尼情形下,即 $\zeta \ll 1$ 时,阻尼对于周期和频率的影响可忽略不计。此时 $q \approx p$,这可使计算大大简化。

二、强迫振动

弹性系统在受到外界控制的激励作用下发生的振动称做强迫振动。激励也称做系统输入,振动物体的位移则称做响应或系统输出。我们主要讨论最简单也是最重要的正弦型激励的情形,同时对任意周期和任意激励力的振系响应也予以简单介绍。对于任意的周期激励,可以通过谐波分析使其分解为若干个正弦型激励,然后利用线性系统的叠加原理,只要分别求出每个正弦型激励单独引起的振动,然后叠加。如果激励为任意的时间函数或是只持续极短时间的冲击作用时,只要把振系对冲量的响应解决,则任意激励对振系的作用可看做无数个微冲量作用的叠加。

1. 正弦型激励

设扰力为 $F(t) = F_0 \sin \omega t$, F_0 为扰力幅, ω 为激励频率(简称扰频)。在有阻尼情形下,振系在正弦型激励作用下的微分运动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (1-2-21)$$

上式可化为

$$\ddot{x} + 2\zeta p\dot{x} + p^2x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t \quad (1-2-22)$$

式中各符号的意义如前述。方程(1-2-21)或方程(1-2-22)为二阶常系数线性非齐次常微分方程,其相应的齐次方程的解在讨论自由振动时已经给出,我们剩下的任务只要求出一个特解,根据激励力的特征,设这个特解为

$$x_1 = X \sin(\omega t - \phi) \quad (1-2-23)$$

将其代入方程(1-2-21),有

$$(k - m\omega^2)X \sin(\omega t - \phi) + c\omega X \cos(\omega t - \phi) = F_0 \sin \omega t \quad (1-2-24)$$

方程(1-2-24)在任意 t 时刻均成立,特别当 $\omega t = \phi$ 和 $\omega t = \pi/2 + \phi$ 时,有

$$c\omega X = F_0 \sin \phi$$

$$(k - m\omega^2)X = F_0 \cos\psi \quad (1-2-25)$$

从而得

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (1-2-26)$$

$$\tan\psi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

需要特别指出的是 X 和 ψ 都与运动的初始条件无关。将求得的特解与前面求得的自由运动解结合, 即得方程(1-2-21)的通解, 当 $\zeta < 1$ 时, 通解为

$$x = A^{-\zeta\omega t} \sin(qt + \varphi) + \frac{F_0 \sin(\omega t - \psi)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (1-2-27)$$

方程右端的第一项是齐次解, 代表衰减的自由振动; 第二项是特解, 代表与激励同频率的简谐振动, 为振系在正弦型激励作用下的强迫振动。由于自由振动在运动开始后不久就迅速消失, 通常不予考虑, 而强迫振动却不因阻尼而衰减, 对于给定的振系, X 和 ψ 只与激励有关, 分别称做强迫振动的振幅和初相角。只要 F_0 和 ω 不变, x_1 就是稳态振动。因此, 将 x_1 称做稳态解或稳态响应。在经历一段时间之后, 自由振动消失, 稳态响应就代表了物体的全部运动, 我们仍以 x 表示。

$$\text{令} \quad X_0 = \frac{F_0}{k}, \gamma = \frac{\omega}{p}, \beta = \frac{X}{X_0} \quad (1-2-28)$$

则 X_0 为常力 F_0 作用下的静挠度, 称做零频率挠度; γ 为频率比, 亦称做放大率; β 为强迫振动振幅与零频率挠度之比。如果将 β, ψ 以 ζ, γ 表示, 则有

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2}} \quad (1-2-29)$$

$$\tan\psi = \frac{2\zeta\gamma}{1 - \gamma^2}$$

β, ψ 随 ζ, γ 的变化分别示于图 1-2-5 和图 1-2-6。

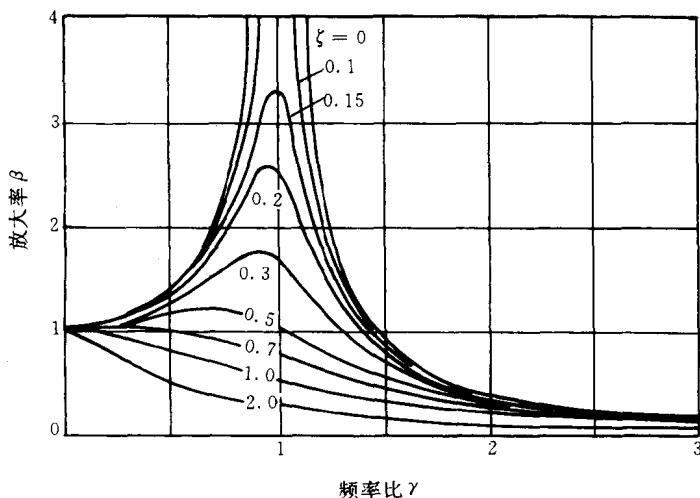


图 1 2 5 放大率 β 随 ζ 和 γ 的变化