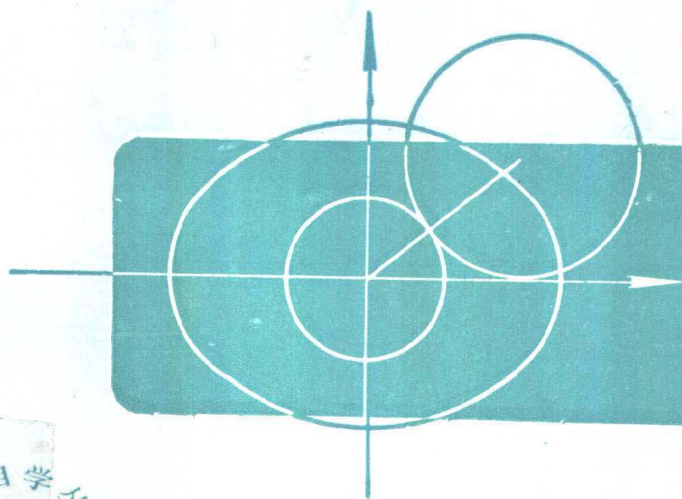


平面解析几何双基训练

第二版

主 编 翟 连 林



中国农业机械出版社

0182

1734

数 学 自 学 丛 书

平面解析几何双基训练

第 二 版

主编 翟连林

编者 何履端 袁梅芬

余新耀 林增铭

徐 松

中国农业机械出版社

内 容 简 介

本书是《数学自学丛书》之一，第一版出版后受到广大读者的欢迎，这是第二版，作者在第一版的基础上经过认真修改，充实了基础知识的内容，增加了新颖的训练题，突出了能力的培养，本书主要包括：直角坐标系，曲线与方程，直线，圆，椭圆，双曲线，抛物线，圆锥曲线的切线与法线，坐标变换，参数方程，极坐标，解析法的应用等，本书比较全面、系统地归纳和总结了平面解析几何的基础知识，并通过典型例题的分析、解答和评注，总结了常用的解題方法，指出了易犯的错误。

本书可供青年职工、自学青年补课和复习使用，亦可供普通中学、职工业余中学、职业高中学生和数学教师参考。

平面解析几何双基训练

第 二 版

主 编 翟连林

编 者 何履端 袁梅芬

余新耀 林增铭

徐 松

★

中国农业机械出版社出版

北京市海淀区阜成路东钓鱼台乙七号

北京市密云县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

新华书店经售

★

787×1092¹/₃₂ 开 21 印张 462 千字

1982 年 12 月北京第一版

1985 年 12 月北京第二版 1985 年 12 月北京第二次印刷

印数：96,001—106,100 定价：3.70 元

统一书号：7216·41

序

为适应我国四化建设的新形势，从根本上提高广大职工的科学文化水平，已成为当务之急。从我国广大职工的实际出发，科学水平的提高尤感迫切。中共中央、国务院《关于加强职工教育工作的决定》，正是针对着这一迫切需要而作出的。但是这样的认识在许多实际工作中往往得不到贯彻，总认为抓教育、提高科学文化水平只是久缓的计议，不是当务之急，这样当然就谈不上有什么迫切感了。其实这种看法既不符合中央的方针，又和广大群众的需要相违背。中国农业机械出版社编辑出版的《数学自学丛书》(第一版)问世以来，受到极为广泛的读者热烈欢迎，很重要的一个因素，就是因为它适应了当前的迫切需要。

数学已日益成为一切近代科学技术的重要基础。当前已不只是理、工、农、医的各专业愈来愈需要数学，就象心理学、经济学、语言学等专业的发展也都离不开数学，而且还需要很高深的近代数学。要提高我国广大职工的科学水平，如果数学不首先提高，就将成为拦路虎。所以这套丛书的出版具有深远的意义。

这套丛书在编写方面有许多特点，归结起来有以下三个方面。

一、取材允当，适用面广泛

事实上，该丛书是根据中学和大学专科数学的内容，由浅入深地编排，概括了全部中学和大学专科数学的内容，它

IV

不仅适合于广大职工自学的需要，也适合于在校的中学生和大专学生自修参考之用，以及中学数学老师进修提高之用。

二、重视双基，突出能力的培养

这套丛书的每一册都按基础知识提要、典型例题、习题三部分组成，而且内容精练，例题典范，习题多样，在内容的叙述中又注意揭露实质与规律，在典型例题的讲解中又能注意启发思路，在习题的设置上注意基本训练题与综合训练题的配合，从而既能使读者巩固地掌握基础知识，熟悉基本技能，又能使读者得到能力的培养，科学地处理了知识传授和能力培养这两个重要环节。

三、重视启发诱导，利于自学

该丛书针对自学青年缺乏辅导的情况，力求叙述简明，讲清思路的来龙去脉，揭示解题规律，纠正易犯的错误，循循善诱，利于自学。还通过提示方式，启发读者自行解题。既为读者提供自学的方便，又能启发读者独立思考。

以上是概括这套丛书的特点，当然不是说每一本书都一样，更不是说每一本书都是完美无缺。而且随着形势的发展，今后还必须继续更新，使这套丛书在我国四化建设中继续发挥它的根本性的作用。

程民德

1984年12月20日

注：程民德教授是中国科学院学部委员，中国数学学会副理事长，北京大学数学研究所所长。

前 言

为了帮助广大职工和自学青年学好中学数学和大学专科数学基础知识，加强基本技能的训练（基础知识和基本技能简称“双基”），我们参照现行普通中学、职工业余中学和电视大学、职工大学的数学教材，结合自学特点，编写了这套《数学自学丛书》。

这套丛书包括：

一、初中部分

1. 《初中代数双基训练》；
2. 《平面几何双基训练》；
3. 《初中数学总结辅导》。

二、高中部分

1. 《高中代数双基训练》；
2. 《立体几何双基训练》；
3. 《平面三角双基训练》；
4. 《平面解析几何双基训练》；
5. 《高中数学总结辅导》。

三、大学专科部分

1. 《一元微积分双基训练》；
2. 《多元微积分双基训练》；
3. 《线性代数双基训练》；
4. 《概率统计双基训练》；
5. 《复变函数双基训练》；
6. 《逻辑代数与BASIC语言双基训练》。

Ⅵ

为便于自学，在这套丛书的各册中，首先帮助读者系统地归纳和总结数学基础知识，然后通过对典型例题的分析、解答和评注，帮助读者总结常用的解题方法和技巧，分析并纠正常易犯的错误；最后通过各种类型的基本训练题、综合训练题以及自我测验题（包括解答或提示）的演算，帮助读者巩固概念，熟悉定理、公式和法则，提高正确迅速的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力。

在本书编写过程中，董金秋、季江平等同志给予了大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

由于我们的水平有限，书中的缺点、错误在所难免，欢迎广大读者批评指正。

编者

1985 年 4 月

目 录

序

前言

第一章 直角坐标系	1
一、基础知识提要	1
1. 有向直线	1
2. 有向线段	1
3. 数轴上点的坐标	2
4. 数轴上的有向线段的数量	2
5. 平面直角坐标系	3
6. 两点间的距离	3
7. 线段的定比分点	4
8. 直线的倾斜角和斜率	6
9. 三角形的面积	8
10. 充要条件	10
二、基本训练举例	12
三、基本训练题	23
四、基本训练题解答或提示	26
五、自我检查题及解答	31
第二章 曲线与方程	40
一、基础知识提要	40
1. 曲线与方程的关系	40
2. 由曲线方程描出它的曲线	41
3. 根据动点运动的条件求轨迹方程	42
4. 两条曲线的交点	44
二、基本训练举例	44
三、基本训练题	51

四、基本训练题解答或提示	55
五、自我检查题及解答	70
第三章 直线	76
一、基础知识提要	76
1. 一次函数的图象与直线方程	76
2. 直线方程的各种形式	76
3. 两条直线的位置关系	78
4. 两条直线的夹角	78
5. 点到直线的距离	79
6. 几种常见的直线系方程	80
7. 三条互不平行的直线共点的条件	81
二、基本训练举例	81
三、基本训练题	96
四、基本训练题解答或提示	101
五、自我检查题及解答	113
第四章 圆	121
一、基础知识提要	121
1. 圆的定义	121
2. 圆的方程	121
3. 确定一个圆的条件	123
4. 圆和直线的位置关系	123
5. 两圆的位置关系	124
6. 圆系	124
二、基本训练举例	126
三、基本训练题	140
四、基本训练题解答或提示	144
五、自我检查题及解答	152
第五章 椭圆	160
一、基础知识提要	160

1. 椭圆的定义	160
2. 椭圆的标准方程	160
3. 椭圆的性质	161
4. 注意事项	161
二、基本训练举例	163
三、基本训练题	172
四、基本训练题解答或提示	175
五、自我检查题及解答	186
第六章 双曲线	192
一、基础知识提要	192
1. 双曲线的定义	192
2. 双曲线的标准方程	192
3. 双曲线的性质	193
4. 注意事项	193
二、基本训练举例	195
三、基本训练题	203
四、基本训练题解答或提示	205
五、自我检查题及解答	214
第七章 抛物线	221
一、基础知识提要	221
1. 抛物线的定义	221
2. 抛物线的标准方程	221
3. 抛物线的性质	223
4. 注意事项	223
二、基本训练举例	223
三、基本训练题	234
四、基本训练题解答或提示	236
五、自我检查题及解答	253

第八章 圆锥曲线的切线和法线	260
一、基础知识提要	260
1. 圆锥曲线	260
2. 圆锥曲线的切线和法线	262
二、基本训练举例	265
三、基本训练题	292
四、基本训练题解答或提示	294
五、自我检查题及解答	317
第九章 坐标变换	326
一、基础知识提要	326
1. 坐标变换	326
2. 坐标轴的平移	326
3. 利用坐标轴的平移化简缺 xy 项的二元二次方程	327
4. 坐标轴的旋转	327
5. 利用坐标轴的旋转化简二元二次方程	329
6. 一般二元二次方程的讨论	329
7. 圆锥曲线系	332
二、基本训练举例	332
三、基本训练题	353
四、基本训练题解答或提示	358
五、自我检查题及解答	371
第十章 参数方程	377
一、基础知识提要	377
1. 曲线的参数方程	377
2. 化参数方程为普通方程	377
3. 化普通方程为参数方程	377
4. 参数方程与普通方程互化的等价性	378
5. 直线的参数方程	378
6. 常用曲线的参数方程	380

7. 圆的渐开线的参数方程	381
8. 摆线的参数方程	381
二、基本训练举例	382
三、基本训练题	410
四、基本训练题解答或提示	414
五、自我检查题及解答	431
第十一章 极坐标	441
一、基础知识提要	441
1. 极坐标系	441
2. 极坐标与直角坐标的互化	442
3. 曲线的极坐标方程	443
4. 画极坐标方程的图形	448
二、基本训练举例	449
三、基本训练题	477
四、基本训练题解答或提示	484
五、自我检查题及解答	495
第十二章 解题方法总结	503
一、方法与例题	503
1. 直接法(也叫做普通法)	503
2. 转移法(也叫做代入法)	511
3. 公式法(也叫做待定系数法)	516
4. 参数法	522
5. 描点法(也叫做代数法)	529
6. 变换法	530
7. 特例确定法	534
8. 关键三角形法	535
9. 复数法	537
二、基本训练题	539
三、基本训练题解答或提示	551

四、自我检查题及解答	622
第十三章 解析法的应用	629
一、解析法在平面几何学中的应用	629
二、解析法在代数中的应用	647
1. 确定方程或方程组的解	647
2. 证明不等式	648
3. 解某些复数问题	650
4. 求满足约束条件的极值	652
三、解析法在三角学中的应用	657
1. 证明三角恒等式	657
2. 求三角函数的周期	658

第一章 直角坐标系

一、基础知识提要

点是组成平面几何图形的“细胞”.按欧氏几何学的传统说法,点无大小可言,点的特征性仅表现在点的位置上.因此,如何用代数的方法来确定平面内点的位置,就成为解析几何首要解决的问题.

用代数的方法确定平面内点的位置,有很多种方法,其中最基本的最常用的一种,就是直角坐标法.为了介绍这种方法,必须从有向线段和直角坐标系讲起.



图 1-1

1. 有向直线

规定了方向的直线,叫做有向直线.如图 1-1 的直线 l .如果把箭头所指的方向作为正向,那么,和它相反的方向就是负向.

规定了原点和长度单位的有向直线,叫做数轴.

2. 有向线段

规定了起点和终点的线段,叫做有向线段.从起点到终点的方向,就是有向线段的方向.在表示有向线段时,我们规定把表示起点的字母写在前面,表示终点的字母写在后面.如有向线段 AB , A 是起点, B 是终点;有向线段 BA , 则 B 是起点, A 是终点.在解析几何中,除了特别声明外,所讨论的线段都是有向线段.

要决定一条有向线段的方向是正还是负,需要看这条线

段的方向和它所在直线的方向是不是一致。如果一致，那么它就是正方向的线段；如果相反，那么它就是负方向的线段。

数轴上的有向线段，当它的方向和数轴的方向相同时为正，相反时为负。

有向线段的长度，连同表示它的方向的正负号，叫做有向线段的数量。如果不考虑有向线段的方向，仅指有向线段的长度，则叫做有向线段的绝对值。有向线段 AB 的长度记为 $|AB|$ 。

3. 数轴上点的坐标

在代数里，我们学习过，数轴上的点和实数有着一一对应的关系。和数轴上一点相对应的实数，叫做这点的坐标。

4. 数轴上的有向线段的数量

如果 P 点的坐标是 x ，那么，以原点为起点， P 点为终点的有向线段的数量就是 x ，即 $OP = x$ 。如图 1-2， A 点的坐标是 -3 ，就有 $OA = -3$ 。 B 点的坐标是 3 ，就有 $OB = 3$ 。

数轴上有向线段 AB 的数量，等于它的终点坐标减去起点坐标。证明如下：

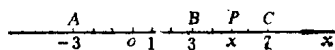


图 1-2

在数轴上任意两点 A 、 B 的位置关系，共有六种不同的情况如图 1-3。

在图 1-3 的 (1) 中， $AB = |AB|$ ， $OA = |OA|$ ， $OB = |OB|$ ，而 $|AB| = |OB| - |OA|$ ，

$$\therefore AB = OB - OA.$$

在图 1-3 的 (2) 中， $AB = |AB|$ ， $OA = -|OA|$ ， $OB = |OB|$ ，而 $|AB| = |OA| + |OB|$ ，

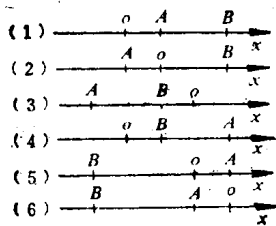


图 1-3

$$\therefore AB = -oA + oB,$$

就是

$$AB = oB - oA.$$

用同样的方法,可以证明在其他四种情况中, $AB = oB - oA$ 也成立. 因此, 在数轴上的任意两点 A 、 B , 不论它们的位置怎样, 总是

$$AB = oB - oA.$$

如果 A 、 B 两点的坐标分别是 x_1 和 x_2 , 那么 $oA = x_1$, $oB = x_2$, 因此, 有向线段 AB 的数量是: $AB = x_2 - x_1$.

根据这个公式可以得到, 数轴上两点 A 、 B 的距离公式

$$|AB| = |x_2 - x_1|.$$

5. 平面直角坐标系

平面内, 有公共原点并且互相垂直的两条数轴, 构成平面直角坐标系. 建立了直角坐标系的平面, 叫做坐标平面. 对于坐标平面内的任意一个点的位置, 都可以用唯一的一对有序实数来表示它. 设 P 是坐标平面内任意一点 (图 1-4), 从 P 点分别作 x 轴和 y 轴的垂线, 得垂足 M 和 N , 设 M 点在 x 轴上的坐标是 x , N 点在 y 轴上的坐标是 y , 那么 (x, y) 就是 P 点在直角坐标系中的坐标. 这样, 对于坐标平面内任意一点 P , 我们可以得出唯一的一对有序实数 (x, y) 和 P 对应. 反过来, 对于任意一对有序实数 (x, y) , 都能确定坐标平面内唯一的一个点 P . 这样, 坐标平面内的一个点和一对有序实数之间, 就建立了一一对应关系. 因此, 平面内关于点的几何问题, 就可以转化成关于这些点的坐标的数的问题来进行研究. 平面解析几何就是从这一基本观念出发, 用代数方法来研究平面几何问题的一门数学学科.

6. 两点间的距离

如图 1-5, 已知平面内任意两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$,

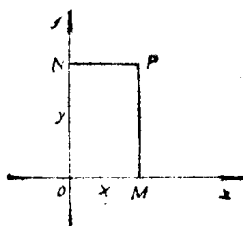


图 1-4

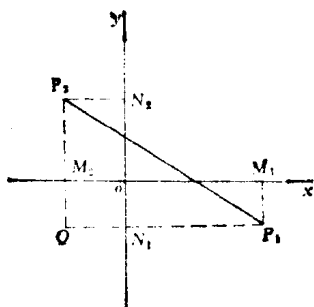


图 1-5

它们之间的距离为 $|P_1P_2|$ ，由勾股定理可推得

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= |P_1Q|^2 + |QP_2|^2 \\ &= |M_1M_2|^2 + |N_1N_2|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \end{aligned}$$

所以，两点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 的距离公式是：

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

如果点的位置特殊时，两点间的距离公式可简化为：

(1) 当 P_1P_2 平行于 x 轴，即当 $y_1 = y_2$ 时，

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

(2) 当 P_1P_2 平行于 y 轴，即当 $x_1 = x_2$ 时，

$$|P_1P_2| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|.$$

(3) 任一点 $P(x, y)$ 到原点 $(0, 0)$ 的距离公式是

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

7. 线段的定比分点

如果 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 是有向线段 AB 的端点，点 P 把有向线段 AB 分成 AP 和 PB 两部分，那么有向线段 AP 和 PB 的数量的比，就是 P 点分 AB 所成的比，通常表示为