高等学校教材

弹性力学教程

(水土类)

俞嘉声　主编

俞嘉声　吴坤生　乐翠英　编

TANXING LIXUE JIAOCHENG

高等教育出版社

弹性力学教程

（水土类）

俞嘉声 主编

俞嘉声　吴坤生　乐翠英 编

高等教育出版社

内容提要

本书内容是根据高等工业学校"弹性力学课程教学基本要求"而编排的。第一章基本方程和第二、三章的平面问题和空间问题的若干典型解答，是全书的基本理论，本书强调物理概念，通过基本假设阐述从力学模型转化到数学模型的全过程，所举例题尽量与实际问题相结合，使学生对弹性体的受力状态有较深刻的理解。第四章薄板弯曲是应用弹性力学的内容，薄板在土木工程中是最常用的一种结构形式。而第五、六章的变分法和有限元法简介，除阐述基本概念外，着重用具体例题介绍近似解的求解方法。由于变分法是近似解的理论基础，故对其内容阐述得比较详细。

本书是高等工业学校水土类专业弹性力学课程教材，但考虑广大工程技术人员自学和应用的需要，包括的内容比"基本要求"稍多些，在目录中标上"*"号的，表示可以不列入教学内容。对于没有把有限元法列入选修的后续课程，则不宜删去第六章的内容。

责任编辑　黄毅

弹性力学教程

（水土类）

俞嘉声　主编

俞嘉声　吴坤生　乐翠英　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京科技发行所发行

北京印刷三厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 11　字数 260 000

1991年4月第1版　1991年4月第1次印刷

印数 0001—2 310

ISBN 7-04-002695-3/TB·184

定价 4.00 元

前 言

本书前身是浙江大学土木系本科生用的讲义，始于1981年。经过多次使用和修改，这次整理成书时又广泛吸取了同行专家的意见，特别是体现了高等工业学校“弹性力学课程教学基本要求”中所提的要求。本书主要作为水土类专业弹性力学课程教材，也可供广大工程技术人员参考。本书具有以下特色：

第一，本书采用从一般到特殊的叙述方法，从总体上系统完整地介绍变形体力学的基本概念、基本理论和典型的求解方法。在数学上引入矩阵表示法，并用其特性证明主应力和主应变的若干性质。在变分法中采用矩阵表示，可直接和有限元法相联系，对于学过结构力学中的位移矩阵法的读者是很容易理解的。

第二，解析解与近似解并重。把解析解作为主要内容是因为解析解物理概念清楚，数学论证严密，读者可以从中学到不少解决问题的方法。首先通过简化假设的阐述，使学生学会如何抓住实际问题中的主要矛盾，忽略次要矛盾，建立力学模型，然后应用数学知识建立数学物理方程。在解题时还有技巧问题，如求矩形平板中小圆孔附近的应力集中的问题，应用Saint Venant局部影响原理，选取极坐标来求解就十分简明。至于如何运用和掌握这些方法和技巧，则要依靠知识的积累，但强调这些基本方法和解题的思路很有用处。不过在实际问题中，由于结构物的复杂性，大量的结构计算主要依靠数值法才能求出结果，因此，近似解法应该占有相当的比重。变分法是近似解法的理论基础，因此本书从泛函的概念出发，系统地介绍最小势能(余能)原理以及广义变分原理，使

读者对变分法有个全面的了解。在近似解中，除经典的能量原理的一般数值解外，还增加了Kantorovich (Канторович)近似解和加权残值法。另外，把有限元法列在最后一章作扼要介绍，目的是使读者对有限元有个基本概念，并掌握一些简单问题的计算方法。

此外，鉴于目前国内外有关力学文献已广泛采用张量表示法，本书在附录III中，对张量符号的基本概念作大略介绍，供有兴趣的读者参考。

第三、理论与实际相结合。工科学生最关心的是弹性力学能否解决实际问题，所以本教材所举例题尽量与工程实际相结合。例如在介绍广义应力与应变关系的正交各向异性体时，就和当今大型空心楼板和空间网架相联系，而横观各向同性则和地基土质的分布特性相联系。在分析应力集中问题时，就和处理结构物的裂缝问题联系起来。在用Fourier级数解题时，就用它来求解连续墙梁的计算问题。在介绍半无限平面问题和Boussinesq问题时，就和地基规范中的条形基础、板式基础以及柱基础的沉降公式联系起来。在讲述薄板弯曲理论之后，就用它来解释结构计算手册的有关计算公式和计算图表。这些都是读者感兴趣的问题。

本书的出版得到北京大学胡海昌教授、重庆大学杨绪灿教授、太原工业大学杨桂通教授、同济大学翁智远教授、华中理工大学赵诒枢教授、华南理工大学谭文宪教授、浙江大学刘鸿文教授、夏志斌教授以及清华大学徐秉业教授的大力支持和指导，并提出许多很好的建议，特别要提到的是同济大学吴家龙教授对全书进行了逐句逐字的审阅和修改，在此表示深切的感谢！本书在历次修改过程中，还得到许多同学如蒋一良、詹佩耀、王清和楼文娟等的建议，并对例题的计算做了不少校核工作，使得这本教材的内容和讲法更符合读者的思路。

由于作者水平有限，本书可能还存在可商榷的地方，恳请同行专家和读者提出宝贵意见。

编　者

一九八九年元月于杭州

目　　录

绪　论

一、弹性力学的任务、研究方法及主要内容

弹性力学的基本任务是研究弹性体在外界因素（包括外力和温度改变等）作用下，其内部各个质点所产生的应力、应变和位移的变化规律. 其基本目的与材料力学、结构力学一样，是分析解决实际工程结构中的强度与刚度问题. 然而这三门学科在研究对象和方法上有所不同。

从研究对象看，材料力学基本上只研究杆状构件，也就是长度(l)远大于高度(h)和宽度(b)的构件(即 h, $b \ll l$)在拉压、剪切、弯曲、扭转作用下所产生的应力、应变和位移的变化规律。结构力学是在材料力学的基础上，研究由杆状构件组成的杆系结构，例如桁架、刚架等。而弹性力学虽然也研究杆状构件，但主要是研究块体结构(包括板、壳以及挡土墙、堤坝、地基等)。

从研究方法看，都是从静力学、几何学和物理学三方面来考虑，即运动(或平衡)规律、变形连续规律和应力应变关系，它们有时被称为弹性力学三大基本规律。事实上，从材料力学到弹性力学是由粗到细、由简单到复杂、由直观到抽象思维的过程。前者在力学模型上作了一些近似假设，使其简化为一维问题。后者取微元体建立满足平衡条件和变形连续条件的微分方程，按空间问题加以分析。以梁的弯曲为例，这本是个两维问题。材料力学作了平截面假设，把内力归结为沿轴线变化的一维问题。弹性力学研究这一问题就无须作这一假设，而是以物体内部任意点的微元体，从变形后的几何关系出发，根据物体的连续条件，建立各微元体

间的变形协调关系，反映了弹性体变形的普遍规律。因而应用的范围扩大了，所得的结果也更符合于实际情况。

由于弹性力学在研究中采用了较严谨的数学分析方法，从而提高了解题的严密性、结果的精确性以及应用的广泛性。例如对于非圆截面杆的扭转、孔边应力集中、以及深梁应力分析等问题，用材料力学的初等理论无法求解，但在弹性力学中是可以求解的。上面提到梁的弯曲，材料力学作了平截面假设，虽然使求解的方法大大简化了，这对实用有很大价值，但对于它的精确性以及不同的高跨比所引起的误差，只有用弹性力学的方法才能作出评价。

弹性力学又是一门基础理论学科，它不仅在航空、机械、土木等工程中，作为计算、分析和设计的重要依据，而且在地震学中也得到广泛应用。近年来，人们还把弹性力学扩大到生物力学等边缘学科的研究中去，它已成为许多有影响的理论物理教科书的重要章节。

本教材的主要内容可分为三部分：

第一，数学弹性力学。主要阐述基本概念、基本理论和基本方法。实质上就是把物体在外力作用下的力学模型，转化为数学模型，即弹性力学基本方程的边值问题，从而采用数学分析方法，求问题的解析解。

第二，应用弹性力学。主要包括薄板、薄壳以及地基梁板等。因为板壳是三维问题，在数学上精确求解十分困难，所以采用了与平截面假设相类似的直法线假设，把它转化为二维问题。但分析的基础仍然是弹性力学的基本方程，故人们称之为应用弹性力学。本书由于篇幅限制，主要介绍薄板弯曲和稳定。

第三，弹性力学除少数特殊问题能求得解析解外，极大多数问题只能求得近似解。因此近似解对工科专业的学生，尤为重要。变分法是求近似解的重要途径，它又是有限元法的基础。本教材将从

泛函的基本概念出发，比较系统和全面地介绍变分法的基本理论，并列举一些典型例题，以加深理解。最后，对有限元法作简要的介绍。

二、基本假设

研究弹性体的力学状态时，如果对材料的复杂性质不作适当简化，势必给数学处理带来困难。为此，人们在建立弹性力学模型时，要抓住主要矛盾，排除次要因素，按照所研究的材料性质，以及求解范围作必要的假设，把问题简化，使求解成为可能。这对一切科研工作，都是不可缺少的环节。

1. 物体是连续的。 假定组成物体的介质（微粒）之间不存在任何空隙。从这一假设出发，物体内的一些物理量，如应力、应变和位移等都是连续的，可以用坐标的连续函数表示，从而可以应用数学上函数连续性的性质。实际上，一切物体都是由不连续的微粒组成的，这与假设不符。然而从统计学的平均观点来看，由于微粒的尺寸以及微粒之间的距离与物体的几何尺寸相比，其数量级相差十分悬殊，因而这一假设又是合理的，不会引起显著的误差。

有了这一假设，就可利用连续函数的一系列数学运算法则，例如微分和积分，以及微分方程等。流体力学、塑性力学的理论等都是基于这一假设。因此以连续性假设为基础的力学学科，统称为连续介质力学，而弹性力学仅是其中的一个分支。

2. 物体是线性、完全弹性的。完全弹性指的是物体在引起变形的外力被除去后，能完全恢复原来形状和尺寸，而无任何剩余变形。这样的物体，在任一瞬时的应力与应变都是一一对应的，与它过去的受力情况无关。线性指的是应力与应变之间呈线性关系，就是它们的比例系数不随应力或应变的大小而改变，这是由Hooke 提出，故又称广义 Hooke 定律，这是一个实验规律。然而

有些材料，如某些有色金属和塑料等，具有非线性的弹性性质，这已不属于本课程研究的范围。

除此以外，还有小变形假设(略去位移在应变中的高阶微量)，各向同性假设(物体在各个方向上都具有相同的性质)及均匀性假设(物体由同一材料组成，各部分的物性均相同)。

三、弹性力学的发展简述

弹性力学的发展从 17 世纪开始，大致可分为四个时期。首先是萌芽期。一方面通过实践探讨材料力学性质的基本规律，如英国的 Hooke (1678) 在实验基础上揭示出应力与应变成正比的规律，称 Hooke 定律；另一方面 I. Newton (1687) 的力学三大定律以及数学的飞跃发展，为建立弹性力学的数学物理方法奠定了基础。其次是理论基础的建立时期。17 世纪末，人们主要集中于杆件性能的研究，包括梁的弯曲理论，直杆的稳定和振动等。但这些成果及萌芽期的研究，都归于材料力学的内容。直到 19 世纪 20 年代，法国 Navier 和 Cauchy 基本上建立了弹性力学的数学理论之后，才使它成为一门独立的学科分支。Cauchy 在 (1822～1828) 发表一系列论文中，明确提出了应变与应力的概念，建立了弹性力学的几何方程、运动(平衡)方程、广义 Hooke 定律，为弹性力学的发展，建立了牢固的基础。第三是线性问题的发展盛期(约1850～1920)，主要标志是弹性力学广泛应用于工程实际问题。例如法国 Saint Venant (1855～1856) 发表了关于柱体扭转和弯曲理论的论文，以及局部性原理。Airy (1862)解决了平面应力问题。Aron(1874) 提出了壳体的求解方法，Kirchhoff(1850) 解决了薄板弯曲和平板振动问题。德国 Hertz(1881) 解决了弹性体的接触问题。德国 Kirsch (1898) 提出了应力集中的求解方法。与此同时，在能量原理和近似解法方面也取得了重大成果。如意大利 Betti (1872) 建立了功的互等定理，Castigliano

(1873～1879)建立了最小余能原理。又如英国的 Rayleigh(1877)和瑞士的 Ritz(1908)，从弹性力学的虚功原理和最小势能原理出发，提出了Rayleigh-Ritz的近似解法，俄国Galerkin(Галёркин)(1915) 提出了 Galerkin 的近似解法。这些都对弹性力学的发展起了推动作用。第四阶段大致从 20 世纪 20 年代开始，主要特点是非线性问题和数值解法的迅猛发展。在 von Kàrmàn (1907) 提出薄板大挠度问题之后，他又和钱学森(1939)提出了薄壳的非线性稳定问题。Murnaghan 和 Biot(1937～1939) 提出了大应变问题。钱伟长(1948～1957)用摄动法处理薄板大挠度的非线性问题。在线性理论方面，也进一步取得发展，如薄壁构件和薄壳理论，以及复变函数在弹性力学中的应用等等。特别值得提出，我国力学家胡海昌(1954)首先提出三类变量广义变分原理，日本鹫津久一郎(1955)也独立地导出这一原理，人们称为胡-鹫津原理。钱伟长(1960～1978)在广义变分原理和有限元理论方面也做出了重要贡献。他们的这些工作，都为有限元法的广泛应用奠定了基础。而 60 年代电子计算机的发展和普及，使有限元法的实施成为可能。另外，加权残值法和边界元法，也是解决某些实际问题的有效计算方法。可以预计，随着计算方法的不断发展，理论研究的不断深化，弹性力学的应用范围会越来越广泛。边缘学科，如粘弹性力学、热弹性力学以及气动弹性力学也会得到相应的发展。它们丰富了弹性力学的内容，也促进了工程技术的发展。

第一章 基本方程

§1-1 应力状态及平衡条件

在弹性力学中，常取物体内部任一微元体进行应力分析，当微元体趋近于零时，就得一点的应力状态。本节将着重讨论微元体的受力状态，建立平衡微分方程和面力的边界条件。

一、一点应力状态和平衡条件

作用在物体上的外力，可分为体力和面力。所谓体力是指分布于物体内各质点上的力，如重力、惯性力、磁力等，又称体积力。物体内任一点周围的单位体积受力的大小，称为体力的平均集度。其量纲为[力][长度]$^{-3}$。所谓面力是指作用于物体表面上的力，如风压力、土压力、液体压力以及固体间的接触力等。物体表面上任一点附近的单位面积受力的大小，称为面力的平均集度，其量纲为[力] [长度]$^{-2}$。

物体在外力作用下，其内部各部分之间所产生的相互作用的力，称为内力，取任一受平衡力系作用的物体，假想过 M 点的一个截面 S 将物体分割为 A 和 B 两部分（图1-1a）。在截面 S 上，B 对 A 作用的力与作用在物体 A 部分上的外力处于平衡状态。一般说来，作用在 S 面上的力不是均匀分布的。若取包含 M 点的微小面积ΔS，并设作用在该微小面积上的力是连续分布的，其合力为ΔP，则它的平均集度为 $\Delta P/\Delta S$，当 ΔS 无限缩小，由极限定义得

$$\boldsymbol{P}_n = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta S} \tag{1-1}$$

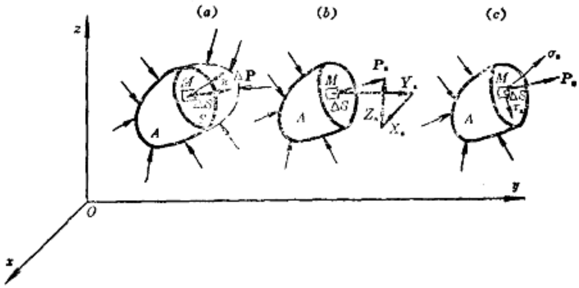

图 1-1

称 $\boldsymbol{P}_n$ 为 M 点的应力矢量，它的量纲为[力][长度]$^{-2}$。

假定在直角坐标系的情况下，$\boldsymbol{P}_n$可表示为

$$\boldsymbol{P}_n = X_n\boldsymbol{e}_1 + Y_n\boldsymbol{e}_2 + Z_n\boldsymbol{e}_3 \tag{1-2}$$

它的模，即应力的大小为

$$P_n = |\boldsymbol{P}_n| = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2} \tag{1-3}$$

其中 X_n、Y_n、Z_n 表示沿坐标轴的三个分量(图 1-1b)，$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 表示沿坐标轴的三个单位矢量。$\boldsymbol{n}$ 表示该微元面的法向单位矢量。

另外，应力矢量 $\boldsymbol{P}_n$ 又可分解为沿微元面 ΔS 的法向分量和切向分量，分别用 σ_n、τ_n 表示(图1-1c)。称 σ_n 为微元面的正应力，τ_n为沿微元面的剪应力。三者之间的关系为

$$P_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \tag{1-3'}$$

如果 $\boldsymbol{n}$ 与 y 轴的方向一致，则 $\sigma_n = \sigma_y$、$\tau_n = \tau_y$。而 τ_y 又可分解为沿 x 和 z 轴方向的两个分量，用 τ_{yx}、τ_{yz} 表示(图 1-2a)。同理，可得到类似的分量为 σ_x、τ_{xy}、τ_{xz} 和 σ_z、τ_{zx}、τ_{zy}(图1-2b、c)，其中每一个标量称为应力分量。

应力分量的下标符号规定：正应力只用一个字母的下标标记，表示应力分量沿微元面的外法线方向；剪应力用两个字母的下标标记，其中第一个字母表示所在面的外法线方向，第二个字母表

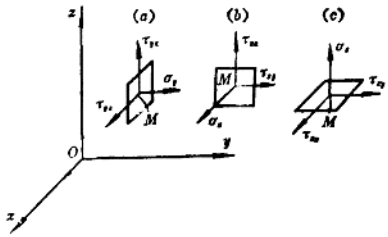

图 1-2

示该剪应力的指向。

以上讨论的是通过同一点的三个互相垂直微元面上的应力分布情况，它们可由 9 个应力分量描述，而且都是 x、y、z 的连续函数，并具有二阶偏导数。将其排列为矩阵形式，记为

$$\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{pmatrix} \tag{1-4}$$

这里 i、j 表示 x、y、z。当 i、j 取任意的 x、y、z 时，即可得到相应的应力分量。注意，σ_{xx}、σ_{yy}、σ_{zz} 已简化为 σ_x、 σ_y、 σ_z。

应力分量的正负号规定：微元面的外法线如沿坐标轴正向，则称该面为正面，正面上的应力分量沿坐标轴正向为正，负向为负（图 1-2 ）。微元面的外法线如沿坐标轴的负向，则称该面为负面，负面上的应力分量沿坐标轴负向为正，正向为负。图 1-2 中所示的各应力分量都是正的。

所谓一点的应力状态是指物体内同一点各微元面上的应力分布情况。但同一点的微元面是任意选取的，它可以有无穷多个。不同微元面上的应力，一般来说是各不相同的，因此如何描述一点应力状态，对研究物体的强度十分重要。

为了分析和研究一点的应力状态，可在物体内过 M 点作三个