

高等学校试用教材

# 机械量测量

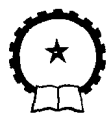
上海交通大学 林明邦  
天津大学 赵鸿林 主编

机械工业出版社

高等学校试用教材

# 机械量测量

上海交通大学 林明邦  
天津大学 赵鸿林 主编



机械工业出版社

(京)新登字054号

本书内容主要介绍机械量的测试技术。全书由两大部分组成：第一部分为测试技术的基础理论和共性知识，包括信号的分类、特性、时域、频域表征参数、DFT和FFT、测试方法、测试系统或仪器的组成和静动态特性、信号的时域、幅域和频域的模拟和数字、分析及处理等。第二部分列举了一些典型和常用的机械量，如位移、速度、力、压力、转矩、振动、冲击、阻尼、机械阻抗和旋转机械故障等的测试技术。以电测法为主，兼顾目前仍沿用的一些其他方法。重点介绍它们的测量原理、设计和选用方法。对量值传递计量系统和定度校正技术亦作了必要的叙述。所列举的方法和仪器反映了国内外的新成就和发展动向。本书是高等院校精密仪器专业和相近专业的教材或教学参考书，亦可供有关科研工作者和工程技术人员参考。

### 机械量测量

上海交通大学 林明邦 主编  
天津大学 赵鸿林

\*

责任编辑：贡克勤 责任校对：贾立萍  
封面设计：郭景云 版式设计：王颖  
责任印制：王国光

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业登记证出字第117号)

机械工业出版社北京印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

\*

开本787×1092<sup>1</sup>/<sub>16</sub>·印张18<sup>1</sup>/<sub>2</sub>·字数452千字

1992年5月北京第1版·1992年5月北京第1次印刷

印数0,001—3,800·定价：5.20元

\*

ISBN 7-111-03088-5/TB·151(课)

## 前 言

本书是根据1985年12月在天津制定的“精密仪器专业教材编审出版规划”和西安会议、常熟会议分别拟订并经编审小组批准的“机械量测量”教学大纲和编写大纲而编写的。

本书内容主要介绍机械量的测试技术。全书由两大部分组成。第一部分为机械量测试技术的共性知识和基础理论，包括信号的分类和表征参数、测试方法、测试系统或仪器的组成和特性、信号的分析 and 处理等。第二部分列举了一些典型和常用的机械量，如位移、速度、力、压力、重量、转矩、振动、冲击、旋转机械故障等的测试技术。以电测法为主，兼顾目前仍沿用的一些其他方法，重点介绍它们的测量原理、设计和选用方法，对量值传递计量系统和定度校正技术亦作了必要的叙述。所列举的方法和仪器力图反映国内外的新成就，可以使学生举一反三并理论与实际相结合。

本书是高等学校精密仪器专业和相近专业的教材，亦可供其他有关专业学生和工程技术人员参考。

本书由上海交通大学林明邦教授和天津大学赵鸿林副教授主编，参加编写的有上海交通大学林明邦教授（绪论、第五章、第六章）、上海交通大学金仲元副教授（第一章）、天津大学赵鸿林副教授（第二章、第三章）、东南大学金振华副教授（第四章）。

本书由哈尔滨工业大学蒋作民教授主审。1990年6月在天津召开了本教材初稿的审稿会，与会11所院校的14名代表提出了许多宝贵意见。尚有4所院校提出了书面意见。本书在编写过程中还得到了天津大学陈林才教授和景芳盛教授、上海交通大学张鄂教授和邹桂根副教授、东南大学万德钧教授的指导和帮助，中国纺织大学余新英讲师在百忙中誉写和校正了部分稿件。此外本书还参考了许多专业书刊、教材和资料，许多工厂、研究所提供了产品样本和技术数据，在此一并表示衷心感谢。

由于作者水平有限，经验不足，不当和错误之处在所难免，恳切希望广大读者批评指正。

编者

1990.11.

54-76-37

# 目 录

绪论 .....	1	§4-1 概述 .....	114
§1 研究的对象和意义 .....	1	§4-2 力的测量 .....	114
§2 本课程任务及与其他课程的关联 .....	2	§4-3 称重的方法及装置 .....	144
§3 机械量测试技术的发展与动向 .....	2	§4-4 压力的测量 .....	152
第一章 机械量信号的分类		§4-5 转矩的测量 .....	160
与表征参数 .....	4	第五章 机械振动测量 .....	167
§1-1 信号分类及性质 .....	4	§5-1 概述 .....	167
§1-2 周期信号 .....	6	§5-2 测量的基本原理和仪器 .....	175
§1-3 瞬态信号 .....	17	§5-3 机械式测振仪 .....	185
§1-4 信号的离散傅里叶变换(DFT)和 逆变换(IDFT) .....	29	§5-4 光学测振 .....	186
§1-5 随机信号 .....	33	§5-5 电气测振法 .....	196
第二章 测试系统的特征 .....	46	§5-6 测振仪的合理选择与使用 .....	216
§2-1 机械量测量的一般方法 .....	46	§5-7 振动测量仪器的定度和校准 .....	221
§2-2 测试系统的一般组成 .....	47	§5-8 各种振动及其参数测试方法 .....	228
§2-3 测试系统的特性 .....	48	§5-9 旋转机械的振动特征分析和监测 .....	244
第三章 位移和速度测量 .....	81	第六章 动态测试信号的分析与处理 .....	250
§3-1 位移测量 .....	81	§6-1 概述 .....	250
§3-2 速度测量 .....	94	§6-2 时域分析法 .....	257
第四章 力和力矩的测量 .....	114	§6-3 频谱分析 .....	266
		参考文献 .....	290

# 绪 论

## §1 研究的对象和意义

机械量顾名思义是泛指一切表征机械性质和状态的参量。但根据目前我国专业和行业的划分和归口,其中几何量已单独设课;温度、压力、流量和物位等归属热工量和自动化仪表、过程控制仪表或检测技术与仪器专业;强度、应力和应变等属于材料试验和实验力学分析学科等等。因此机械量已被认为是从力学概念来描述机械运动特性的参量,如位移、尺度、速度、加速度、力、重量、转矩、振动、冲击、噪声、功率等等。

随着现代科学技术的发展,特别是设备、系统和过程向高速、轻量、节能、自动化、智能化和可靠性方向发展,对表征它们运行性能的机械量,在设计、研制、试验、运行和监控方面占有的地位越来越重要。例如大型连续轧机的3000多台仪表、电站透平发电机组的1000多台仪表和火星探测器的8000多台仪表中,机械量都占一半以上;机械振动和噪声不仅已是评价产品质量和进行可靠性例行试验的必要项目,而且是各种动力机械运行状态监测和故障识别预报的主要信息源;冲击试验是产品、特别是军工产品忍受破损保证生命力的有效措施;转矩反映了功率和效率,对节能极为重要;快速自动称重对于连续输送生产过程的配料和计量、进出口贸易和商品交换等都已是必不可少的装备等等。

机械量的最主要特征之一是动态性,即是对时间或空间的变量,因此其测试技术便与对静态量的传统方法不同。动态测试又是带有普遍性的问题,因为就是静态量,亦会由于测量方法和状况的不同而需考虑为动态的。例如钢板的厚度和宽度,本身是静态量,但是现代化轧机的速度已达到每秒数十米,加工中钢板作空间运动,显然在轧机出口处的钢板尺度是不能再由人工或静态的方法一点一点地测量,而必须采用专门自动测厚测宽仪从而成为动态测量问题。

动态测试必须考虑被测量(输入量)、仪器或系统特性(传递特性或响应特性)和显示值(输出量)三者之间的性质和关系。由于输入量是变量或函数、仪器或系统的动态灵敏度或响应是频率的函数,因此动态测试必然要进行一系列逐点测量,从测量结果拟合成函数,而成为一个从输出量对输入量的随机估计问题。与传统的静态量测量可用单参数表示和测得的便是唯一的结果不同,动态测量通常要用一个或数个参量或特征量来表示,要根据测量任务和某种测量方式实现的可能性来选择,而测量结果必须进行处理,包括特征量提取、动态误差分析和动态修正。因此测量与处理已结合成一个整体,这便是测量从静态扩展到动态后定义为“研究信号检出、分析、处理与判断的有关工程”的广义涵义。

动态测量又是与自动控制密切相关的,因为任何自动化系统只有不断地测定实际量对设定量的动态偏差才能实现有效的反馈和调节,控制或调节的精度必然取决于测量精度。现代化的自动化系统特别要求具有实时、主动、在线以及能排除干扰而保证稳定地达到自适应和最佳状态,将废品或故障消除在萌芽阶段,保证安全和质量,这就对动态测试提出了应具有

相应的辨识、诊断、预测以及校准和补偿等功能。很多动态测试仪器或系统本身便是闭环系统。因此，现代化的动态测试仪器或系统已不是某些标准部件或仪器的简单组合，而是机电一体化的、软硬件相结合和具有智能化的系统，并已发展成为计算机辅助测试系统(CAM)。对正在发展的误差分离技术(EST)、计算机辅助设计(CAD)、智能机器人(IR)、柔性制造系统(FMS)和计算机集成制造系统(CIMS)等高新科技领域更是不可缺少的一个组成子系统。

机械量动态测试的其他特点包括参数种类繁多，一个对象会要求同时用多个参数表征，包括从一维、二维、三维到多维；被测量的动态范围大和信息量大，有许多是极限量；变化速度快，在线和实时性强等。此外测试往往在现场进行，环境条件恶劣，干扰因素多，对测量装置提出了特殊的可靠性要求。

因此，动态测试显然比传统的静态测试要复杂和困难，尚有许多问题待解决。例如动态误差还不能精确计算。一种从信息能量转换观点提出的动态误差 $\delta_d$ 与静态误差 $\delta_s$ 之间关系的估计式如下：

$$\frac{\delta_d}{\delta_s} = \sqrt{\frac{\tau_s P_s \eta_s}{\tau_d P_d \eta_d}}$$

式中， $\tau$ ——测量点读数时间； $P$ ——被测量使测量装置消耗的功率； $\eta = \frac{W_s}{W_d}$ ——能量效率； $W_s$ ——取决于热力学噪声的能量灵敏限； $W_d$ ——能量灵敏限。

下角 $s$ 及 $d$ 分别表示静态与动态时的值。

## §2 本课程任务及与其他课程的关联

机械量测量属于测试技术学科。测试技术研究的主要内容是被测量或信号、测量原理、测试方法、测量仪器或系统、定度和校准以及数据的分析和处理。由于机械量及其测试原理、方法和仪器品种繁多、涉及面广以及学时和篇幅限制，本书内容可归纳为下列两个方面：

- ① 测试技术的基础理论和相关知识；
- ② 典型和常用的机械量测试技术，它们是位移、速度、力、压力、重量、转矩、振动、冲击和旋转机械的特征分析。

通过本课程学习，应能掌握：

- ① 信号的物理概念和数学关系及与动态测试的关系，信号的描述、分析与处理方法；
- ② 测试仪器或系统的静态和动态特性，为设计与选用打好基础；
- ③ 典型机械量测试，并能举一反三；
- ④ 动态定度、校准和误差分析。

机械量测量是本专业的专业课。当今，主要采用非电量电测法。因此本课程除要引用本专业所设的物理、机、光、电等广泛的基础学科知识外，还与专业课程传感器、精密仪器电路、精密仪器设计、误差理论与数据处理与控制工程基础等密切相关。

此外，本课程又是一门实践性很强的课程，因此必须开设教学大纲规定的有关实验。

## §3 机械量测试技术的发展与动向

机械量测试技术的产生和发展，是出于科学技术和生产发展的需要，而科学技术和工业

生产的不断发展和新成就又促进了测试技术的完善与更新。

回顾机械量测试技术的发展已经历了以下三个阶段：

1. 手工艺时期 约在本世纪40、50年代。主要使用手工制作的机械指示式仪表、仪器，只是系统或工程中的次要部件；

2. 工程时期 约在本世纪50、60年代。在电子技术发展的基础上，应用光、热、电磁、射线等物理效应，出现了非电量电测式和自动记录式仪器。仪器有了专业设计人员，并成为科研和生产中不可少的装备；

3. 科学时期 约在本世纪70、80年代，随着各种新技术、新材料、新工艺、新器件和微处理器、微型计算机的普及与应用，仪器成为一门综合最新成就的学科。应用各种器件来设计一个特定功能的仪器以及应用各种仪器来组成测量与控制系统，都必须科学地进行研究和设计。出现了模拟数字混合式、多维图形和动态测量仪器。

当前从80年代后期起发展的主要趋向是：信号与系统已从模拟式或混合式向全数字化转变；传统的机械操作和控制正被电气化逐步代替，出现了性能优异的机电一体化新型仪器，它的显著特点是单片微机和专用电路集成块已作为构成部件并实现了检测转换与信号处理的结合。主要有三个发展动向：

1. 传感器的微位移化、固态化、检测变换集成化和多功能化 随着新原理、新型半导体、陶瓷、光电和光纤等功能材料和微细加工、微机械加工技术的发展和运用，正在促进传统传感器的变革，无位移的固态化和微位移化大大地提高了动态性能和可靠性。过去先检测传送后再对信号进行变换、处理的概念已可变为检测变换处理后再传送。信号处理功能已不仅是单对被测信号本身，而可考虑对被测对象内部状态和环境状态进行多参数测量和处理；

2. 微机化和智能化 单片微机和软件的开发应用已使信号的检测、采集、比较、相关、数字滤波、域间变换、逻辑和函数运算、程序给定和反馈控制等功能都可由仪器本身来实现。软件扩展了结构的性能限制，并使得仪器具有智能化，即能适应被测参数的变化来自选量程、自动补偿、自动校正、自寻故障。并能方便地与总线接口进行多台联机通信、检测和集散控制；

3. 全数字化 从传感器到显示记录仪全数字化可消除模拟式产生的许多误差源，不必再使用A/D和D/A，可直接用频率来定度。仪器的准确度不再用全量程百分比来表示，而是按读数的百分比表示，比传统的模拟式提高了3~5倍。

上述动向的例子如国内已引进的美国Honeywell DSTJ-3000型固态压力测量仪，在硅基片上同时用扩散工艺制成了温度、静压和差压三种传感元件，并用预先存储的校正公式经微处理器运算、判断来补偿温度误差和修正非线性，然后通过D/A输出统一信号，也可与计算机连接，实现双向通信。精度达到0.1%，量程比扩大到100:1。又如美国Foxboro公司谐振式带微处理器的全数字型820系列智能仪，具有温度补偿和远距离定度、双向通信、连续自诊断等功能。数字通信采用32位IEEE754浮点数据格式，准确度可达0.07%。

目前仪器的设计方法更加强调了采用可靠性、操作性、维修性和安全性等现代设计技术和CAD。采用先进的人机接口和数据通信网络技术，以满足更高的灵活性和经济性，向由过程测量控制、监督控制、优化决策和生产管理集合在一起的综合控制管理的自动化系统方向发展。



# 第一章 机械量信号的分类与表征参数

## §1-1 信号分类及性质

### 一、信号的概念

信号是载有信息的物理变量。信息是事物存在状态或属性的反映。因而它们是研究客观事物的依据。例如，回转机械由于动不平衡产生振动，那么振动信号就传达了该回转机械动不平衡的信息，因此它就成为研究回转机械动不平衡的依据。

测试系统实际上是一个传输信号的通道。它对信号加以转换、传输、放大、运算等分析和处理，最后以某种适合观察和记录的形式表现出来，使人们获得待测对象的某些信息。所以整个测试系统从它的输入端经中间各环节直至输出端都有某种形式的信号在起作用。

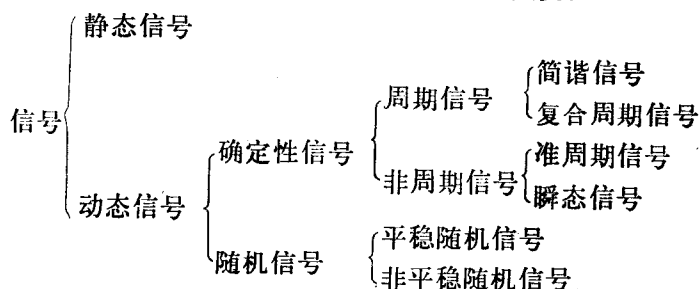
人们希望测试系统是一个不失真的系统，即它对各种频率的输入信号应具备：①有相同的幅值放大系数；②有相同的时间延迟，或其相位移与频率成正比。但实际上由于系统各环节性能的限制，要完全满足这些要求是不可能的。例如，一个周期矩形脉冲信号，由后面的分析可知，它包含了 $0\sim\infty$ 的各种频率谐波分量，而任何一个实际测试系统都不可能具有如此宽广的频响范围。因此，在测试之前，首先要对待测信号进行具体分析，以便根据信号的情况来设计和设计测试系统，使误差在允许范围内。所以只有全面深入地了解信号的各种特性，才能明确对测试系统的要求和评价测试系统的性能，从而达到正确设计和使用测试系统的目的，这就是研究信号的主要原因。

### 二、信号的分类

按照不同的角度，有不同的分类方法。通常从以下两个角度分类。

按所传递的信息的物理属性分，信号有机械量（如位移、速度、加速度、力等），电学量（如电流、电压等），声学量（如声强、声压等），光学量等等。

按信号的时域变化特性来分，可分为静态和动态两大类。



静态信号—在测量期间其值可认为是恒定的信号。

动态信号—瞬时值随时间变化的信号，其瞬时值随时间变化有确定性的函数关系，或者说能在实验条件下重现的称为确定性信号（或称有规信号），否则称随机信号（也叫无规信号）。

在确定性信号中，如果信号的时间函数 $x(t)$ 满足

$$x(t) = x(t + nT) \quad (1-1)$$

式中， $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ 。也就是每隔相同的时间间隔 $T$ ，信号量值重复出现一次，则 $x(t)$ 称为周期信号， $T$ 称为周期。

简谐信号是最简单的周期信号。由两个或更多周期成整数比的简谐信号复合而成的信号称为复合周期信号。图1-1中实线表示内燃机活塞振动加速度信号，它是由两个简谐振动（虚线 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ ）复合而成的。

但是周期比不是有理数的两个简谐信号，合成的结果就不是周期信号，而称为准周期信号。

下式就是一例

$$x(t) = x_{m_1} \sin(\sqrt{2}t + \theta_1) + x_{m_2} \sin(3t + \theta_2)$$

波形确定但不呈周期性的信号称为非周期定形信号，它包括上述准周期信号和瞬态信号，后者如矩形、三角形、钟形等单个脉冲信号。

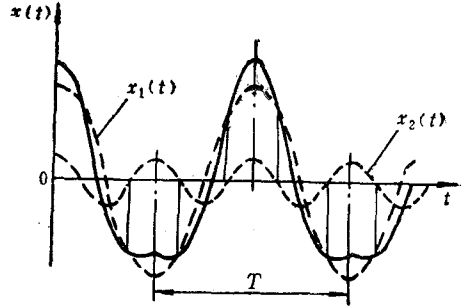


图1-1 复合周期信号

随机信号虽然它们的瞬时值随时间变化没有确定的函数关系，但遵循统计规律，因此可用概率论和数理统计的方法加以研究。

随机信号中，统计特性不随时间变化的称为平稳随机信号，随时间变化的称为非平稳随机信号。

### 三、信号的特性

抽去信号的物理属性，从广义上研究信号的特性有：时域特性—信号沿时域变化的特性；频域特性—信号沿频率域变化的特性；幅值域特性—信号幅值分布概率沿幅值域变化的特性。

现以简谐信号 $x(t) = x_m \sin 2\pi f_0 t$ 为例简要说明信号在上述三域中描述的含义以及对信号进行三域分析在工程上的实际价值。

图1-2a表明了 $x(t)$ 随时间 $t$ 的变化情况，它给人以形象和直观的感觉，从该波形图可以直接判断信号的类别、幅值大小，还可以大致估计信号所包含的频率成分；图b指出了简谐信号 $x(t)$ 在频率域中只有当 $f = f_0$ 时信号才有值，它给出了信号所含的频率成分及其幅值大小。如果 $x(t)$ 是振动信号，人们就可根据这个分析找出引起振动的振源来；图c为 $x(t)$

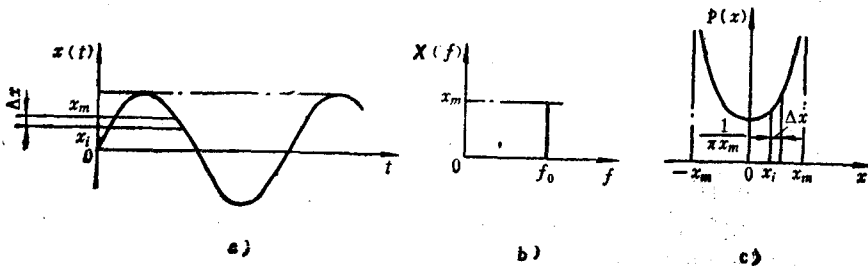


图1-2 简谐信号的特性

的幅值域特性，它给出了信号在幅值  $x = x_i \sim (x_i + \Delta x)$  范围内出现的概率为  $\Delta P = \int_{x_i}^{x_i + \Delta x} p(x) dx$ ，其中  $p(x)$  为  $x(t)$  的幅度概率密度函数。信号的幅值决定了信号的能量。由信号的幅值域特性可以估计信号在某一幅值范围内所占有能量的百分比。

以上这些特性将在后面作详细介绍。

## §1-2 周期信号

### 一、最基本的周期信号—简谐信号

在实际生活中有许多现象具有简谐运动的性质，如钟摆的运动，旋转机械动不平衡造成的振动等。尽管它们有各自不同的形式，但可以抽象出相同的数学模型：正弦或余弦函数。

$$\left. \begin{aligned} \text{即} \quad & x(t) = x_m \sin(\omega t + \psi) \\ \text{或} \quad & x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

式 (1-2) 表明，一个简谐信号完全由它的幅值  $x_m$ 、角频率  $\omega$  和相角  $\psi$  或  $\varphi$  所决定。因此这三个参数又称为简谐信号三要素。角频率  $\omega$  也可用频率  $f$  或周期  $T$  表示：

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad (1-3)$$

研究简谐信号时，还常用它的绝对平均值  $x_A$ ，有效值  $x_R$ ，峰值因素  $F_o$  和波形因数  $F_f$ 。

$$x_A = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)| dt = \frac{2}{\pi} x_m \quad (1-4)$$

$$x_R = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt} = \frac{\sqrt{2}}{2} x_m \quad (1-5)$$

式 (1-4) 和 (1-5) 也适合所有的周期信号。

$x_m$  表示一个信号可能达到的最大值（或峰值）， $x_A$  表示它在一个周期内的绝对平均值，而  $x_R$  则表示信号在一个周期内的能量，因此它在动态信号描述方面具有重要意义。

对于一定形状的信号，其峰值、有效值与绝对平均值之间有恒定的比例关系，可引入峰值因数  $F_o$  与波形因数  $F_f$  两个参数，它们定义为

$$F_o = \frac{x_m}{x_R} \quad (1-6)$$

$$F_f = \frac{x_R}{x_A} \quad (1-7)$$

对于简谐信号， $F_o = 1.414$ ， $F_f = 1.111$ 。

对于任何信号恒有  $F_o \geq 1$ ， $F_f \geq 1$ 。

简谐信号除了用式 (1-2) 实函数表达式和图1-1波形图表示外，还常用复数表示法。这种形式在复合周期信号的频谱分析中用得较多。

① 在频率为  $0 \sim \infty$  区域内的表示方法：复平面上旋转矢量投影法。

在图1-3所示的复平面上有一矢量  $F = a + jb$ ，其初相角为  $\varphi$ ，模为  $|F|$

则

$$\left. \begin{aligned} a &= |F| \cos \varphi \\ b &= |F| \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

$$\left. \begin{aligned} |F| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{b}{a} \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

$$F = a + jb = |F| (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (1-10)$$

按欧拉公式  $\exp j\theta = \cos \theta + j \sin \theta$ , 式 (1-10) 可写成

$$F = |F| \exp j\varphi \quad (1-11)$$

若  $F$  以角频率  $\omega$  在复平面内绕原点  $O$  逆时针旋转, 则矢量  $F$  便成为旋转矢量  $F_r$ , 有时称  $F$  为  $F_r$  的复振幅。若以  $a_r$ 、 $b_r$  分别表示  $F_r$  在实轴、虚轴上的投影, 那么

$$\left. \begin{aligned} a_r &= |F| \cos(\omega t + \varphi) \\ b_r &= |F| \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

$$F_r = |F| [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] \quad (1-13)$$

利用欧拉公式, 且令  $\theta = \omega t + \varphi$ , 则式 (1-13) 为

$$F_r = |F| \exp[j(\omega t + \varphi)] = |F| \exp(j\omega t) \exp(j\varphi) \quad (1-14)$$

由于  $F = |F| \exp(j\varphi)$ , 式 (1-14) 也可写成

$$F_r = F \exp(j\omega t) \quad (1-15)$$

式 (1-12) 表明一个简谐信号可以用一个在复平面内的旋转矢量的投影来表示; 式 (1-14)、(1-15) 表明了该矢量由三部分所组成: 长度为模  $|F|$  的线段 (简谐信号幅值);  $\exp(j\varphi)$  表示模为一个单位长度, 与实轴夹角为  $\varphi$  的固定单位矢量;  $\exp(j\omega t)$  表示模为一个单位长度, 以角频率  $\omega$  逆时针旋转的单位矢量。这表明, 当一根无向线段  $|F|$  乘以固定单位矢量  $\exp(j\varphi)$ , 则得到模为  $|F|$ 、初相角为  $\varphi$  的矢量  $F = |F| \exp(j\varphi)$ , 若再乘以旋转单位矢量  $\exp(j\omega t)$ , 则得到相应的旋转矢量  $F_r = |F| \exp(j\omega t) \exp(j\varphi)$ 。因此以  $\exp(j\varphi)$  去乘一个矢量对其幅值毫无影响, 只使它的相位角增加  $\varphi$ ; 而以  $\exp(j\omega t)$  去乘一个矢量其结果使它以角速度  $\omega$  旋转。采用这种形式有许多好处, 如两矢量  $F_1 = |F_1| \exp(j\varphi_1)$ ,  $F_2 = |F_2| \exp(j\varphi_2)$  相乘可方便地得到

$$F_1 \cdot F_2 = |F_1| |F_2| \exp[j(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

② 在频率为  $-\infty \sim +\infty$  区域内的表示方法: 复平面内两反向旋转矢量和表示法。

如图1-4所示, 简谐信号  $x(t) = x_m \cos(2\pi ft + \varphi)$  可用二个幅值为  $\frac{x_m}{2}$  的反向旋转的矢量和来表示, 其中一个矢量  $F_{r1} = \frac{x_m}{2} \exp(j2\pi ft) \exp(j\varphi)$ , 其初相角  $\varphi$ , 旋转频率  $f$ , 而另一矢量  $F_{r2} = \frac{x_m}{2} \exp[j2\pi(-f)t] \exp[j(-\varphi)]$ , 其初相角  $(-\varphi)$ , 旋转频率  $(-f)$ 。当它们旋转时, 矢量之和总是实数 (虚部互相抵消), 同时描绘出图右面的简谐信号波形图。

因为

$$F_{r1} + F_{r2} = \frac{x_m}{2} [\exp j(2\pi ft + \varphi) + \exp j(-2\pi ft - \varphi)]$$

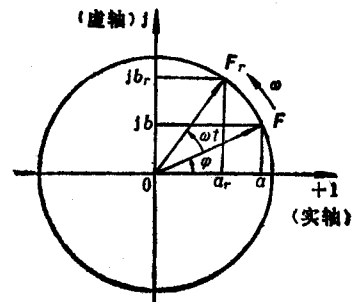


图1-3 复平面上旋转矢量投影法

由欧拉公式  $\cos\theta = \frac{1}{2}[\exp j\theta + \exp(-j\theta)]$  及  $\theta = 2\pi ft + \varphi$  可得

$$F_{r1} + F_{r2} = x_m \cos(2\pi ft + \varphi) \quad (1-16)$$

由此可知，一个简谐信号可以用两个如前所述的反向旋转的矢量之和来表示，这里对负频率给出了清晰的物理意义。

## 二、复合周期信号

### (一) 复合周期信号及其频谱

由两个或更多的频率成整数比的简谐信号复合而成的复合周期信号，如图 1-1 所示。反之，复合周期信号可以用数学方法（傅里叶级数）或者用仪器（频谱分析仪）分解为频率各不相同的简谐信号。这些简谐信号称为复合周期信号的谐波（或称谐波分量），所有谐波构成复合周期信号的频谱。

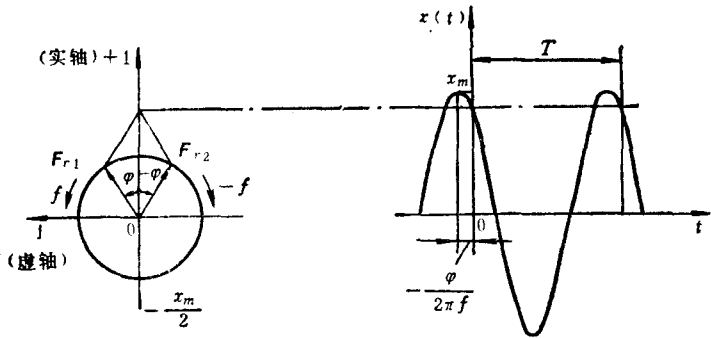


图1-4 复平面上旋转矢量和表示法

高等数学已经证明，一个周期为  $T$  的函数  $x(t)$  可以分解为无穷三角级数，即傅里叶级数，其表达式为

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos 2\omega_1 t + \dots + a_n \cos n\omega_1 t + \dots \\ &\quad + b_1 \sin \omega_1 t + b_2 \sin 2\omega_1 t + \dots + b_n \sin n\omega_1 t + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \end{aligned} \quad (1-17)$$

式中， $n = 1, 2, 3, \dots$ 。

当函数  $x(t)$  满足狄里赫利条件：①  $x(t)$  处处连续，或者在每一个周期内只有有限个跳跃间断点；②  $x(t)$  在每个周期内不作无限次振动，即有有限个极值。那么，当  $t$  是  $x(t)$  的连续点时，级数收敛于  $x(t)$ ，当  $t$  是  $x(t)$  的跳跃点时，级数收敛于  $\frac{x(t+0) + x(t-0)}{2}$ 。

一般工程上所遇到的周期函数都能满足这些要求。

式 (1-17) 右边表示的就是复合周期信号  $x(t)$  的谐波成分。其中  $\frac{a_0}{2}$  代表直流分量， $a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t$  代表一次谐波分量即基波分量，其余各项分别代表各高次谐波分量。

基波的角频率为  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ ， $a_0$ 、 $a_n$ 、 $b_n$  为傅里叶系数，可由下式求出

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_1 t dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_1 t dt \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

若令  $\frac{a_0}{2} = x_0$ ,  $a_n = x_m \cos \varphi_n$ ,  $b_n = x_m \sin \varphi_n$ , 则式 (1-17) 可改写成

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_{m_n} \cos(n\omega_1 t - \varphi_n) \quad (1-19)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{a_0}{2} \\ x_{m_n} &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{b_n}{a_n} \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

式 (1-18)、(1-20) 分别表示各次谐波的幅值和相角均是频率  $\omega_n = n\omega_1$  的函数。由于  $n$  是整数, 所以各谐波项的频率间隔是  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  的整数倍。把它们对应关系作成图称为频谱图。谐波幅值  $x_{m_n}$  与  $\omega_n$  的关系谱图称为幅频谱。谐波的相角  $\varphi_n$  与  $\omega_n$  的关系谱图称为相频谱。这样, 一个时域函数  $x(t)$  完全可用频域参数表示, 这就是通常所说的周期函数傅里叶频谱。

**例1** 求矩形周期脉冲信号的频谱。

**解** 该矩形周期脉冲信号的时域表达式为

$$x(t) = H_{\text{rec}} T \left( \frac{t}{\tau} \right) = \begin{cases} H & -\frac{\tau}{2} + kT \leq t < \frac{\tau}{2} + kT \\ 0 & \frac{\tau}{2} + kT \leq t < (k+1)T - \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

式中,  $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ 。其傅里叶系数由式 (1-18) 得

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} H dt = \frac{2H\tau}{T} \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} H \cos n\omega_1 t dt = \frac{2H}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} H \sin n\omega_1 t dt = 0 \end{aligned}$$

写成式 (1-19) 形式  $x(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_{m_n} \cos(n\omega_1 t - \varphi_n)$ , 其中  $x_0 = \frac{H\tau}{T}$ ,  $x_{m_n} = \left| \frac{2H}{n\pi} \right.$

$\left. \sin \frac{n\pi\tau}{T} \right|$ ,  $\varphi_n = \operatorname{tg}^{-1} \frac{0}{a_n}$ 。对于反正切函数  $\varphi_n = \operatorname{tg}^{-1} 0$ , 由于它的多值性,  $\varphi_n$  可等于  $0, \pm \pi$ ,

...±kπ等 (k = 0, 1, 2, ...)。它究竟等于多少, 要根据具体情况加以判别。结合本题, 考察它在一个周期 [0, π] 的情况:

按图 1-6 所示, 在  $\text{tg}\varphi_n = \frac{b_n}{a_n}$  中, 当  $b_n = 0$ , 若  $a_n > 0$ , 则  $\varphi_n = 0$ ; 若  $a_n < 0$ , 则  $\varphi_n = \pi$ 。

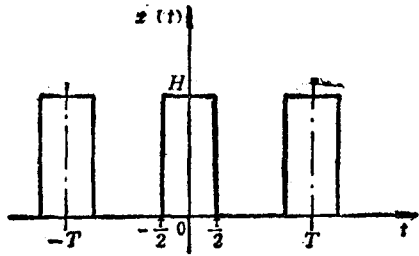


图1-5 矩形周期脉冲信号

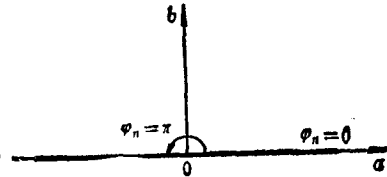


图1-6 相位角φ<sub>n</sub>的判别

而  $a_n = \frac{2H}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T}$ , 这里  $n = 1, 2, 3, \dots$ , 故  $\frac{2H}{n\pi} > 0$ , 因此

$$\varphi_n = \begin{cases} 0 & \text{当 } \sin \frac{n\pi\tau}{T} > 0 \text{ 时} \\ \pi & \text{当 } \sin \frac{n\pi\tau}{T} < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

假设  $\tau = \frac{T}{2}$ , 则  $x(t) = \frac{H}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2H}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right| \cos(n\omega_1 t - \varphi_n)$ , 此时  $x_0 = \frac{H}{2}$ ,  $x_{n\omega} = \left| \frac{2H}{n\pi} \right|$

$$\sin \frac{n\pi}{2}, \varphi_n = \begin{cases} 0 & \text{当 } \sin \frac{n\pi}{2} > 0 \text{ 时} \\ \pi & \text{当 } \sin \frac{n\pi}{2} < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

不难看出, 当  $n$  为偶数时,  $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$ , 故所

有偶次项谐波分量为零。也就是说, 在  $\tau = \frac{T}{2}$  情况下, 周期矩形脉冲仅含有直流分量和奇次谐波分量。图1-7画出了一个周期内原始波形与谐波成分比较的情形, 其中图 a 曲线 1 由直流分量和基波所合成; 图 b 曲线 2 在曲线 1 基础上增加三次谐波分量; 图 c 曲线 3 在曲线 2 基础上增加了五次谐波分量。可以看出, 若计入谐波分量越多, 则曲线越接近原始波形。计算到  $n = 12$  的周期矩形脉冲函数的  $x_m$  和  $\varphi_n$  值见表 1-1。

根据表 1-1 画出的幅频谱和相频谱见图 1-8。

由以上分析可以得出如下结论:

① 复合周期信号各谐波频率必定为基波频率的整数倍;

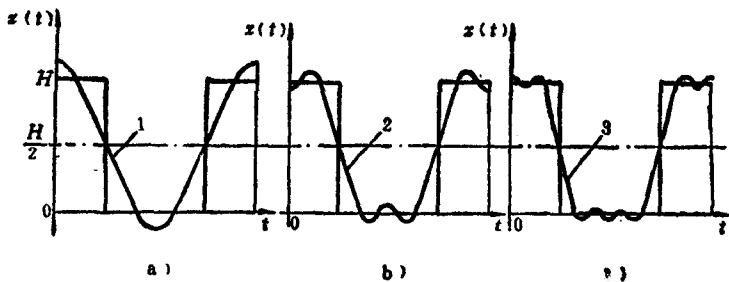


图1-7 矩形周期脉冲和它的谐波分量

- ② 频谱是离散的；
- ③ 由幅频谱线可看出谐波幅值随频率增大而减小；
- ④ 相频谱表明了各谐波之间有严格的相位关系。

表 1-1 矩形周期脉冲函数的幅频、相频数据

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_m = \frac{H}{2}$												
$x_{m_n} = \frac{2H}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$	$\frac{2H}{\pi}$	0	$\frac{2H}{3\pi}$	0	$\frac{2H}{5\pi}$	0	$\frac{2H}{7\pi}$	0	$\frac{2H}{9\pi}$	0	$\frac{2H}{11\pi}$	0
$\varphi_n = \begin{cases} 0 & \sin \frac{n\pi}{2} > 0 \\ \pi & \sin \frac{n\pi}{2} < 0 \end{cases}$	0	$\times$	$\pi$	$\times$	0	$\times$	$\pi$	$\times$	0	$\times$	$\pi$	$\times$

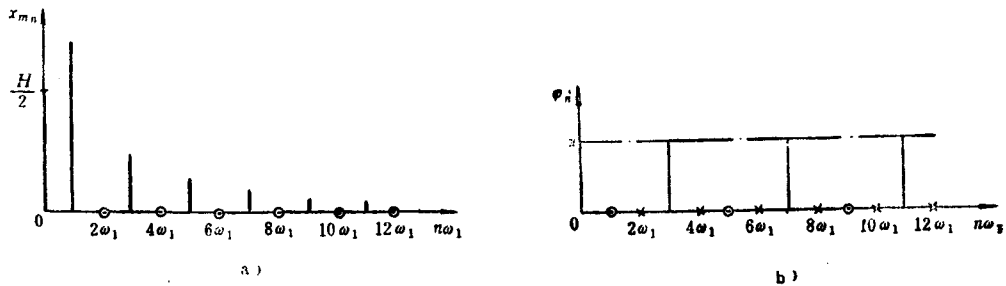


图 1-8  $\tau = \frac{T}{2}$  时矩形周期脉冲的频谱图

因此欲保持信号原有波形不变，不但要保持各谐波幅值的相对比例关系，还要保持各谐波之间相位关系，否则就要引起波形畸变。不失真测试系统的条件也就是由此而来的。

正如简谐信号有复数表达形式，复合周期信号也有它的复数形式。

由式 (1-17)  $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$ ，利用欧拉公式  $\cos \theta = \frac{1}{2} [\exp j\theta + \exp(-j\theta)]$ ， $\sin \theta = \frac{j}{2} [\exp j\theta - \exp(-j\theta)]$ ，令  $\theta = n\omega_1 t$  代入上式，且令  $C_0 = \frac{a_0}{2}$ ， $C_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$ ， $C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$  可得

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \exp jn\omega_1 t + C_{-n} \exp(-jn\omega_1 t)] \quad (1-21)$$

由式 (1-18)，利用欧拉公式另一形式  $\exp(-j\theta) = \cos \theta - j \sin \theta$ ， $\exp j\theta = \cos \theta + j \sin \theta$ ，令  $\theta = n\omega_1 t$ ，可得

$$C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \exp(-jn\omega_1 t) dt \quad | \quad n=0$$



$$C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \exp(-jn\omega_1 t) dt \quad \left. \begin{array}{l} n = 1 \sim \infty \end{array} \right\}$$

$$C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \exp(-jn\omega_1 t) dt \quad \left. \begin{array}{l} n = -1 \sim -\infty \end{array} \right\}$$

$$\text{令 } C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \exp(-jn\omega_1 t) dt$$

式(1-21)可写成 
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp jn\omega_1 t \quad (1-22)$$

对比式(1-22)和式(1-15)可知,一个简谐信号可用一个旋转矢量来表示,一个复合周期信号也可由若干旋转矢量来表示;式(1-15)中 $F$ 表示旋转矢量 $F$ 的复振幅,式(1-22)中 $C_n$ 同样表示复合周期信号 $x(t)$ 的复振幅。复振幅 $C_n$ 也可表达为

$$C_n = c_n \exp j\varphi_n$$

$$c_n = |C_n| = \left| \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \exp(-jn\omega_1 t) dt \right| \quad (1-23)$$

$$\varphi_n = \text{tg}^{-1} \frac{\text{Im}\{C_n\}}{\text{Re}\{C_n\}} \quad (1-24)$$

式中,  $\text{Im}\{C_n\}$ 、 $\text{Re}\{C_n\}$ 分别表示 $C_n$ 的虚部和实部。于是复合周期信号的复数形式可写成

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp j(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (1-25)$$

其中 $n\omega_1$ 表示谐波的角频率,  $c_n$ 表示谐波的幅值,  $\varphi_n$ 表示谐波的初相角。复振幅 $C_n$ 与 $n\omega_1$ 的关系称为复频谱,  $c_n$ 与 $n\omega_1$ 的关系称为幅频谱,  $\varphi_n$ 与 $n\omega_1$ 的关系称为相频谱。复频谱的频率范围是 $-\infty \sim +\infty$ 。

**例2.** 求图1-5信号的复频谱。

解 已知 
$$x(t) = \begin{cases} H & -\frac{\tau}{2} + kT \leq t < \frac{\tau}{2} + kT \\ 0 & \frac{\tau}{2} + kT \leq t < (1+k)T - \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

由式(1-25) 
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega_1 t + \varphi_n)$$

$$c_n = \left| \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \exp(-jn\omega_1 t) dt \right| = \left| \frac{H}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \right|$$

$$\varphi_n = \text{tg}^{-1} \frac{\text{Im}\{C_n\}}{\text{Re}\{C_n\}}$$

因为 虚部 $\text{Im}\{C_n\} = 0$ , 实部 $\text{Re}\{C_n\} = \frac{H}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T}$